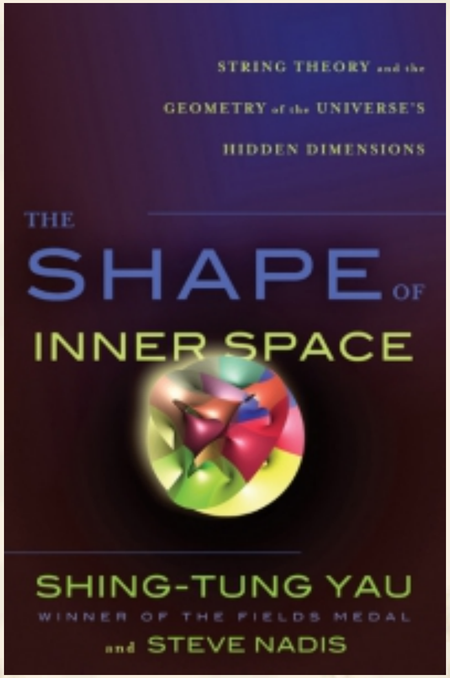
弦論和宇宙隱維的幾何

丘成桐
哈佛大學與台灣大學

二零一一年八月五日

今天要講的，是數學和物理如何互動互利，這種關係在 Calabi-Yau 空間和弦論的研究中尤為突出。

這個題目非出偶然，它正是我和 Steve Nadis 的新書《內空間的形狀》的主旨。書中描述了這些空間背後的故事，個人的經歷和幾何的歷史。



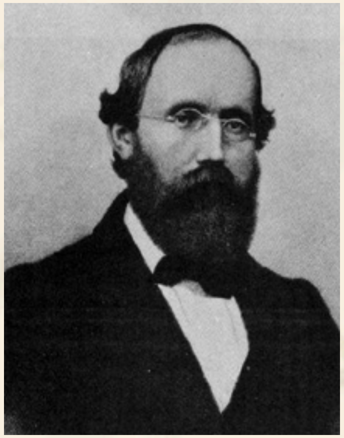
我寫這本書，是希望讀者透過它，了解數學家是如何看這世界的。數學並非一門不食人間煙火的抽象學問，相反地，它是我們認識物理世界不可或缺的工具。

現在，就讓我們沿着時間 – 或更確切地、沿着時空 – 從頭說起。

I. 黎曼幾何學

1969 年，我到了 Berkeley 唸研究院。在那裏我了解到，十九世紀幾何學在高斯和黎曼的手上經歷了一場翻天覆地的變化。黎曼的創見，顛覆了前人對空間的看法，給數學開闢了新途徑。

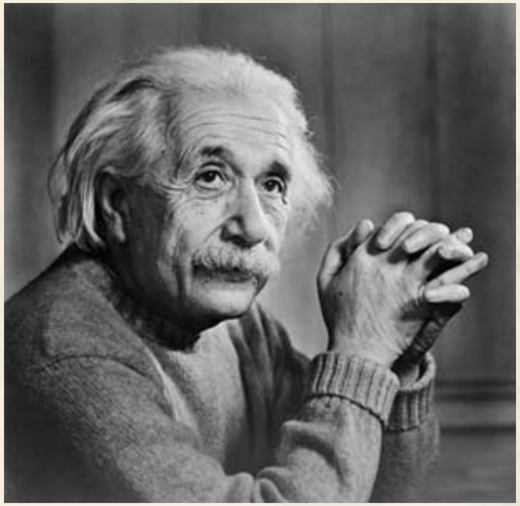
高斯



黎曼

幾何的對像，從此不再局限於平坦而線性的歐幾里德空間內的物體。黎曼引進了更抽象的、具有任何維數的空間。在這些空間裏，距離和曲率都具意義。此外，在它們上面還可以建立一套適用的微積分。

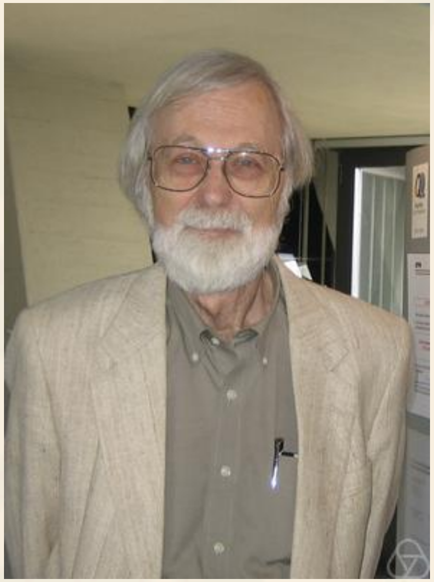
大約五十年後，愛因斯坦發覺包含彎曲空間的這種幾何學，剛好用來统一牛頓的重力理論和狹義相對論，沿着新路邁進，他終於完成了著名的廣義相對論。



