丘成桐中學數學獎專題講座

梯度估計, 幾何分析與幾何
Gradient Estimate, Geometric Analysis and Geometry

丘成桐
Shing-Tung Yau

哈佛大學

臺大數學系, 七月八日 2010

在還是個大學生的時候，我對 Gelfand-Naimark 定理感到很著迷，該定理說一個拓樸空間上的函數代數 (function algebra) 決定了該空間本身。

在那之後，當學習了代數幾何，我見識到代數幾何學家們如何有效地以一種具體的方式利用有理函數體 (fields of rational functions) 去掌握代數多樣體 (algebraic varieties) 的性質。

當時我想：「如果能在微分幾何中也做類似的事就太棒了！」我們應該尋找可微流形上 某些適當的函數空間，並且把它們的性質與該流形的幾何聯繫起來。

如果要類比於代數幾何，對於複流形，此時最自然的考慮對象應該是全純函數或者是它們的一些變形，例如全純線叢的截面 (sections of holomorphic line bundles, 它們是 $\bar{\partial}$ 方程的解)。

然而，可微流形上沒有自然的特定複結構 ($\bar{\partial}$ 算子)，因此需要考慮橢圓偏微分算子。唯有對橢圓算子，我們才能較强地掌握相應方程解的正則性及其維度的有限性。

呼之而出的自然算子就兩種：二階的，它們必然是 Laplace 算子 (係數可能有些許變動)；至於一階的，必然是從 Hodge 理論來的或者是 (係數變動過的) Dirac 算子。 (在Kähler 流形上，$\bar{\partial}$ 算子可以視為帶係數的 Dirac 算子。)

最單純的算子似乎就是作用於函數上的 Laplace 算子了 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ on $\mathbb{R}^n$。於是我開始思索這些算子/方程的性質。它們的解我們稱為調和函數 (harmonic functions)。

Laplace (1749-1827)

Liouville (1809-1882)

我有興趣的是這些函數的大域 (global) 性質，其中最基本的就是 Liouville 定理：定義於整個歐氏空間上的有界調和函數唯有常數函數。$\Delta u = 0$ and $|u| < C$ on $\mathbb{R}^n \Longrightarrow u =$ constant.

因此開始時我很努力地嘗試去了解這個定理，這馬上讓我走上了發展梯度估計 (gradient estimate) 的道路。事實上，證明 Liouville 定理的方法有很多，其中之一是利用我們在複變函數論中學到的均值定理或是 Cauchy 類型的積分公式。

Cauchy (1789-1857)

Cauchy 積分公式, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

但是，要推廣這些結果需要對該流形上的幾何假設過多條件，因此得不到任何優美的定理。

因此，我試著尋找只涉及極大值原理 (maximal principle) 的不同途徑。極大值原理對橢圓算子也成立，而且事實上，有個概念叫做「最佳極大值原理」，可以用所謂的 Harnack 不等式證明。

Laplace 算子是相當重要的算子，不只因為本身很自然，它還常常在許多非線性理論 (在恰當意義下) 的線性化 (linearization) 中出現。

例如，當 $X : \Sigma \to \mathbf{R}^n$ 是一個嵌入超曲面時，Σ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的平均曲率 H (mean curvature) 可以寫成 Laplace 算子作用在位置向量上：

$$H = \Delta_\Sigma X.$$

此處在 Σ 上我們使用的當然是由 $\mathbf{R}^n$ 的歐氏度量所誘導出的度量，此度量業已牽涉到位置向量 X 本身。

無論如何，這說明了 Laplace 算子出現在極小曲面方程 (minimal surface equation) 這個擬線性偏微分方程中。

一個關於線性化算子的最佳估計對於幫助掌握原本非線性方程的解總是非常有用的。問題主要在於這樣的估計對微分方程係數的依存關係。

一個檢驗得到此種最佳估計與否的判據是去看所得的估計有沒有强到足以證明 Liouville 定理。

因此，我有了去研究如何將 Liouville 定理推廣到完備流形 (complete manifolds) 上的動機。

當考察 Liouville 定理的古典證明，旋即面對的第一個問題便是複分析中的單值化 (uniformization) 問題。

我們已經知道，有大量的有界全純函數 (bounded holomorphic functions) 定義在圓盤上 (例如所有的多項式)，但與此相反地，在平面上這樣的函數只有常數函數。

