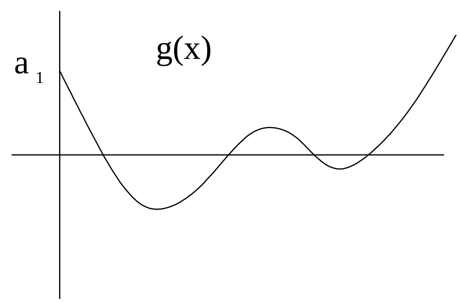
笛卡爾符號律

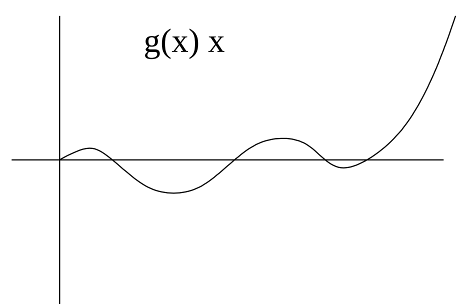
首項係數為1的實係數多項式, $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 把係數依序排出, $1, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$(中間如果有0, 就去掉不寫) 看看從1到$a_0$正負符號變了幾次, 稱為$f(x)$的變號數. 例如, 1,3,-5,-7,9 變號數是2; 1,-3,9,-4變號數是3. 笛卡爾符號律是說: 如果變號數是k的話, 那麼多項式$f(x)$的正實根的個數(重根要計以重數)一定是k, 或k-2, 或k-4, ⋯. 換句話說, 正實根的個數小於或等於k, 但是可以與k差一個偶數.

我們提供一個直接的看法, 先假設$a_1 > 0$, $a_0 > 0$, 把$f(x)$寫成

$$f(x) = (x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)x + a_0 = g(x) \cdot x + a_0$$

因為a_1, a_0同號, 所以 $g(x) = x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$的變號數也是k, 因此由數學歸納法可以假設$g(x)$的正實根個數是k或k-2或k-4, $\cdots$ 注意: $g(x) \cdot x$的正根和$g(x)$在一樣的位置.





現考慮$g(x) \cdot x + a_0$, 由於a_0是正的, 所以圖形向上移動, 正根的個數不會增加, 只有可能減少, 每一次減少都是偶數個.

如果$a_1 > 0$, 但是$a_0 < 0$, 此時, $g(x)$的變號數是k-1. (比$f(x)$的變號數少1) 再看上圖, 考慮$g(x) \cdot x + a_0$, 由於a_0是負的, 所以圖形要向下移動, 剛開

始移動一點點, 會在0的右邊產生一個新的實根, 由歸納法假設$x \cdot g(x)$的正實根數是 k-1, 或 (k-1)-2, 或(k-1)-4, $\cdots$, 由於$x \cdot g(x) + a_0$的正實根數會多1, 實根數變成k, 或k-2, 或k-4, $\cdots$.

讀者可以嘗試寫下最後的證明.