爱因斯坦

在研究院的第一年，我唸了黎曼幾何學。它與我在香港時學的古典幾何不一樣，過去我們只會討論在線性空間裏的曲線和曲面。在 Berkeley，我修了 Spanier 的代數拓撲、 Lawson 的黎曼幾何、Morrey 的偏微分方程。此外，我還旁聽了包括廣義相對論在內的幾門課，我如飢似渴地盡力去吸收知識。

課餘的時間都呆在圖書館，它簡直成了我的辨公室。我孜孜不倦地找尋有興趣的材料來看。聖誕到了，別人都回去和家人團聚。我卻在讀《微分幾何學報》上 John Milnor 的一篇論文, 它闡述了空間裏曲率與基本群的關係。我既驚且喜，因為它用到了我剛剛學過的東西。



John Milnor

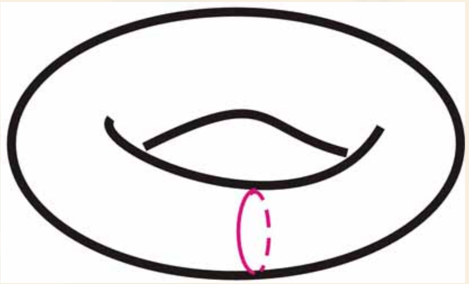
Milnor 的文筆是如此流暢，我通讀此文毫不費力。他文中提及 Preissman 的另一論文，我也極感興趣。

從這些文章中可以見到，負曲率空間的基本群受到曲率強烈的約束，必須具備某些性質。基本群是拓撲上的概念。

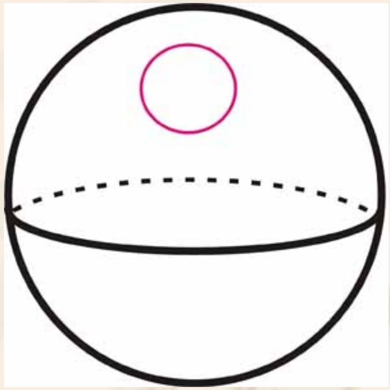
雖然，拓撲也是一種研究空間的學問，但它不涉及距離。從這角度來看，拓撲所描繪的空間並沒有幾何所描繪的那樣精細。

幾何要量度兩點間的距離，對空間的屬性要知道更多。這些屬性可以由每一點的曲率表達出來，這便是幾何了。

舉例而言，甜甜圈和咖啡杯具有截然不同的幾何，但它們的拓撲卻無二樣。同樣，球面和橢球面幾何迥異但拓撲相同。



作為拓撲空間，球面的基本群是平凡的，在它上面的任何閉曲線，都可以透過連續的變動而縮成一點。但輪胎面則否，在它上面可以找到某些閉曲線，無論如何連續地變動都不會縮成一點。由此可見，球面和輪胎面具有不同的拓撲。



Preissman 定理討論了幾何 (曲率) 如何影響拓撲 (基本群)，我作了點推廣。在影印這些札記時，一位數學物理的博士後 Arthur Fisher 嚷着要知道我幹了甚麼。他看了那些札記後，說任何把曲率與拓撲扯上關係的結果，都會在物理學中用上。這句話在我心中留下烙印，至今不忘。

II. 廣義相對論

狹義相對論告訴我們，時間和空間渾為一體，形成時空，不可分割。愛因斯坦進一步探究重力的本質，他的友人 Marcel Grossman 是數學家，愛氏透過他認識到黎曼和 Ricci 的工作。

黎曼引進了抽象空間的概念，並且討論了其上的距離和曲率。愛因斯坦利用這種空間，作為他研究重力的舞臺。

　　愛因斯坦也引用了 Ricci 的工作，以他創造的曲率來描述物質在時空的分布。Ricci 曲率乃是曲率張量的迹，是曲率的某種平均值。它滿足的比安奇恆等式，奇妙地可以看成一條守恆律。愛因斯坦利用了這條守恆律來把重力幾何化，從此我們不再視重力為物體之間的吸引力。

