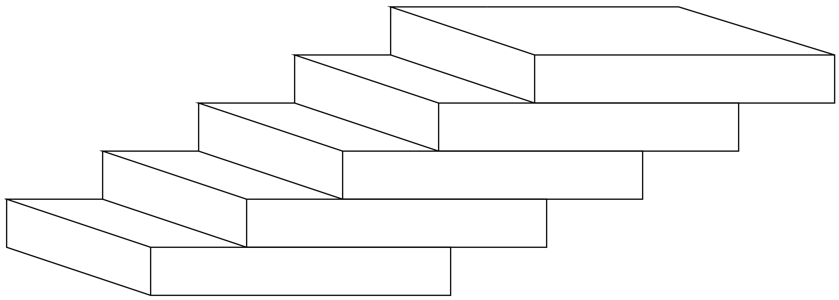
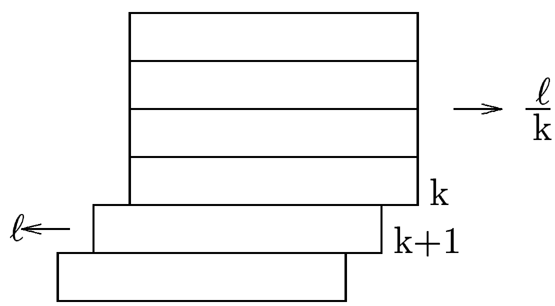
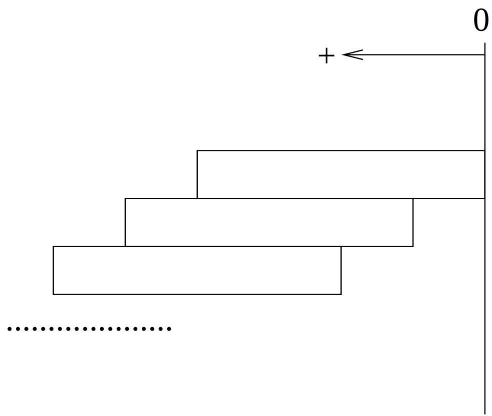
堆木板

將長, 寬, 高及密度皆相同的均勻木板一片片往上堆, 堆的時候遵循以下規則, 木板的兩個側面須上下對齊, 而上方的木板必須較下方的木板靠右或是重疊, 在維持不倒塌的情形之下, 該怎麼堆才能使最上和最下兩塊木塊在水平方向的差距最大呢? 又此時差距為多少?



解: 最大差距發生在: 從上方算下來總共k塊木板的重心剛好落在從上方算下來第$k+1$塊木板的最右端. 如果最大差距的堆法不滿足上述, 即對某個k, 上方算下來總共k塊木板的重心, 在上方算下來第$k+1$塊木板最右端的左側, 此時可將第$k+1$塊木板向左移動l, 上方k塊木板向右移動$\frac{l}{k}$, l取夠小使得上方k 塊木板的重心仍然不超過$k+1$塊木板的最右端, 此時一方面這$k+1$塊木板的重心維持不變, 所以不會導致倒塌, 而最上和最下的木板的差距可以變得更大.





現在計算這最大差距的值, 假設木板側面的長為2, 定最上一塊木板的右端水平坐標為0, 左方為正向, a_k代表上方第k塊木板重心的水平坐標, 則 $a_1=1, a_2=a_1+1=2, a_3=\frac{a_1+a_2}{2}+1=\frac{5}{2}, \cdots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}+1 \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n-2} a_k+a_{n-1}}{n-1}+1 \\ &= \frac{(a_{n-1}-1)(n-2)+a_{n-1}}{n-1}+1 \\ &= a_{n-1}+\frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \Rightarrow a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$, 此為最大差距減2. 又$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\infty$, 由此可看出, 只要$n$夠大(即木板夠多), 此差距要有多大都辦得到, 是不是有點出乎意料呢?