八十九學年度第一學期

課程編號: 201 24900
科目名稱: 常微分方程導論

學期末考試試題

<u>時間: 3:10-5:00pm</u> <u>日期: 1/2/2001</u>

• 請詳述計算過程, 無計算過程的答案不予計分

1. (25 points) 考慮下列初始值問題

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\,\frac{dy}{dt}+5y=f(t),\qquad y(0)=1,\qquad \frac{dy}{dt}(0)=0,$$

其中 $f(t)$ is a given forcing function. 求解該問題, 當 $f(t)$爲下列三種形式: (a) $f(t)=\sin 2t$, (b) $f(t)=u_4(t)$, 和 (c) $f(t)=\delta_4(t)$, 其中u_4,δ_4分別爲Heaviside 和Dirac delta functions that "turns on" at $t=4$.

2. (25 points) 在許多重要的數學與物理問題中, Bessel equation及它的解常常伴演著關鍵性的角色. 一個標準的Bessel equation of order $\nu>0$ 可寫成下列形式:

$$t^2\,\frac{d^2y}{dt^2}+t\,\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)y=0;$$

而一般常用的求解方法爲 "Power Series Method" (下學期會教到). Note that該方程爲一個變係數的線性方程式, in principle, 我們應該也可以運用"Laplace Transform Method"來求解. 以下是一種標準的求解過程.

(a) 令 $u=t^\nu y$, 試證明 in term of u Bessel equation滿足下列方程:

$$t\,\frac{d^2u}{dt^2}+(1-2\nu)\,\frac{du}{dt}+t\,u=0$$

(This is a more convenient form to use than the original equation).

(b) 令 $U(s)$ 爲 $u(t)$ 的 Laplace transform, 試證明$U(s)$滿足下列方程:

$$(s^2+1)\,\frac{dU}{ds}+(1+2\nu)s\,U=2\nu u_0,$$

假設初始條件爲$u(0)=u_0$和 $du/dt(0)=u_1$.

(c) 求題(b)中$U(s)$的一般解.

(d) 當 $\nu=1/2$, 從題(c)的解求$u(t)$: inverse of $U(s)$, and so $y(t)$.

3. (20 points) 考慮下列二階非現性常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(2\cos x-1)\sin x.$$

(a) 試將上式寫成一個 autonomous system, 並找出該方程的 equilibrium points.

(b) 試問該方程是否為一個 Hamiltonian system？如果是的話, 請找出該方程的 Hamiltonian function.

(c) 試決定該方程的解在equilibrium points附近的行為(stable or unstable).

4. (20 points) 令 $L(x, y) = V(x) + y^2/2$, 其中V為一個跟變數x有關函數. 考慮下列 autonomous system

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{dV}{dx} - ky, \qquad k > 0. \end{aligned}$$

(a) 試問V需要滿足什麼條件, L就是該 system 的 Lyapounov function？

(b) 當 $dV/dx = x - x^2$ 和 $k = 1/4$ 時, 圖型 1 為 L 的 level curves 及 vector field. 試說明該方程的解在equilibrium points附近的行為(stable or unstable).

(c) 試問題(b)所得到的結果與將該問題線性化後所得到的結果是否一致？(請說明理由)

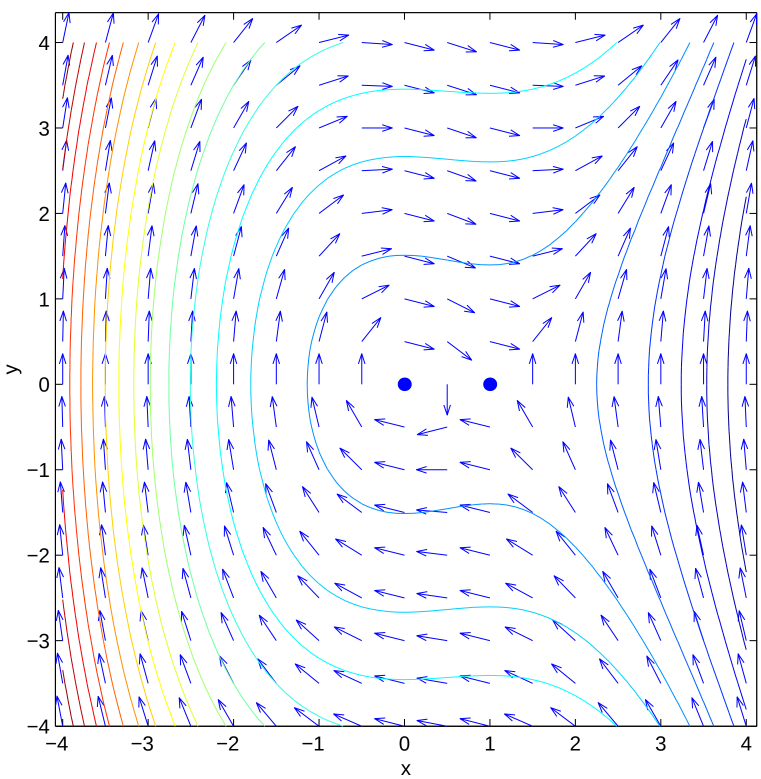
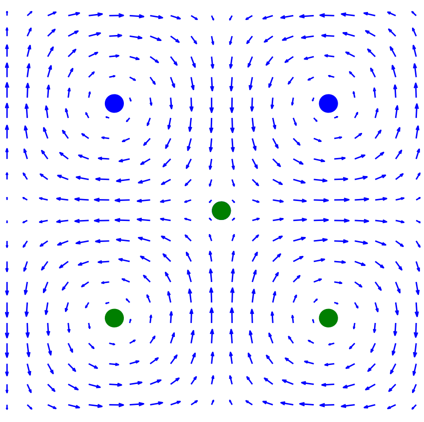


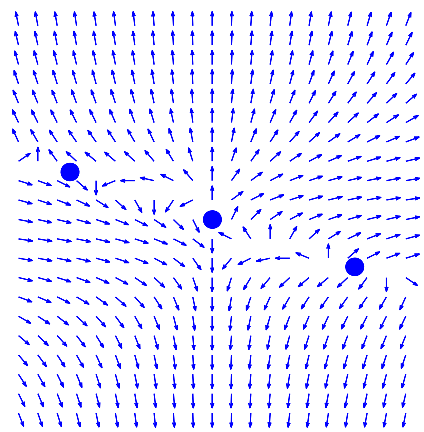
Figure 1: Figure for problem 4: Level curves L and vector field.

5. (10 points) 試由下列的vector fields中找出可能爲Hamiltonian system 或者爲gadient systems 的圖型, 並請說明理由.

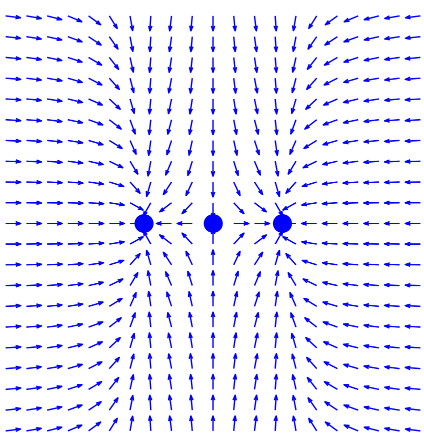
a



b



c



d