　　新的觀點是，物體的存在使空間產生了曲率，重力應當看作是這種曲率的表現。

對歷史有興趣的讀者，愛因斯坦的自家說辭更具說服力。他說：「這套理論指出重力場由物質的分佈決定，並隨之而演化，正如黎曼所猜測的那樣，空間並不是絕對的，它的結構與物理不能分割。我們宇宙的幾何絕不像歐氏幾何那樣孤立自足。」

講到自己的成就時，愛因斯坦寫道：「就學問本身而言，這些理論的推導是如此行雲流水，一氣呵成，聰明的人花點力氣就能掌握它。然而，多年來的探索，苦心孤詣，時而得意，時而氣餒，到事竟成，其中甘苦，實在不足為外人道。」

　　愛因斯坦研究重力的經歷，固然令人神往，他的創獲更是驚天動地。但是黎曼幾何學在其中發揮的根本作用，也是昭昭然不可抹殺的。

半個多世紀後，我研習愛因斯坦方程組，發現物質只能決定時空的部分曲率，為此心生困惑，自問能否找到一個真空，即沒有物質的時空，但其曲率不平凡，即其重力為零。

當然，著名愛因斯坦方程 Schwarzschild 解具有這些性質。它描述的乃是非旋轉的黑洞，這是個真空，但奇怪地，異常的重力產生了質量。然而這個解具有一個奇點，在那裏所有物理的定律都不適用。

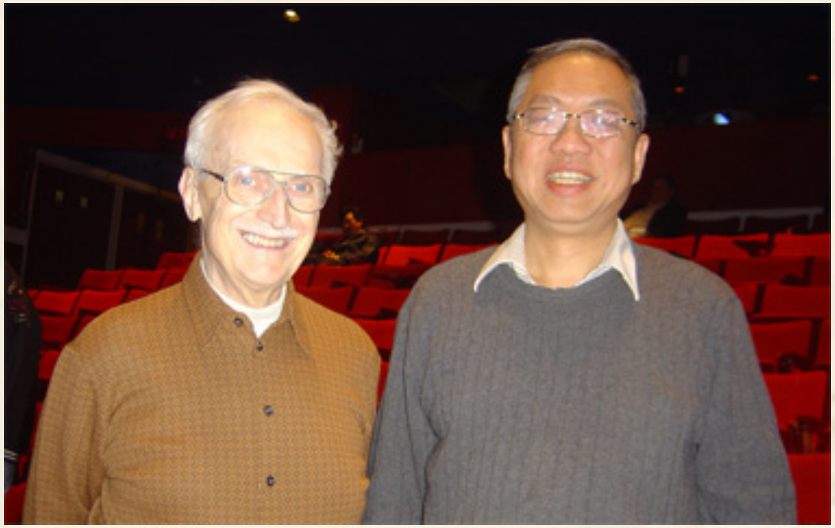
我要找的時空不似 Schwarzschild 解所描繪的那樣是開放無垠的，反之，它是光滑不帶奇點，並且是緊而封閉的。即是說，有沒有一個緊而不含物質的空間 – 即封閉的真空宇宙 – 其上的重力卻不平凡？

這問題在我心中揮之不去，我認為這種空間並不存在。如果能從數學上加以論証，這會是幾何學上的一條美妙的定理。

III. Calabi 猜想

從上世紀七十年代開始，我便在考慮這個問題。當時，我並不知道幾何學家 Eugenio Calabi 早已提出差不多同樣的問題。他的提問透過頗為複雜的數學語言來表述，其中牽涉及 Kaehler 流形、Ricci 曲率、陳類等等，看起來跟物理沾不上邊。事實上，Calabi 抽象的猜想也可以翻過來，變為廣義相對論裏的一個問題。

　　新的內容乃是要求要找的時空具有某種內在的對稱性，這種對稱物理學家稱之為超對稱。於是上述的問題便變成這樣：能否找到一個緊而不帶物質的超對稱空間，其中的曲率非零 (即具有重力)？



與 Calabi 教授（2004）

　　我與其他人一起試圖証明 Calabi 猜想所描述的空間並不存在，花了差不多三年。這猜想不僅指出封閉而具重力的真空的存在性，而且還給出系統地大量構造這類空間的途徑，大家都認為世間那有這樣便宜的東西可撿。可是，縱然不乏懷疑 Calabi 猜想的理由，但沒人能夠反証它。

