數的破碎型

台北市立第一女子高級中學 顏廷聿
指導老師：楊宗穎

Abstract

Given natural numbers n, k, d, M. A partition of n is a set of natural numbers whose sum is n. A k–partition is a (k,d)–partition if the difference of any two elements is no less than d. Denote the number of (k,d)–partitions of n by $p(n,k,d)$. A partition is a $[k,M]$–partition if the maximum of its elements is no greater than M. Denote the number of $[k,M]$–partitions of n by $P[n,k,M]$. In this work we investigate those two families of partitions. Our results include the recurrence formulae, relations with ordinary partitions, symmetry and unimodality.

中文摘要

給定自然數 n, k, d, M，若 n 可以表示爲一組自然數的總和，則 n 的一個「分割」即爲該組自然數所成的集合。若一組 k–分割內的任意兩個元素差距皆至少 d，則稱此 k–分割爲 n 的 (k,d)–分割，並將自然數 n 所有 (k,d)–分割數量以符號記爲 $p(n,k,d)$。若一組 k–分割內的最大元素數值皆不大於 M，則稱此 k–分割爲 n 的 $[k,M]$–分割，並將自然數 n 所有 $[k,M]$–分割數量以符號記爲 $P[n,k,M]$。本文研究這兩種分割，得到的結果包括遞迴關係式，並說明 $p(n,k,d)$ 與一般自然數分割的關係，和證明 $P[n,k,M]$ 的對稱性與當 $n=3$ 時，$P[n,3,M]$ 的單峰現象。

1 簡介

1.1 研究動機

在高中數學課程中，在「不允許空箱」的條件下，「 n 顆相同球」分裝到 k 個相同箱子的方法數即爲**整數無序分拆問題**，意即將自然數 n 表示成 k 個自然數總和的方法數，記爲 $p(n,k)$。而在允許空箱的條件下，將 n 顆相同球分裝到 n 個相同箱子的方法數爲**數的分拆問題**，記爲 $p(n)$，稱爲 n **的分割數**。

對於一般自然數 n 的分割數，可從中建立遞迴關係式來幫助我們求得分割數。我好奇的是，若對元素做一些限制是否一樣有類似的結果。因此我著手開始研究在元素的距離上做限制（稱爲 (k,d)–分割）；或在元素的大小上做限制（稱爲 $[k,M]$–分割），試圖建立遞迴關係式並刻畫出一般通式，並探討與其它分割數的關連性。

1.2 研究目的

給定一個自然數 n，令集合 $S=\{s_1,s_2,...,s_k\}$ 爲自然數 $\mathbb{N}$ 的 k 元子集合（集合內元素可重複），若 $\sum_{i=1}^{k} s_i = n$，則稱集合 S 爲 n 的一個 k–分割。

若 S 滿足任意兩數的差距皆不小於非負整數 d（即對任意相異 $i,j \in \{1,2,...,k\}$，$|s_i - s_j| \geq d$ 恆成立），則 S 稱爲 n 的一個 (k,d)–分割。若 $S_{n,k,d}$ 爲所有 n 的 (k,d)–分割所形成的集合，則令 $p(n,k,d) = |S_{n,k,d}|$。

若 S 最大元素不大於自然數 M（即 $\max\{s_1,s_2,...,s_k\} \leq M$ ），則稱 S 爲 n 的一個$[k,M]$–分割。若 $S'_{n,k,M}$ 爲所有 n 的 $[k,M]$–分割所形成的集合，則令 $P[n,k,M] = |S'_{n,k,M}|$。

我們的研究目的如下：

1. 建立 $p(n,3,1)$、$p(n,4,1)$ 與 $p(n,3,2)$ 的一般通式；
2. 建立 $p(n,k,d)$ 的遞迴關係式；
3. 建立 (k,d)–分割 與 k–分割的關係；
4. 建立 $P[n,k,M]$ 的遞迴關係式；
5. 在固定 k,M 的情況下，探討 $P[n,k,M]$ 的對稱性與 $P[n,3,M]$ 的單峰現象。

1.3 基本概念、名詞解釋與先備知識

首先介紹一些有關自然數分割的基本概念、名詞以及符號的定義。特別地，有關集合內的元素，我們允許集合符號內可有重複的元素。

1. 自然數分割

   給定一個自然數 n ， 若 n 可表示為一組自然數的總和，則該組自然數所成的集合稱為 n 的一個**分割**。例如：考慮 $n=4$，則集合 $\{1,1,1,1\}$、$\{1,1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,2\}$ 與 $\{4\}$ 皆為自然數 4 的分割。令 S_n 為自然數 n 所有分割所形成的集合。