圓盤 (open disk: $|z| < 1$) 與平面 $\mathbb{C}$ 這兩個流形間有個很清楚的差異：前者具有帶强負曲率 $K < -\epsilon < 0$ 的完備保角度量，而後者具有帶非負曲率 $K \geq 0$ 的完備度量。

於是我認定，這個差異是推廣 Liouville 定理的正確方向。

我提出以下兩個猜想：

(1) 一個雙截面曲率 (bisectional curvature) 為正的完備 Kähler 流形必定雙全純同構 (bi-holomorphic) 於複歐氏空間 $\mathbb{C}^n$，

(2) 一個具强負曲率的單連通完備 Kähler 流形必定雙全純同構於一個有界域 (bounded domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$)。

為了檢驗第一個命題，我需要用到 Liouville 定理。因此我證明了 Ahlfors 的 Schwarz 引理的一個在高維度 Kähler 流形上的推廣。特別地，這說明了在 Ricci 曲率為正的完備 Kähler 流形上沒有非常數的有界全純函數。

在這之後，很快地，我發現去考慮實數版本的相似敘述是自然的：

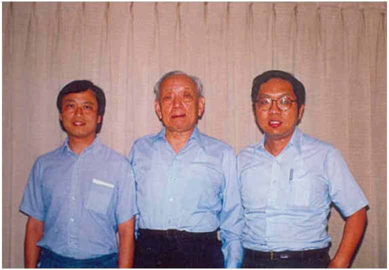
Ricci 曲率為正的完備流形不具有非常數的正調和函數。

這個定理的證明要來得困難得多，因而必須發展一些新的想法來克服。梯度估計 (gradient estimate) 就是我為了解決此一問題而發展的。

給定正的調和函數 u，我們取它的對數值 $\log u$ 並考慮其梯度的絕對值 $|\nabla \log u|$。這麼做的動機來自於將正函數視為一個映射，映進被賦予類似上半平面度量的正實數半線。

$$u : (M, g) \to (\mathbb{R}^+, dt/t).$$

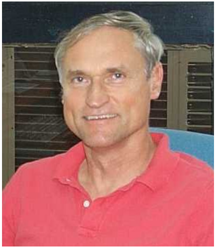
我基於極大值原理對此函數做了仔細的估計。由於此時的流形不是緊緻的，必須得到這種狀況下更一般的極大值原理 —— 我將大森英樹（OMORI, Hideki）的一個定理推廣到 Ricci 曲率下方有界的完備流形上。（稍後在一篇與鄭紹遠合作的文章裡，我們發現這個估計有一個局部的版本，因而並不真的需要用到非緊緻流形上的極大值原理。）



鄭紹遠, 陳省身與丘成桐

在這個估計中，我們設計了好些代數上的巧算去對付壞的項，在應用極大值原理的點上有效地應用了調和函數的方程式。

Schoen-Simon-丘成桐對於穩定極小曲面 (stable minimal surface) 的曲率估計以及稍後 Hamilton 處理正 Ricci 曲率緊緻三維流形上 Ricci 流的收斂性時也用到了類似的想法。



R. Schoen

L. Simon

對正調和函數進行梯度估計是我第一次了解如何做所謂的先驗估計 (a priori estimate)。鄭紹遠跟我很快便將這個想法更進一步地推展到流形上微分方程的研究上去。

到這裡可以提及我嘗試去了解二維與高維度歐氏空間的差異。前者的 Green 函數不能是正的，但後者的卻是。

我發現造成差異的正是測地圓球 (geodesic ball) 的體積增長。如果一個完備流形的測地圓球體積增長不比二次增長更快，即

$$\mathrm{Vol}\,(B_r) \leq Cr^2,$$

那麼這個流形上便不存在非常數的正值上調和函數 (superharmonic function，亦即滿足 $\Delta u \leq 0$ 者)。雖然此命題的證明相當單純，但也就是從此體積在整個研究中佔了一席之地。