一九七三年我出席了在 Stanford 舉行的國際幾何會議。這會議是由 Osserman 和陳省身老師組織的。或是由於我與兩人的關係，我有幸作出兩次演講。在會議期間，我告訴了一些相識的朋友，說已經找到了 Calabi 猜想的反例。消息一下子傳開了，徇眾要求，當天晚上另作報告。那晚三十多位幾何工作者聚集在數學大樓的三樓，其中包括 Calabi，陳師和其他知名學者。我把如何構造反例說了一遍，大家似乎都非常滿意。

Calabi 還為我的構造給出一個解釋。大會閉幕時，陳師說我這個反例或可視為整個大會最好的成果，我聽後既感意外，又興奮不已。

與陳師

可是，真理總是現實的。兩個月後我收到 Calabi 的信，希望我釐清反例中一些他搞不清楚的細節。看見他的信，我馬上就知道我犯了錯。

接着的兩個禮拜，我不眠不休，希望重新構造反例，身心差不多要垮掉。每次以為找到一個反例，瞬即有微妙的理由把它打掉。經過多次失敗後，我轉而相信這猜想是對的。於是我便改變了方向，把全副精力放在猜想的証明上。花了幾年工夫，終於在一九七六把猜想証明了。

在 Stanford 那個會上，物理學家 Robert Geroch 在報告中談到廣義相對論中的一個重要課題－正質量猜想。這猜想指出，在任何封閉的物理系統中，總質量/能量必須是正數。我和 Schoen 埋頭苦幹，利用了極小曲面，終於把這猜想証明了。

Richard Schoen

這段日子的工作把我引到廣義相對論，我們証明了幾條有關黑洞的定理。與相對論學者交流的愉快經驗，使我更能開放懷抱與物理學家合作。至於參與弦論的發展，則是幾年之後的事了。

在証明 Calabi 猜想時，我引進了一個方案，用以尋找滿足 Calabi 方程的空間，這些空間現在通稱為 Calabi-Yau 空間。我深深地感到，我無心插柳，已經進入了一界數學高地。它必定與物理有關，並能揭開自然界深深埋藏的隱秘。

然而，我並不知道這些想法在那裏會大派用場，事實上，當時我懂得的物理也不多。

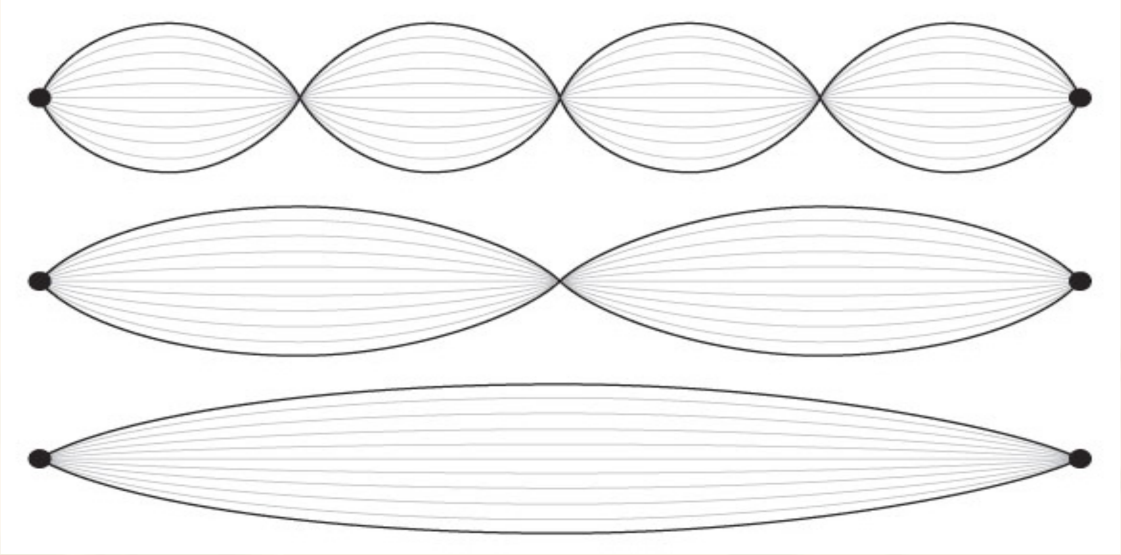
IV. 弦論

1984 年，我接到物理學家 Gary Horowitz 和 Andy Strominger 的電話。他們興冲冲地談到有關宇宙真空狀態的一個模型，這模型是建基於一套叫弦論的嶄新理論上的。