分割數：給定自然數 n，定義 $p(n)=|S_n|$，稱為 n 的**分割數**。

例如：當 $n=1$，顯然可知 $p(1)=1$。
因為 $2=1+1$，故 $p(2)=2$。
因為 $3=1+1+1=1+2$，故 $p(3)=3$ 。

隨著自然數 n 越大，則分割數 $p(n)$ 將快速增加。由已知的文獻中可知 $p(100)=190569292$，然而當 $n=1000$ 時，$p(1000)$ 高達 32位數。

2. k–**分割**

   若 n 可分割為 k 個自然數的總和，稱為 n 的一個 k–分割。

k–**分割數**： 令 $S_{n,k}$ 為 n 所有 k–分割形成的集合，定義

$$p(n,k)=|S_{n,k}|,$$

稱為自然數 n 的 k–**分割數**。意即自然數 n 共有 $p(n,k)$ 種不同的 k–分割方法。

例如：因為 $6=1+5=2+4=3+3$，故 $p(6,2)=3$。
又因 $6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$，故 $p(6,3)=3$。

在參考文獻中可得知，對於 n 的 k–分割數 $p(n,k)$ 已有性質與遞迴關係如下：

$p(n,k)$ **的遞迴關係：**

給定自然數 n,k，其中 $n\ge k$，則 n 的 k–分割數 $p(n,k)$ 具有下列關係：

(a) $p(n,1)=1$、$p(n,n-1)=1$、$p(n,n)=1$、$p(n,2)=\left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor$

(b) $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$

(c) $p(n,k) = p(n-k,1) + p(n-k,2) + ... + p(n-k,k) = \sum_{i=1}^{k} p(n-k,i)$

(d) $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$

3. (k,d)–**分割**　　若一個 k–分割的任意兩個元素的差距皆至少爲自然數 d，則稱此 k–分割爲 (k,d)–分割。

(k,d)–**分割數：**令 $S_{n,k,d}$ 爲 n 所有 (k,d)–分割所形成的集合，定義

$$p(n,k,d) = |S_{n,k,d}|，$$

稱爲 n 的 (k,d)–**分割數**。意即自然數 n 共有 $p(n,k,d)$ 種不同的 (k,d)–分割方法。**特別地，當** $d = 0$ **時，定義** $p(n,k,0) = p(n,k)$。

例如：

考慮自然數 $n = 12$，$k = 3$，$d = 1$，我們利用表格列舉自然數 12 所有的 $(3,1)$–分割 $\{s_1, s_2, s_3\}$。

s_1	1	1	1	1	2	2	3
s_2	2	3	4	5	3	4	4
s_3	9	8	7	6	7	6	5

可知 $p(12,3,1) = 7$。

給定自然數 n,k,d，所有 k–分割所形成的集合 $S_{n,k}$ 必爲 S_n 的子集合，而所有 (k,d)–分割所形成的集合 $S_{n,k,d}$ 必爲 $S_{n,k}$ 的子集合，故 $p(n,k,d) \le p(n,k) \le p(n)$。一般而言 $p(n,k,d)$ 與 $p(n)$ 的差距可以很大。事實上，在固定 n,k 的情況下，隨著差距 d 的增加，$p(n,k,d)$ 將會快速的下降。因此我將進一步討論 $p(n,k,d)$ 的性質，試圖從中找到一些特殊的數學結構。建立一些特定遞迴關係則是我的首要目標，此外試圖尋求 $p(n,k,d)$ 一般通式的可能性。

2　研究內容

2.1　簡單例子的啓蒙

爲了觀察自然數 n 的 (k,d)–分割數，我著手於數值較小的 k,d 進行探討，觀察其規律與模式。

2.1.1　$p(n,3,1)$

首先考慮 $k = 3, d = 1$ 的情形。爲了討論自然數 n 的 $(3,1)$–分割數，我將問題的情境視爲「將 n 顆相同的球，放置 3 個相同的箱子中，在不允許有空箱的情況下，使得每個箱子內的球數皆不相同的方法數」。將三個箱子依照球的數量，由小到大將箱子依序記爲 A_1, A_2, A_3，並將 A_i 箱內的球數記爲 s_i，其中 $i \in \{1,2,3\}$，意即 $s_1 < s_2 < s_3$。