1974 年，我應用這種想法解決了一個幾何問題：

在 Ricci 曲率為正的完備非緊緻流形上，測地圓球體積之於半徑的增長是線性的。(在單射半徑 (injectivity radius) 有一些限制的情況下，Calabi 也證明了同一命題。)

接著鄭紹遠-李偉光-丘成桐在一篇關於熱核 (heat kernel) 估計的文章中研究了測地圓球體積與單射半徑間的關係，之後又被 Cheeger-Gromov 推廣。這一想法成為了許多後來與幾何有關的工作的基石，並且在 Hamilton 與 Perelman 的文章中都又出現了。

基於這篇文章中的想法，我猜測在一個流形上，具有固定多項式增長率的調和函數全體是一個有限維的空間。後來這被 Colding 與 Minicozzi 解決，李偉光與王嘉平接著做了一些改進。

注意到，將調和函數對數值 $\log u$ 的梯度估計做積分後可知，局部上 u 的上界可以由它的下界控制：

$$\sup_{\Omega} u \leq C \inf_{\Omega} u.$$

這正是複分析中所謂的 Harnack 不等式，而且蘊含了最佳極大值原理。鄭紹遠與我立即研究了定義在一般 Riemannian 流形上的函數，並且說明了如何對一大類方程得到估計。

有好幾個重要的幾何問題都是以應用梯度估計做的研究為主線最後得到解答的。

第一個重要的問題是關於 Minkowski 空間中極大類空超曲面 (maximal space-like hypersurfaces) 的 Bernstein 問題。由於全空間上的度量是 Lorentzian，我們並不清楚它在這樣的超曲面上導出的度量是否是完備的。重要的問題在於如何說明這個導出度量的確是完備的。

Minkowski (1864-1909)

鄭紹遠跟我提出的想法如下：

首先證明，如果在 Minkowski 空間上選定了適當的大域座標，那麼該超曲面的位置向量的 Lorentzian 長度會是個正的恰當函數 (proper function，意指緊緻集的原像亦為緊緻集)。

然後，對此函數應用我們對調和函數所做估計的基本想法。在一些微妙之處必須再次用上極大超曲面方程式，不過我們終究找到了這個函數取 log 值後的梯度估計。

由於此函數是恰當 (proper) 的，因此必有無限震盪，梯度估計於是給出了導出度量的完備性。

事實上，由導出度量定義的距離可以從此函數震盪的方式讀出，這是我們證明完備性的方式。特別地，我們證明了在任意維度的 Minkowski 空間中，恰當地嵌入的極大類空超曲面都是線性的。這與歐氏空間中的 Bernstein 問題不同，後者只在七維以下答案才是肯定的。

這裡的想法稍後被我的學生 Treibergs 與 Bartnik 强化了。Bartnik 將極大類空超曲面的這個估計從 Minkowski 空間推廣到任意的時空上。那是個漂亮的工作。不過，目前還尚未能完整地了解怎麼使用極大剖面 (maximal slice) 來研究 Einstein 方程如何讓時空演化。

我們研究的第二個問題是關於仿射幾何中的極大仿射問題。人們研究在仿射變換下保持不變的超曲面的幾何。對這樣的超曲面有所謂「仿射法向」(affine normal) 的概念。

在種此超曲面 S 上一點 $p = p(0)$ 的仿射法向可以如此定義：先取定 S 在 p 的切空間 T_p，將之平行地移動後所得的超平面 T_t 與 S 包圍了一個包含 p 的區域，取這個區域的質心 $p(t)$。當 T_t 趨近於 T_p 時，相應的質心軌跡在點 p 的切線方向 $p'(0)$ 便定義作 S 在點 p 的仿射法向。

如果所有的仿射法向都通過超曲面凸側的一個點，這樣的超曲面稱作橢圓仿射球面；如果是通過凹側的一點則稱作雙曲仿射球面；如果所有的仿射法向都平行，則稱作瑕 (improper) 仿射球面。