Gary Horowitz

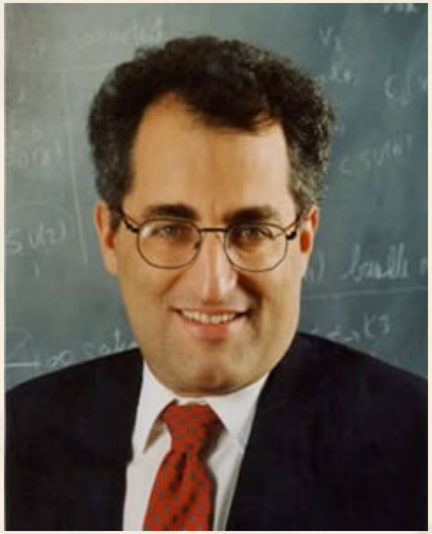
Andy Strominger

弦論的基本假設是，所有最基本的粒子都是由不斷振動的弦線所組成的，這些弦線非常非常細小。某些弦論要跟量子力學相容不排斥，時空必須容許某種超對稱性。同時時空必須是十維的。



我在解决 Calabi 猜想時証明存在的空間得到 Horowitz 和 Strominger 的喜愛。他們相信這些空間會在弦論中擔當重要的角色，原因是它們具有弦論所需的那種超對稱性。他們希望知道這種看法對不對，我告訴他們，那是對的。他們聽到後十分高興。

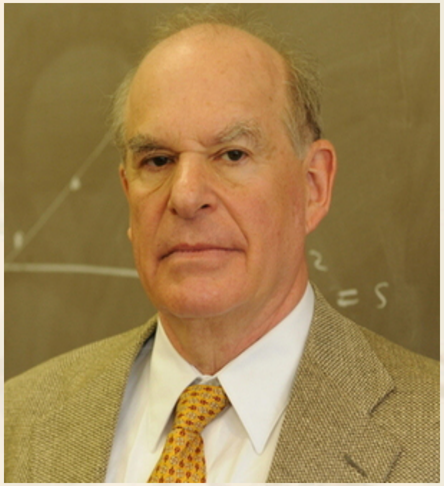
不久，Edward Witten 打電話給我，我們是上一年在Princeton 相識的。他認為就像當年量子力學剛剛面世那樣，理論物理學最激動人心的時刻來臨了。他說每一位對早期量子力學有貢獻的人，都在物理學史上留名。



Edward Witten

早期弦學家如 Michael Green 和 John Schwarz 等人的重要發現，有可能終究把所有自然力統一起來。愛因斯理在他的後半生花了三十年致力於此，但至死也未竟全功。

Michael Green

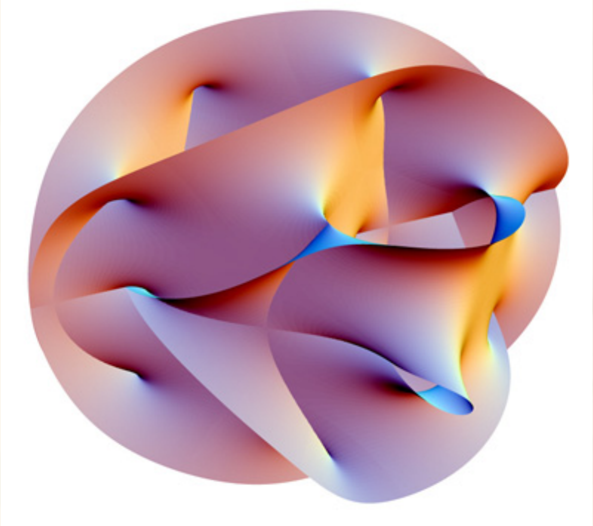


John Schwarz

當時 Witten 正與 Candelas, Horowitz 和 Strominger 一起，希望搞清楚弦論中那多出來的六維空間的幾何形狀。他們認為這六維捲縮成極小的空間，他們叫這空間為 Calabi-Yau 空間，因為它源於 Calabi 的猜想，並由我証明其存在。