假設 $n = 15$。因爲 $s_1 < s_2 < s_3$ 且 $s_1 + s_2 + s_3 = 15$，故 $s_1 < 5$。以下將依序討論 $s_1 = 1,2,3,4$ 的情形。

當 $s_1=1$ 時，爲了使 $s_1<s_2<s_3$，先在 A_1,A_2,A_3 箱內依序放入 $1,1,2$ 顆球，然後將剩餘的 11 顆球分裝到 A_2 與 A_3 中，其中要求 A_2 所新增的球數不大於 A_3 新增的球數。我將結果以下列表格呈現：

A_1	1	1	1	1	1
A_2	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5
A_3	2+10	2+9	2+8	2+7	2+6

可知將剩餘 11 顆球分裝到 A_2 與 A_3 中，滿足條件的方法數恰爲 5 種，換句話說，將 11 分拆成兩個數字共有 11 種情形，可依序將球的數量根據大小關係新增至 A_2 與 A_3 中。意即剩餘的 11 顆球分裝到 A_2 與 A_3 中共有 $p(11,2)$ 種情形。根據 $p(11,2)$ 的性質即可知 $p(11,2)=\left\lfloor\frac{11}{2}\right\rfloor$。

當 $s_1=2$ 時，爲了使 $s_1<s_2<s_3$，先在 A_1,A_2,A_3 箱內依序放入 $2,2,3$ 顆球，然後將剩餘的 8 顆球分裝到 A_2 與 A_3 中，其中要求 A_2 所新增的球數不大於 A_3 新增的球數。計算後知共有 $p(8,2)$ 種情形。

當 $s_1=3$ 時，計算後知共有 $p(5,2)$ 種情形；而當 $s_1=4$ 時，計算後知共有 $p(2,2)$ 種情形。

由上述討論可知，將 15 顆相同的球分裝到 3 個相同的箱子，使其沒有空箱，箱內的數量皆相異共有 $5+4+2+1=12$ 種不同的情形。意即，自然數 15 的 $(3,1)$–分割數 $p(15,3,1)$ 有下列關係式：

$$p(15,3,1)=p(11,2)+p(8,2)+p(5,2)+p(2,2)=\left\lfloor\frac{11}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{8}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{2}\right\rfloor=12$$

將上述的方法進行推廣，可延伸至一般自然數 n 的 $(3,1)$–分割數 $p(n,3,1)$。故我們有以下引理：

引理 1.
對任意自然數 $n\geq 6$， $p(n,3,1)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-3}{3}\rfloor}p(n-3i-1,2)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-3}{3}\rfloor}\left\lfloor\frac{n-3i-1}{2}\right\rfloor$。

證明.
考慮將 n 顆相同的球放至 3 個相同的箱子，在不允許有空箱的情況下，三個箱子依照球的數量，由小到大將箱子依序記爲 A_1,A_2,A_3，並將數量依序記爲 s_1,s_2,s_3。換句話說，以下我用序對 $\{s_1,s_2,s_3\}$ 表示自然數 n 的 $(3,1)$–分割，要求 $s_1<s_2<s_3$。由於 s_1,s_2,s_3 皆爲自然數，故 $1+s_1\leq s_2$ 且 $2+s_1\leq s_3$，因此 $n=s_1+s_2+s_3\geq s_1+(1+s_1)+(2+s_1)=3s_1+3$，意即 $s_1\leq\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor$。以下針對 s_1 的值進行分類討論。

當 $s_1=1$ 時，爲了使得 $s_1<s_2<s_3$，先在 A_1,A_2,A_3 箱內依序放入 $1,1,2$ 顆球，然後再將剩餘的 $n-4$ 顆球分裝到 A_2 與 A_3 中，其中要求 A_2 所新增的球數 t_2 不大於 A_3 新增的球數 t_3。因爲 $t_2+t_3=n-4$，且 $t_2\leq t_3$，所以 $\{t_2,t_3\}$ 爲自然數 $n-4$ 的 2–分割，可知 $\{1,1+t_2,2+t_3\}$ 必爲自然數 n 的 $(3,1)$–分割。因爲 $n-4$ 顆球分裝到 A_2 與 A_3 的方法數等同於自然數 $n-4$ 的 2–分割數 $p(n-4,2)$，所以當 $s_1=1$ 時，自然數 n 的 $(3,1)$–分割共有 $p(n-4,2)$ 種不同的情形。

