

八十九學年度第一學期

課程編號: 201 24900

科目名稱: 常微分方程導論

期中考試試題

時間: 3:10-5:00pm

日期: 11/7/2000

• 請詳述計算過程, 無計算過程的答案不予計分

1. (14 points) 考慮常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ty}{t^2 - 1}.$$

(a) 求該方程式的一般解.

(b) 試由題(a)的解討論當初始條件為(i) $y(0) = 1$ 和(ii) $y(1) = 0$ 時解的存在及唯一性.

2. (15 points) 考慮one-parameter常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y^6 - 2y^4 + \varepsilon.$$

(a) 試問當 bifurcation 發生時, 參數 ε 為若干?

(b) 試描繪出本題的 bifurcation diagram, 並 comment 解的行為當 ε 在 bifurcation point 附近.

3. (20 points) 考慮one-parameter 常微分方程式系統

$$\frac{dY}{dt} = AY = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

(a) 求該微分方程系統的一般解, 當參數 $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

(b) 試將題(a)的解畫在 trace-determinant 平面, i.e., sketch the phase portrait of the solutions, 並 comment 解的行為, 當時間 t 很大.

4. (15 points) 考慮常微分方程式系統

$$\frac{dY}{dt} = AY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} Y.$$

已知 (i) 矩陣 A 的特徵多項式為 $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$, (ii) 兩組獨立的特徵向量:
 $V_1 = [0, 0, 1]^T$, $V_2 = [1, -1, 0]^T$.

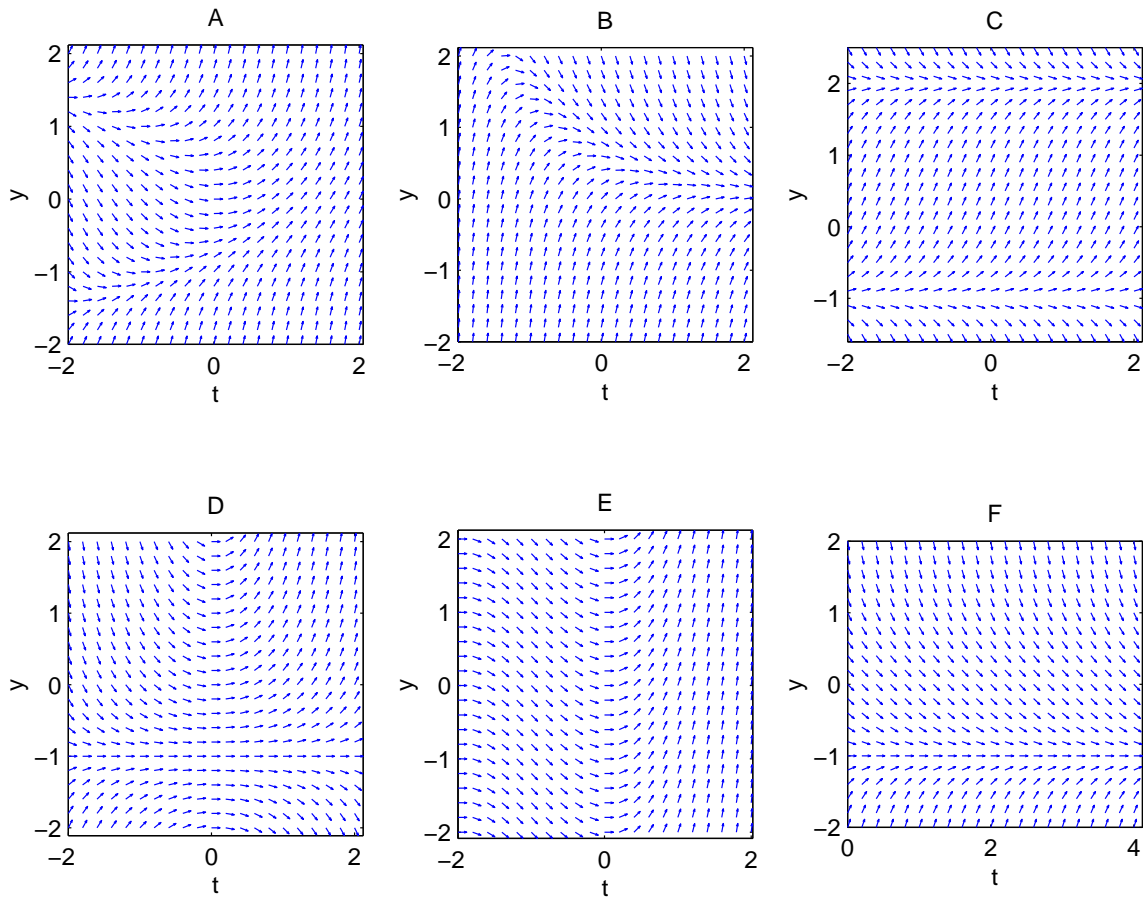
(a) 如果 w 是 A 的推廣化特徵向量 (generalized eigenvector), i.e., $(A - \lambda I)w = v$ (對特徵值 λ 及特徵向量 v 而言). 試推求 w , 當 $\lambda = 2$ 和 $v = V_2$.

(b) 運用 A 的特徵值與特徵向量建構該方程式的一般解.

5. (18 points) 考慮下列6組常微分方程式：

$$\begin{array}{lll}
 1. \frac{dy}{dt} = -2y + \exp(-t) & 2. \frac{dy}{dt} = (y+1)(2-y) & 3. \frac{dy}{dt} = t^2 + 2t \\
 4. \frac{dy}{dt} = -1 - y|y| & 5. \frac{dy}{dt} = t(y+1) & 6. \frac{dy}{dt} = y^2 + t.
 \end{array}$$

試由下列圖型A-F中找出相對應的slope fields, 並請說明理由.



6. (18 points) 考慮下列6組常微分方程系統：

$$\begin{aligned}
 1. \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y &
 2. \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y &
 3. \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y \\
 4. \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y &
 5. \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y &
 6. \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2y \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

where $Y = (x, y)$. 試由下列圖型A-F中找出相對應的 velocity (direction) fields, 並請說明理由.