一個古典的問題是要分類這種超曲面。

這個問題與實的 Monge-Ampère 方程有關。在瑕仿射球面的情況，假設此超取面是凸函數 f 的圖形，那麼 要證明 f 滿足以下性質：

$$\det(\nabla^2 f) \equiv \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 1,$$

換句話說，其 Hessian 矩陣的行列式為 1，則 f 必定是個二次函數。

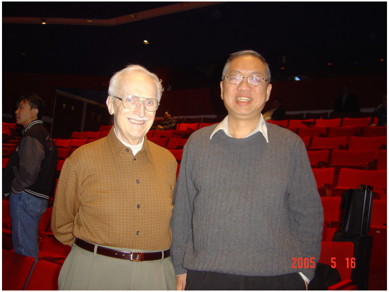
二維的情況首先被 Jürgens 解決，而 Calabi 解決了五維以下的情形。主要的困難在於證明定義在這個超曲面上的仿射度量是完備的。

瑕仿射球面上的仿射度量就是 Hessian 度量。

無論如何，鄭紹遠跟我研究了高度函數，它可以被證明為正。我們得到這函數非常精確的梯度估計，類似於從前對調和函數所做的那樣。

一旦我們知道如何估計仿射度量定義的距離，剩下的基於從前我們為了流形上的微分方程發展的想法便成為可行的了。 最後我們解決了所有維度下的 Bernstein 問題.

仿射幾何的討論後來成為我解決 Calabi 猜想 ($c_1(X) = 0$ 或 < 0 時, Kähler-Einstein 度量的存在唯一性問題) 時結實纍纍的指南。實 Monge-Ampère 方程的三階估計在仿射幾何中有個自然的意義：三階導數定義了一個張量，稱作 Pick 形式。



Calabi and Yau (Harvard 2005)

如果我們這麼看，將這個張量的長度定義為它被 Hessian 度量張量作縮併 (contraction) 所得者是很自然的。其實最後只有通過此一縮併才能使得計算變得簡潔優美。

早年以 Calabi 為首的仿射幾何研究者們已經觀察到這件事了。所有這些估計在複數情況的類比要來得更困難，但實 Monge-Ampère 方程仍為該著手在哪些事上指出了方向。

雙曲仿射球面的問題更複雜。

在做了 Legendre 變換後，原問題被轉化為一個定義在凸域上且在其邊界上具奇異性的 Monge-Ampère 方程。運用梯度估計我們得以解決相應的 Dirichlet 邊值問題。

我們的方法是內點估計。然而，在解實 Monge-Ampère 方程時邊界的估計也同樣要緊。

解這邊值問題用上了一個小技巧：我們刻意地 blow up 邊界值使得內點估計可用並且能建立存在性。

然後我們去掉具奇異性的邊界項。由於知道二階以前的邊界估計，我們可以找到一個 $C^{1,1}$ 解。

因此這個 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 邊值問題可以被解得具有直到第二階的邊界正則性。

高階的邊界正則性稍後被 Cafferelli、Nirenberg 及 Spruck 給解決了。

當鄭紹遠跟我研究實 Monge-Ampère 方程時，仿射幾何提供了大量直觀。這些想法接著被用來研究高維度的 Minkowski 問題。在意識到 Pogorelov 已經解決這問題之前我們也給出了一個解答。

Pogorelov 的方法中有些困難處，但可以被克服。他的二階估計與我們不同，後者是基於仿射度量的估計。

無論如何，還有別的與幾何相關的高維度 Monge-Ampère 方程，而且我們對這些方程已經有更好的了解。

大約在 1977 年附近，我受邀到 Berkeley 訪問一年，在那兒我教了一整門課講黎曼流形的保距嵌入 (isometric imbedding)。

我當時還跟李偉光 (Peter Li) 見了面，他當時還是陳省身教授的學生。我跟鄭紹遠好一段時間以來都在研究 Laplace 算子的特徵值，因此我建議李考慮特徵值的估計。