考慮一般情形，當 $s_1=i\leq\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor$ 時，爲了使 $s_1<s_2<s_3$，先在 A_1,A_2,A_3 箱內依序放入 $i,i,i+1$ 顆球，再將剩餘的 $n-3i-1$ 顆球分裝到 A_2 與 A_3 中，要求 A_2 所新增的球數 t_2 不大於 A_3 新增的球數 t_3。因爲 $t_2+t_3=n-3i-1$，且 $t_2\leq t_3$，$\{t_2,t_3\}$ 爲自然數 $n-3i-1$ 的 2–分割，可知 $\{i,i+t_2,i+1+t_3\}$ 必爲自然數 n 的 $(3,1)$–分割。因爲 $n-3i-1$ 顆球分裝到

A_2 與 A_3 的方法數等同於自然數 $n-3i-1$ 的 2–分割數 $p(n-3i-1,2)$，所以當 $s_1=i$ 時，自然數 n 的 $(3,1)$–分割共有 $p(n-3i-1,2)$ 種不同的情形。

根據上述分類討論可知，自然數 n 的 $(3,1)$–分割數 $p(n,3,1)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-3}{3}\rfloor}p(n-3i-1,2)$。因爲對任意自然數 n，$p(n,2)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 恆成立，所以

$$p(n,3,1)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-3}{3}\rfloor}p(n-3i-1,2)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-3}{3}\rfloor}\left\lfloor\frac{n-3i-1}{2}\right\rfloor。$$

□

若 $\{s_1,s_2,...,s_k\}$ 爲自然數 n 的 (k,d)–分割，則集合 $\{s_1,s_2,...,s_k\}$ 中的最小元素必有一定的範圍。以下透過簡單的計算，刻畫 (k,d)–分割中最小元素的可能值。

引理 2. 若自然數 n 有 (k,d)–分割 $\{s_1,s_2,...,s_k\}$，令 s_1爲 $\{s_1,s_2,...,s_k\}$ 中的最小元素，則

1. $n\geq k+\dfrac{dk(k-1)}{2}$
2. $s_1\leq\left\lfloor\dfrac{n}{k}-\dfrac{d(k-1)}{2}\right\rfloor$

證明. （n 與最小元素 s_1 的範圍）

考慮將 n 顆相同的球分散放至 k 個相同的箱子，在不允許有空箱的情況下， k 個箱子依照球的數量，由小到大將箱子依序記爲 $A_1,A_2,...,A_k$，並將數量依序記爲 $s_1,s_2,...,s_k$。換句話說，以下我們用集合 $\{s_1,s_2,...,s_k\}$ 表示自然數 n 的 (k,d)–分割，其中要求 $s_1<s_2<...<s_k$。由於 $s_1,s_2,...,s_k$ 皆爲自然數，故 $d+s_1\leq s_2$ 且對任意 $i\in\{1,2,...,k\}$，$(i-1)d+s_1\leq s_i$ 恆成立。

1. 考慮 $s_1,s_2,...,s_k$ 的範圍，$s_1\geq 1$ 且對任意 $i\in\{1,2,...,k\}$，$(i-1)d+s_1\leq s_i$ 恆成立，所以

$$n=\sum_{i=1}^{k}s_i\geq\sum_{i=1}^{k}((i-1)d+s_1)=\sum_{i=1}^{k}s_1+d\sum_{i=1}^{k}(i-1)=ks_1+\frac{dk(k-1)}{2}\geq k+\frac{dk(k-1)}{2}。$$

2. 因爲 $n=\sum_{i=1}^{k}s_i\geq\sum_{i=1}^{k}((i-1)d+s_1)=d\sum_{i=1}^{k}(i-1)+ks_1=\dfrac{dk(k-1)}{2}+ks_1$，

   所以 $s_1\leq\dfrac{n}{k}-\dfrac{d(k-1)}{2}$。 由於 s_1 爲自然數，故 $s_1\leq\left\lfloor\dfrac{n}{k}-\dfrac{d(k-1)}{2}\right\rfloor$。