與 **Candelas** 教授（**2001**）

弦論認為時空的總數為 10。我們熟悉的三維是空間，加上時間，那便是愛因斯坦理論中的四維時空。此外的六維屬於 Calabi-Yau 空間，它獨立地暗藏於四維時空的每一點裏。我們看不見它，但弦論說它是存在的。



這個添了維數的空間夠神奇了，但弦理論並不止於此，它進一步指出 Calabi-Yau 空間的幾何，決定了這個宇宙的性質和物理定律。那種粒子能夠存在，質量是多少，它們如何相互作用，甚至自然界的一些常數，都取決於 Calabi-Yau 空間或本書所謂「內空間」的形狀。

理論物理學家利用 Dirac 算子來研究粒子的屬性。透過分析這個算子的譜，可以估計能看到粒子的種類。時空具有十個維數，是四維時空和六維 Calabi-Yau 空間的乘積。因此，當我們運用分離變數法求解算子譜時，它肯定會受 Calabi-Yau 空間所左右。

Calabi-Yau空間的直徑非常小，則非零譜變得異常大。這類粒子應該不會觀測到，因為它們只會在極度高能量的狀態下才會出現。

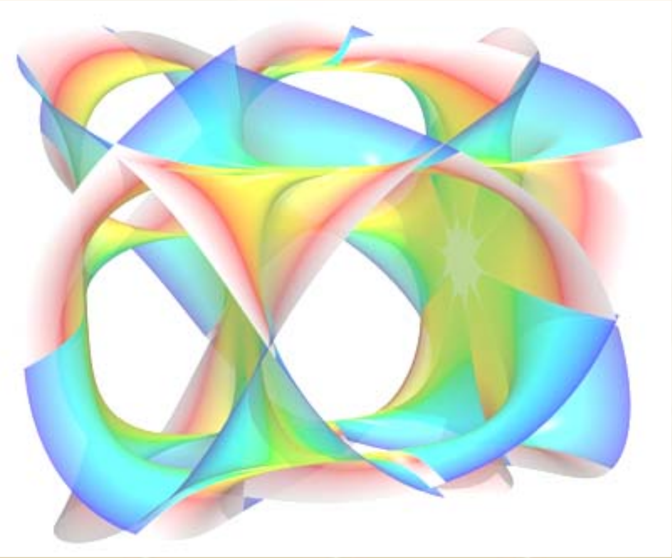
另一方面，具有零譜的粒子是可能觀測到的，它們取決於 Calabi-Yau 空間的拓撲。由此可見，這細小的六維空間，其拓撲在物理中是如何舉足輕重。

愛因斯坦過去指出，重力不過是時空幾何的反映。弦學家更進一步，大胆地說這個宇宙的規律，都可以由 Calabi-Yau 空間的幾何推演出來。這個六維空間究竟具有怎樣的形狀，顯然就很重要了。弦學家正就此問題廢寢忘餐，竭盡心力地研究。

Witten 很想知多一點 Calabi-Yau 空間。他從 Princeton 飛來 San Diego，與我討論如何構造這些空間。他還希望知道究竟有多少個 Calabi-Yau 空間可供物理學家揀選。

原先，他們認為只有幾個－即少數拓撲類－可作考慮，是以决定宇宙「內空間」的任務不難完成。可是，我們不久便發現，Calabi-Yau 空間比原來估計的來得多。一九八零年初，我想它只有數萬個，然而，其後這數目不斷增加，迄今未止。

　　於是，決定內空間的任務一下子變得無比困難，假如稍後發現有無數 Calabi-Yau 空間的話，就更遙不可及了。當然，後者是真是假還有待驗証，我一直相信，任何維的 Calabi-Yau 空間都是有限的。



Calabi-Yau 空間的熱潮，始於 1984 年，當時的物理學家，開始了解到這些複空間或會用於新興的理論上。熱情持續了幾年，便開始減退了。可是到了上世紀 80 年代末期，Brian Greene、Ronen Plesser、Philip Candelas 等人開始研究「鏡象對稱」(mirror symmetry) 時，Calabi-Yau 空間又重新成為人們的焦點了。

鏡對稱乃是兩個具有不同拓撲的 Calabi-Yau 空間，看起來沒有甚麼共通點，但卻擁有相同的物理定律。具有這樣關係的兩個 Calabi-Yau 空間稱為「鏡象對」(mirror pair)。