Peter Li

特徵值: $\Delta u = \lambda u.$

令我驚奇的是，一年後他告訴我在 Ricci 曲率非負時如何利用梯度估給出 Laplace 算子特徵值好的上下界。

他當時研究了特徵函數梯度的長度平方加上特徵值乘以該特徵函數的平方，也就是

$$|\nabla u|^2 + \lambda u^2.$$

如果我們能找到此量的一個好的上界，那麼便能看出當特徵值過小時，若是直徑很小，特徵函數 (適當地正規化後) 的震盪也會太小。因此特徵值相對於直徑就不能太小。

他的估計當 Ricci 曲率在流形上的一大部分都很負時是行不通的。

我與李偉光一起研究這事兒並且斷定克服此問題的辦法是要找到

$$\log(\sup u + \epsilon - u)$$

的梯度估計，此處 ϵ 相對於特徵值是很小的數。

這個量是為了測量特徵函數在接近最小上界時如何震盪，它還給出了更精細的估計。

最後，我們藉此找到 Laplace 算子第一特徵值的一個可被 Ricci 曲率下界及流形直徑描述的下界。

由於第一特徵值有一個可以用相同的量描述的上界，因此我們給出了 Laplace 算子第一特徵值的一個不錯的估計。

這是一個相當值得一提的結果，不過這個估計中的最佳常數還無法被決定。

之後我們建議來自中國的學者鍾家慶研究這個問題。他與楊洪蒼一起解決了流形具非負曲率的情形。

粗略說來，達到極端的情況發生在流形是個「針尖」時。

有些人對估計 Laplace 算子加上一個位能函數所得的算子的特徵值感興趣。

第一個重要的情況是當位能函數是純量曲率的一個倍數時。這出現在山邊問題 (Yamabe problem) 中，在我跟 Schoen 合作的正質量猜想與極小曲面的穩定性研究中多所使用。

當流形是歐氏空間中的區域且位能函數為凸時，我們考慮頭兩個特徵值的差 $\lambda_2 - \lambda_1$ (其中 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$)。這個問題被 Singer-王斌-丘成桐-丘成棟解決。

我們使用類似於李偉光跟我先前發現的論證加上另一個要點：第一特徵函數是對數凹的。

這是一個 Brascamp 及 Lieb 發現的重要事實，我一直希望把它整個推廣到更一般的流形上。

特別地，我們發現了一個能重證 Brascamp-Lieb 定理的連續性論證。

這個論證後來為一些研究不同種橢圓算子的作者所用，始於 Nick Korevaar。

山邊算子的特徵函數是非常有意思的。 Richard Schoen 跟我發展的不同論證在研究黑洞的形成上尤其有用。

我們發現了三維中算子

$$\Delta - \frac{1}{2}R$$

的第一特徵值一個相當值得一提的估計，此估計與流形的某種「半徑」有關。這個估計展示了三維流形的幾何裡純量曲率的本質特性。

Hamilton 跟我利用先前提到的那種估計察考了這個算子好一陣子。這個算子後來為 Perelman 所用，我會再回來提這件事。

在調和映射及特徵值估計的發展中我們見證了抛物型方程 (parabolic equations) 的威力。熱核具有許多神奇的性質。

鄭紹遠、李偉光以及我自己一直在研究 John Nash 關於熱核估計的那篇出名文章並為了它的優美著迷不已。

我們寫了幾篇關於它的文章。在解決一個 Borel 提出的問題時，我們發展了有界幾何假設下的熱核估計，還有一個單射半徑的估計。

儘管 Cheeger-Gromov 後來的工作看起來更炫目 (因為用上波方程 (wave equation))，但我仍認為熱核論證要來得更有威力。

無論如何，李偉光跟我更仔細地察考了熱方程 (heat equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{on} \quad M \times [0, \infty)$$

的估計並認定我們為了橢圓型方程發展的梯度估計的一些推廣應該有拋物型的類比。

我們考慮估計熱核 $h(x, y; t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})$ 本身這個極端的情況。由於熱核是正的而且對於歐氏空間可以清楚地寫下來，我們遍覽了所有對取了 $\log h$ 梯度的長度可以有的估計。我們發現加上 $\log h$ 對時間的偏導數可以使表達大大地簡化。

$$\frac{\partial \log u}{\partial t} - |\nabla \log u|^2 + \frac{n}{2t} \geq 0.$$