□

2.1.2 $p(n,4,1)$

考慮自然數 n 的 $(4,1)$–分割數，將問題的情境視爲「將 n 顆相同的球，放置 4 個相同的箱子中，在不允許有空箱的情況下，使得每個箱子內的球數皆不相同的方法數」。將四個箱子依照球的數量，由小到大將箱子依序記爲 A_1,A_2,A_3,A_4，並將 A_i 箱內的球數記爲 s_i，其中 $i\in\{1,2,3,4\}$，意即 $s_1<s_2<s_3<s_4$ 且 $s_1+s_2+s_3+s_4=n$。以下對於 s_1 進行分類，探討 $p(n,4,1)$ 的值，並建立 $(4,1)$-分割數與 $(3,1)$-分割數的關係，因此有以下引理：

引理 3. 令 s_1 爲自然數 n 的 $(4,1)$-分割 $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 中的最小元素。

1. 若 $s_1=j$，則自然數 n 的 $(4,1)$-分割 $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 共有 $p(n-4j,3,1)$ 種情形。

2. $p(n,4,1)=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n-6}{4}\rfloor} p(n-4j,3,1)=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n-6}{4}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-4j-3}{3}\rfloor}\left\lfloor\frac{n-4j-3i-1}{2}\right\rfloor$

證明. （當 $d=1$ 時，降 k）

1. 考慮將 n 顆相同的球分散放至 4 個相同的箱子，在不允許有空箱的情況下，4 個箱子依照球的數量，由小到大將箱子依序記爲 A_1,A_2,A_3,A_4，並將數量依序記爲 s_1,s_2,s_3,s_4。

   當 $s_1=j$ 時，爲了使得 $s_1<s_2<s_3<s_4$，先在 A_1,A_2,A_3,A_4 箱內各放入 j 顆球，然後再將剩餘的 $(n-4j)$ 顆球分裝到 A_2,A_3,A_4 中，令 A_2,A_3,A_4 所新增的球數分別爲自然數 t_2,t_3,t_4，並要求 $t_2+t_3+t_4=n-4j$ 且 $t_2<t_3<t_4$。這意謂著集合 $\{t_2,t_3,t_4\}$ 爲自然數 $(n-4j)$ 的一個 $(3,1)$-分割。令 $s_2=j+t_2$、$s_3=j+t_3$、$s_4=j+t_4$，可知 $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 爲自然數 n 的一個 $(4,1)$-分割。換句話說，當 $s_1=j$ 時，自然數 n 的 $(4,1)$-分割數等於 $(n-4j)$ 的 $(3,1)$-分割數。因此當 $s_1=j$ 時，自然數 n 的 $(4,1)$-分割 $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 共有 $p(n-4j,3,1)$ 種情形。

2. 考慮自然數 n 的一個 $(4,1)$-分割 $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$，根據 **引理** 2 可知 $s_1\le\left\lfloor\frac{n}{4}-\frac{(4-1)}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-6}{4}\right\rfloor$。從 1. 的結論可知，當 $s_1=j$ 時，自然數 n 的 $(4,1)$-分割 $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 共有 $p(n-4j,3,1)$ 種情形，因此考慮所有 s_1 的可能性，可知 $p(n,4,1)=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n-6}{4}\rfloor}p(n-4j,3,1)$。

   根據 **引理** 1 的結果可知

$$p(n-4j,3,1)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-4j-3}{3}\rfloor}p(n-4j-3i-1,2)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-4j-3}{3}\rfloor}\left\lfloor\frac{n-4j-3i-1}{2}\right\rfloor。$$

   故自然數 n 的 $(4,1)$-分割數

$$p(n,4,1)=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n-6}{4}\rfloor}p(n-4j,3,1)=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n-6}{4}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-4j-3}{3}\rfloor}\left\lfloor\frac{n-4j-3i-1}{2}\right\rfloor。$$

□

2.1.3 $p(n,3,2)$

首先考慮自然數 15 的 $(3,2)$-分割 $\{s_1,s_2,s_3\}$，不失一般性，假設 $s_1<s_2<s_3$，意即 $s_1+s_2+s_3=15$、$2+s_1\le s_2$ 且 $2+s_2\le s_3$。本文之前已得出自然數 15 的 $(3,2)$-分割數 $p(15,3,2)=7$，並羅列出所有的 $(3,2)$-分割如下：