數學家把物理學家發現的鏡象關係搬過來，成為數學上強而有力的工具。在某個 Calabi-Yau 空間上要解決的難題，可以放到它的鏡象上去考慮，這種做法往往奏效。

一個求解曲線數目的問題，懸空了差不多一個世紀，就是這樣破解的。它使數數幾何學 (enumerative geometry) 這一數學分枝，重新煥發了青春。這些進展令數學家對物理學家及弦論刮目相看。

鏡對稱是對偶性的一個重要例子。
它就像一面窗，讓我們窺見 Calabi-Yau 空間的隱秘。利用它，我們確定了給定階數的有理曲線在五次面 (一個 Calabi-Yau 空間) 的總數，這是一個非常困難的問題。

這問題稱為 Schubert 問題。它源於十九世紀，德國數學家 Hermann Schubert 首先証明，在五次面上共有 2,875 條一階有理曲線。到了 1986 年，Sheldon Katz 証明了有 609,250 條二階曲線。1989 年前後，兩位挪威數學家 Geir Ellingsrud 和 Stein Stromme 利用代數幾何的技巧，一下子找到了 2,638,549,425 條三階曲線。

可是另一方面，以 Candelas 為首的一組物理學家，卻利用弦論找到 317,206,375 條曲線。他們在尋找的過程中，用了一條並非由數學推導出來的適用於任意階數曲線的公式。這公式的真確與否，還有待數學家驗証。

1990 年 1 月，在 Isadore Singer 的敦促下，我組織了弦學家和數學家首次的主要會議。大會在 Berkeley 的數理科學研究所舉行。會議上擁 Ellingsrud-Stromme 和擁 Candelas 團隊的人分成兩派，壁壘分明，各不相讓。這局面維持了幾個月，直到數學家在他們的編碼程式中發現錯誤，經修正後，結果竟與物理學家找到的數目完全吻合。經此一役，數學家對弦學家深刻的洞察力，不由得肅然起敬。

這一幕還說明了鏡象對稱自有其深厚的數學基礎。人們花了好幾年，到了1990中後期，鏡象對稱的嚴格數學証明，包括 Candelas 等人的公式，才由 Givental 和 Lian-Liu-Yau 各自獨立地完成。

V.　結語

話說回來，我們必須緊記，弦「論」畢竟是一套理論而已，它還未給實驗所實証。事實上，有關的實驗還沒有設計出來。弦論是否真的與原來設想的那樣描述自然，還是言之過早。

如果要給弦論打分的話，從好的方面來說，弦論啟發了某些極之精妙而有力的數學理論，從中獲得的數學式子已經有了嚴格的証明，弦論的對錯與否，都不能改變其真確性。弦論縱使還沒有為實驗所証實，它始終是現存的唯一能夠统一各種自然力的完整理論，而且它非常漂亮。試圖统一各種自然力的嘗試，竟然導至不同數學領域的融合，這是從來沒有想過的。

現在要作總結還不是時候，過去二千年間，幾何學屢經更替，最終形成今天的模樣。而每次重要的轉變，都基於人類對大自然的嶄新了解，這應當歸功於物理學的最新進展。我們將親眼看到廿一世紀的重要發展，即量子幾何的面世，這門幾何把細小的量子物理和大範圍的廣義相對論結合起來。

　　抽象的數學為何能夠揭露大自然如許訊息，實在不可思議，令人驚歎不已，《內空間的形狀》一書的主旨乃在於此。不僅如此，我們還希望透過本書，使讀者知道數學家是如何進行研究的。他們不必是奇奇怪怪的人，就像在電影《心靈捕手》(Good Will Hunting) 中的清潔工般，一面在打掃地板，另一面卻破解了懸空百年的數學難題。傑出的數學家也不必如另一部電影和小說描述的那樣，是個精神異常、行為古怪的人。

數學家和做實驗的學者同樣研究自然，但他們採用的觀點不同，前者更為抽象。然而，無論數學家或物理學家，他們的工作都以大自然的真和美為依歸。數學和物理互動時迸發的火花，重要的想法如何相互滲透，偉大的新學說如何誕生，如此種種，作者都會在書中娓娓道來。

就弦論而言，我們看到幾何和物理如何走在一起，催生了美妙的數學、精深的物理。這些數學是如此的美妙，影響了不同的領域，使人們相信它在物理中必有用武之地。

可以肯定的是，故事還會繼續下去。本人能在其中擔當一角色，與有榮焉。今後並將傾盡心血，繼續努力。

謝 謝 ！