我們也意識到若要總結這些量的估計，最好是將它們在時空裡積分。在時空中，我們引進一個對連接任意兩點的路徑有定義的函數，這是透過極小化一個與 Hamilton 力學中的作用量相關的量。$\forall\, 0 < t < s$ 以及 $x, y \in M$:

$$u(x,t) \leq \left(\frac{s}{t}\right)^{n/2} e^{\frac{d(x,y)^2}{4(d-t)}} u(y,s).$$

這很漂亮地與我們在處理具有位能函數的 Laplace 算子時的估計相符合。

在估計 Schrödinger 算子的熱核時，值得一提的是，這個方法重現了核 h 裡出現的常數 4。這樣的精確度除此之外不曾出現在任何其他熱核的估計中。

這個想法後來被 Perelman 推廣並應用到 Ricci 流上。Perelman 使用了純量曲率當作位能函數，這在此架構下是很自然的。

Hamilton's Ricci Flow: $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}.$$

R. Hamilton

G. Perelman

Perelman 將逐點估計重寫並做分部積分，如此得到的函數他稱作「熵」(entropy)。這個估計被 Perelman 用來證明這個值得一提的事實 —— 在三維 Ricci 流中不會發生雪茄奇異點。

總之，當我與李偉光發現熱核的這個估計，其優美便讓我深信將來它必定會對其他熱方程有深遠的影響。

其時正當 Hamilton 初證他的偉大定理。他的定理說：在三維的情況，具正 Ricci 曲率的度量將會流到一個具常數曲率的度量。

我鼓勵 Hamilton 考慮這樣的估計在 Ricci 流中的類比。

在 San Diego 時他的辦公室就在我的隔壁。不幸地，我很快便離開了那兒前往 Harvard，因而我們並沒有那麼常討論。令我大吃一驚的是，大約五年後，他神來一筆地找到了正確的類比。

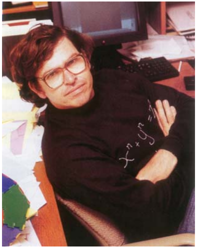
在我敘述 Hamilton 的突破前，我應該提及從他 1982 年在 Ricci 流方面的第一篇主要論文開始，直到現在他已經在這方面做了極大極廣的研究。

在二十年間他做了大量的貢獻，而 Perelman 的工作大大地依賴這些發展。Perelman 在自己的文章裡曾對此特別致謝。

真的讓我有點吃驚的是，許多在 Perelman 的工作出現前從來不曾在 Ricci 流上耕耘過的研究者指稱，在 Hamilton 的第一篇文章後的二十年間基本上甚麼也沒發生，要不然就是說這二十年間發展的很多想法不如 Perelman 的想法重要。

在 1983 年，我建議 Hamilton 考慮利用 Ricci 流證明 Thurston 幾何化猜想 (geometrization conjecture) 的可能性，因為證明一個幾何結構的存在性最自然的辦法就是透過非線性微分方程。

微分方程給出的形變 (deformation) 的奇蹟是，我們關於背景空間的拓樸不必知道得太多，這正是此途徑主要的優於 Thurston 方法之處。



Thurston

如同大家能想像的那樣，第一個困難在於了解一個三維流形如何拆解成三維流形結構定理所描述的簡單分塊。

為了處理這點，我們期望 Ricci 流在有限時間產生出奇異點。這將被曲率的演化以及它 blow up 有多快給控制。因此，有 I 型與 II 型兩種奇異點。

如同期望的那樣，有自相似的奇異點。由於微分同胚群的作用都是 Hamilton 的 Ricci 流的規範變換，它對這樣的解扮演了重要的角色。

Hamilton 引進了 Ricci 孤立子 (Ricci soliton) 這個非常重要的概念：就是那些沿著對稱群流動的解。$R_{ij} + \mathcal{L}_X g_{ij} = f_{ij}$.