s_1	1	1	1	1	2	2	3
s_2	3	4	5	6	4	5	5
s_3	11	10	9	8	9	8	7

t_1	1	1	1	1	2	2	3
t_2	2	3	4	5	3	4	4
t_3	9	8	7	6	7	6	5

考慮集合 $\{t_1,t_2,t_3\}$，其中定義 $t_1=s_1$、$t_2=s_2-1$、$t_3=s_3-2$，並將集合 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 羅列如上表。因爲 $t_1+t_2+t_3=s_1+(s_2-1)+(s_3-2)=15-3=12$、$1+t_1\le t_2$ 且 $1+t_2\le t_3$，可知集合 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 爲自然數 12 的一個 $(3,1)$-分割。進一步觀察可知上表即爲自然數 12 所有的 $(3,1)$-分割，然而上述兩個表格具有特定的對應關係，由此可知 $p(15,3,2)=7=p(12,3,1)$。這意味著 $(3,2)$-分割與 $(3,1)$-分割具有特定的關係，我們將此關係式以下面引理呈現：

引理 4. 任意自然數 $n\ge 9$：

1. $\{s_1,s_2,s_3\}$ 爲 n 的 $(3,2)$-分割 $\Leftrightarrow$ $\{s_1,s_2-1,s_3-2\}$ 爲 $(n-3)$ 的 $(3,1)$-分割。
2. $p(n,3,2)=p(n-3,3,1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-6}{3}\rfloor} p(n-4-3i,2)=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-6}{3}\rfloor}\left\lfloor\frac{n-4-3i}{2}\right\rfloor$

證明. （當 $k=3$ 時，降 d）

令 $\{s_1,s_2,s_3\}$ 爲自然數 n 的 $(3,2)$-分割，其中 $s_1<s_2<s_3$，所以 $s_1+s_2+s_3=n$、$2+s_1\le s_2$ 且 $2+s_2\le s_3$。定義 $t_1=s_1$、$t_2=s_2-1$、$t_3=s_3-2$，則 $t_1+t_2+t_3=s_1+(s_2-1)+(s_3-2)=n-3$、$1+t_1\le t_2$ 且 $1+t_2\le t_3$。可知集合 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 爲自然數 $(n-3)$ 的一個 $(3,1)$-分割。故 $p(n,3,2)\le p(n-3,3,1)$。

另一方面，令 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 爲自然數 $(n-3)$ 的 $(3,1)$-分割，其中 $t_1<t_2<t_3$，所以 $t_1+t_2+t_3=n-3$、$1+t_1\le t_2$ 且 $1+t_2\le t_3$。定義 $s_1=t_1$、$s_2=t_2+1$、$s_3=t_3+2$，則 $s_1+s_2+s_3=t_1+(t_2+1)+(t_3+2)=n$、$2+s_1\le s_2$ 且 $2+s_2\le s_3$。可知集合 $\{s_1,s_2,s_3\}$ 爲自然數 n 的一個 $(3,2)$-分割。故 $p(n,3,2)\ge p(n-3,3,1)$。

綜合上述討論可知，$\{s_1,s_2,s_3\}$ 爲 n 的 $(3,2)$-分割 等價於 $\{s_1,s_2-1,s_3-2\}$ 爲 $(n-3)$ 的 $(3,1)$-分割。

因此對任意自然數 $n\ge 9$，$p(n,3,2)=p(n-3,3,1)$ 恆成立。 □

2.2 遞迴關係的建立

對於較小的 k 與 d，本文已討論了一些簡單的關係式，**引理** 1 告訴我們當 $k=3$、$d=1$ 時，自然數 n 的 (k,d)-分割數可被刻畫。從 **引理** 3 可得知，自然數 n 的 $(4,1)$-分割數可透過一系列的 $(3,1)$-分割數來計算。然而 **引理** 4 則說明 $(3,2)$-分割與 $(3,1)$-分割的對應關係。以上引理皆顯示出 (k,d)-分割、$(k-1,d)$-分割與 $(k,d-1)$-分割必然存在特定的關係。對於自然數 n 的 (k,d)-分割數 $p(n,k,d)$，以下我們將試著建立出能讓參數 n,k,d 降低的遞迴關係式。

2.2.1 (k,d)-分割 $\to$ $(k-1,d)$-分割

引理 3 說明了 $(4,1)$-分割數可由一系列的 $(3,1)$-分割數來整合計算，透過 **引理** 3 的想法，我們可以將其推廣，從中建立 (k,d)-分割數與 $(k-1,d)$-分割數的關係式，故有以下定理：

