

# 作品評語

許瑞麟教授  
國立成功大學數學系

這件科展作品，主要是計算以 0,1 形成的 Thue-Morse 字串內，所有的 3-AP 子字串個數。首先，Thue-Morse字串的第一個位置可以是 0 或 1。如果第一個位置是 0，第二個位置就是0的互補元素  $\bar{0} = 1$ 。相反的，如果第一個位置是 1，第二個位置就是1的互補元素  $\bar{1} = 0$ 。接著，Thue-Morse 字串的構造方式是：如果前兩個位置是 01，那麼第三和第四的位置就是01的互補  $\bar{01} = 10$ ，組起來前四位數就是 0110。相反的，另一種組合就是 1001。因此，以 0,1 形成的 Thue-Morse字串有一個遞迴的公式表示法： $T_0 = 0$  或 1,  $T_n = T(n-1)T(\bar{n-1})$  且字串長度必為  $2^n$ 。而所謂的 3-AP 子字串是指在 Thue-Morse 字串中，任選三個間隔等間距  $d$  的位置，位置上的元素皆同為 0 或皆同為 1。這個題目複雜的地方在於間隔的長度  $d$  可以是任意。對於這個題目，沅蓉的技巧是想到一個重新排列 Thue-Morse 字串成為二維陣列的方式，她稱之為  $d$ -中心排列。在這個二維陣列的表示法幫忙下，沅蓉可以計算出Thue-Morse字串裡面所有3-AP 子字串的個數。以這一件作品，她獲得 2016 年國際科展的三等獎。

當這件作品再度參賽本屆丘成桐高中數學獎時，評審團首先要看的是，這件作品有無足夠分量的新增工作使得作者具有參賽資格。這一次沅蓉可以用不同的分類方式，依據  $d$  的不同形式，歸納出八個基本的遞迴式，從而得出完整公式來表示 Thue-Morse字串裡面所有3-AP 子字串的個數。然而就同樣 2016年國際科展的結果給出更好的分析方法和數學技巧，評審團不是很滿意，但是願意給她參加複賽的機會。我們要求她在複賽時探討將長度為  $2^n$  的 Thue-Morse字串，截去前面任意  $2^p$  個字元後，去計算剩餘長度的字串內所含的所有3-AP 子字串的個數。這個題目是評審團「隨手捏造」的，能不能解連評審們也不知道。這個製造出來的問題困難點在於，截去前面任意  $2^p$  個字元所剩餘的字串，已經不再是Thue-Morse字串。

我必須承認，這個變形題目並不容易，也因此對沅蓉沒有抱著太多的期待。但，出乎

意料的是，她“幾乎”辦到了。“幾乎”是因為，原來的  $d$ -中心排列行不通，她轉個彎弄出一個  $d$ -偏心排列。然後，必須將間隔  $d$  表示為  $2^k - s$ ，然後依據  $k$  和  $s$  的分類對  $d$  做出完整的探討。最後，很幸運的，一剛剛開始的八個基本的遞迴式在這裡都還派的上用場。可惜只差一點點，如果她可以進一步將這些對  $k$  和  $s$  所整理出來的個別公式加總得出最後結果，那就是一個完美的解答。這件作品出現這樣的轉折，讓評審團相當驚艷，最後得到銀牌獎。但是沅蓉這個作品和金牌獎差距相當有限，這也使得評審團花了不少時間才做出決定。

這件作品其實還有後記，我必須在此補述。刊登在此的作品，其實又比複賽時的結果更上一層樓。為了獲得對  $k$  和  $s$  所整理出來的個別公式做加總以便得出完美解答，沅蓉在賽後又花了不少心血。她一方面準備學測、一方面準備台大數學系的特殊選材考試、一方面還繼續為最終答案作奮戰。但是，她發現，這樣的  $d$ -偏心排列和將  $d$  表示為  $2^k - s$  的型態做分類，都無法得到最終解答。第四節的定理三十一是她用這個方法所能得出的最好結果。最後，沅蓉決定重起爐灶。基於所有錯誤經驗的總結，她先猜出答案所可能會含有的 basis 型態，然後以對這個題目豐富的經驗看出蛛絲馬跡，用未定係數法求解出 basis 的係數，最終破解這個截去前面任意  $2^p$  個字元所剩餘的字串的 3-AP 個數公式。公式列於定理三十二。

其實，很多數學工作就像是這樣，並不是最聰明的人才能做出好的數學作品。而是，只要肯花時間一想再想，肯讀很多的文獻資料，當然還需要一些些運氣，那麼就有機會解出原先看似不可能的數學問題。