孤立子解的研究被 Hamilton 視為了解奇異點的關鍵。

Hamilton 以很多方式從跟均曲率流 (mean curvature flow) 做類比得到關於他的 Ricci 流的直觀。曲線縮短流 (curve shortening flow) 已被 Grayson 研究過，而 Hamilton 因為對類比 (analogy) 的關心對此展現了極大的興趣。

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H = \Delta_{\Sigma} F.$$

緊接在那之後， Huisken 考慮了均曲率流中 Hamilton 定理的類比：均曲率流將一個歐氏空間中的凸緊緻超曲面演化成一個圓球面。

均曲率流中有很多自相似解，人們可以從它們學到一些東西。

在我要 Hamilton 推廣我與李偉光對拋物型純量方程的估計到 Ricci 流 $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$ 上，他開始把與函數的 Laplacian 有關的結果推廣成 Hessian 矩陣的版本。

他成功地對正曲率流形 (M, g) 做到這點。然後在一連串的嘗試中，他考慮 Ricci 流並且找尋矩陣不等式。這是無可避免的，因為 Ricci 曲率是一個張量。對於所有的 1 form W 與 2 form U:

$$Q := M_{ab}W_aW_b + 2P_{abc}U_{ab}W_c + R_{abcd}U_{ab}U_{cd} \geq 0$$

$\forall t \in (0, T]$ on M. 其中

$$M_{ab} \equiv \Delta R_{ab} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b R + 2R_{acbd}R_{cd} - R_{ac}R_{bc} + \frac{1}{2t}R_{ab},$$

$$P_{abc} \equiv \nabla_a R_{bc} - \nabla_b R_{ac}.$$

那麼，推廣李偉光跟我得到的拋物型不等式背後的道理是甚麼？

由於這與極大值原理有關，應該要考慮最壞的景況 —— 相信就是 Ricci 孤立子。

此外，為了要使張量不等式能有意義，我們不能使用 log，除非這有定義。所以我們將李-丘不等式改寫成一個二次不等式。

對於一個 Ricci 孤立子，有一個來自規範群的向量場，但我們也可以嘗試只與曲率張量有關而與此向量場無關的量。我們要找尋這些量間的代數不等式。

Hamilton 發現了這樣一個量 Q，它可以被詮釋成純量情況的類比。他還發現了對應的不等式 $Q \geq 0$ (見上一頁) 。

注意到，在所有用上極大值原理的微分方程估計中一旦正確的量被找到，要證明結果就變得直接了當了。

Hamilton 發現的量既驚人又是 Ricci 流發展的關鍵。這個不等式該被視為 Ricci 流方面的第二個主要突破。

要應用這些不等式，Hamilton 需要假設度量的曲率為正。

幸好， Hamilton 跟 Ivy 發現，對於三維流形，曲率在奇異點附近事實上會變成正的。

在 Q 中令 $U_{ab} = \frac{1}{2}(V_a W_b - V_b W_a)$ 並對 W_a 取 trace，得到

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{t} + 2\nabla_a R \cdot V_a + 2R_{ab} V_a V_b \geq 0.$$

再取最佳的 1 form $V = -\frac{1}{2}(Ric)^{-1}\nabla R$ (minimizer)，得

$$\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{|\nabla R|^2}{2R} + \frac{R}{t} \geq 0.$$

最後對時空中的曲線積分，便得到 Harnack 不等式. $\forall\, t < s$ and $x, y \in M$:

$$R(x,t) \leq \frac{s}{t} e^{\frac{d_t(x,y)^2}{2(s-t)}} \cdot R(y,s).$$

一旦我們知道這些不等式，能做的事就多了。我們可以看 Hamilton 創造的概念，像是遠古解 (ancient solutions)。所有這些解都可以用 Hamilton 的不等式去分析。

Hamilton 分類了三維的奇異點。在嘗試三維的情況前他對具有正迷向曲率 (isotropic curvature) 的四維流形做了廣泛的研究。

在 90 年代末，Hamilton 透過了解三維流形在曲率有界的假設下"如何按幾何化猜想所描述而拆解" 作出了第三次突破。

Perelman 在 2002 年在 arXiv 上的預印本是基於上述所有 Hamilton 的重要貢獻。當然，他對 Li-Yau 不等式及 Hamilton 不等式做了更廣泛的應用。