定理 1. 給定自然數 n,k,d，其中 $n\ge k+\dfrac{dk(k-1)}{2}$，則

$$p(n,k,d)=\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{k}-\frac{d(k-1)}{2}\right\rfloor} p(n-kj-(k-1)(d-1),k-1,d)$$

證明. （當 d 固定時，降 k）

考慮將 n 顆相同的球分散放至 k 個相同的箱子，在不允許有空箱的情況下，k 個箱子依照球的數量，由小到大將箱子依序記爲 $A_1, A_2, ..., A_k$，並將數量依序記爲 $s_1, s_2, \cdots, s_k$。

當 $s_1 = j$ 時，爲了使得 $s_1 < s_2 < \cdots < s_{k-1} < s_k$，先在$A_1$ 箱內放入 j 顆球，此外在 $A_2, A_3, \cdots, A_k$ 箱內各放入 $j + (d-1)$ 顆球，然後再將剩餘的 $(n - kj - (k-1)(d-1))$ 顆球分裝到 $A_2, A_3, \cdots, A_k$ 中，令 $A_2, A_3, \cdots, A_k$ 所新增的球數分別爲自然數 $t_2, t_3, \cdots, t_k$，並要求 $\sum_{i=2}^{k} t_i = (n - kj - (k-1)(d-1))$ 且 $\forall i \in \{2, 3, \cdots, k-1\}$，皆滿足 $t_{i+1} - t_i \geq d$。這意謂著集合 $\{t_2, t_3, \cdots, t_k\}$ 爲自然數 $(n - kj - (k-1)(d-1))$ 的一個 $(k-1, d)$-分割。對任意 $i \in \{2, 3, \cdots, k\}$，令 $s_i = j + (d-1) + t_i$，則可知 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 即爲自然數 n 的一個 (k, d)-分割。換句話說，當 $s_1 = j$ 時，自然數 n 的 (k, d)-分割數等於 $(n - kj - (k-1)(d-1))$ 的 $(k-1, d)$-分割數。

因此當 $s_1 = j$ 時，自然數 n 的 (k, d)-分割 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 共有 $p(n - kj - (k-1)(d-1), k-1, d)$ 種情形。根據 **引理** 2 可知 $s_1 = j \leq \left\lfloor \frac{n}{k} - \frac{d(k-1)}{2} \right\rfloor$。因此對於自然數 n 的所有 (k, d)–分割 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ 中，考慮所有 s_1 的可能性，可知

$p(n, k, d) = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} - \frac{d(k-1)}{2} \right\rfloor} p(n - kj - (k-1)(d-1), k-1, d)$。 □

根據上述 **定理** 1，特殊情況當 $d = 1$ 時，自然數 n 的 $(k, 1)$-分割數有以下結果：

結果 1. 給定自然數 n, k，其中 $n \geq k + \frac{k(k-1)}{2}$，則

$$p(n, k, 1) = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} - \frac{(k-1)}{2} \right\rfloor} p(n - kj, k-1, 1)。$$

2.2.2 (k, d)-分割 $\rightarrow$ $(k, d-1)$-分割

引理 4 的結果呈現了 $(3, 2)$-分割 與$(3, 1)$-分割的對應關係，說明了 $p(n, 3, 2) = p(n-3, 3, 1)$。以下我們將其結果推廣，從中建立 (k, d)-分割與 $(k, d-1)$-分割的關係。若進一步推演其遞迴關係，則可得知 (k, d)-分割與 $(k, 1)$-分割的關係式，我們將結果以下列定理呈現：

定理 2. 給定自然數 n, k, d，其中 $n \geq k + \frac{dk(k-1)}{2}$，則

$$p(n, k, d) = p\left(n - \frac{k(k-1)}{2}, k, d-1\right)。$$

證明. （當 k 固定時，降 d）

對任意 $i \in \{1, 2, 3, \cdots, k\}$，定義 $t_i = s_i - (i-1)$。

令 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 n 的 (k, d)-分割，其中 $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$。可知 $\sum_{i=1}^{k} s_i = n$ 且

$\forall i \in \{1,2,\cdots,k-1\}$，皆滿足 $s_{i+1} - s_i \geq d$。因爲

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{k} (s_i - (i-1)) = \sum_{i=1}^{k} s_i - \sum_{i=1}^{k} (i-1) = n - \frac{k(k-1)}{2}，$$

且 $\forall i \in \{1,2,3,\cdots,k\}$，$t_{i+1} - t_i = (s_{i+1} - i) - (s_i - (i-1)) = s_{i+1} - s_i - 1 \geq d - 1$ 恆成立，可知集合 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ 爲自然數 $n - \frac{k(k-1)}{2}$ 的一個 $(k, d-1)$-分割。

此外，若 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ 爲 $n - \frac{k(k-1)}{2}$ 的 $(k, d-1)$-分割，其中 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$。因爲 $\sum_{i=1}^{k} t_i = n - \frac{k(k-1)}{2}$，且 $\forall i \in \{1,2,3,\cdots,k\}$，皆滿足 $t_{i+1} - t_i \geq d - 1$，所以

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} (t_i + (i-1)) = \sum_{i=1}^{k} t_i + \sum_{i=1}^{k} (i-1) = n，$$

且 $\forall i \in \{1,2,3,\cdots,k\}$，$s_{i+1} - s_i = (t_{i+1} + i) - (t_i + (i-1)) = t_{i+1} - t_i + 1 \geq d$ 恆成立。可知集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 n 的一個 (k, d)-分割。

綜合上述討論可知，集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲 n 的 (k, d)-分割等價於集合 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ 爲 $n - \frac{k(k-1)}{2}$ 的 $(k, d-1)$-分割，其中 $t_i = s_i - (i-1)$，$\forall i \in \{1,2,3,\cdots,k\}$。因此對任意自然數 $n \geq k + \frac{dk(k-1)}{2}$，$p(n,k,d) = p\left(n - \frac{k(k-1)}{2}, k, d-1\right)$ 恆成立。 □

根據上述 **定理** 2，將定理中的關係式不斷迭代，則可得知 (k, d)-分割數與 $(k, 1)$-分割數的關係，進一步將其轉換爲 k-分割數的問題，故有以下結果：

結果 2. 給定自然數 n, k, d，其中 $n \geq k + \frac{dk(k-1)}{2}$，則

$$p(n,k,d) = p\left(n - \frac{k(k-1)(d-1)}{2}, k, 1\right) = p\left(n - \frac{k(k-1)d}{2}, k\right)。$$

證明.

由 **定理** 2 的結果可知，對於 (k,d)-$p(n,k,d)$，在固定參數 k 的情況下，每當參數 d 下降 1，則參數 n 即可下降 $\frac{k(k-1)}{2}$，意即 $p(n,k,d) = p\left(n - \frac{k(k-1)}{2}, k, d-1\right)$。將此關係式不斷的進行變數迭代後，可知當參數 d 下降 $d-1$，則參數 n 即可下降 $\frac{k(k-1)(d-1)}{2}$。其迭代的過程爲：

$$\begin{aligned}
p(n,k,d) &= p\left(n - \frac{k(k-1)}{2}, k, d-1\right) = p\left(n - \frac{k(k-1)2}{2}, k, d-2\right) \\
&= p\left(n - \frac{k(k-1)4}{2}, k, d-3\right) = \cdots = p\left(n - \frac{k(k-1)i}{2}, k, d-i\right) = \cdots \\
&= p\left(n - \frac{k(k-1)(d-1)}{2}, k, 1\right) = p\left(n - \frac{k(k-1)d}{2}, k, 0\right) = p\left(n - \frac{k(k-1)d}{2}, k\right)。
\end{aligned}$$

由此可知，在固定參數 k 的情況下，
$p(n,k,d) = p\left(n - \frac{k(k-1)(d-1)}{2}, k, 1\right) = p\left(n - \frac{k(k-1)d}{2}, k\right)$ 恆成立。 □

2.3 k–分割最大元素限制

對於一個 k-分割，若要求元素大小必須控制在某個定值 M 以下，我們研究這樣的特殊 k-分割有幾種不同情形。

2.3.1 $[k, M]$–分割

令 M 爲自然數，若自然數 n 的一個 k-分割的最大元素不大於 M，則我們稱此 k-分割爲 n 的一個 $[k, M]$**-分割**。

> $[k, M]$**-分割數：** 令 $S'_{n,k,M}$ 爲自然數 n 所有 $[k, M]$-分割所形成的集合。則定義
>
> $$P[n, k, M] = |S'_{n,k,M}|,$$
>
> 稱爲 n 的 $[k, M]$**-分割數**。意即自然數 n 共有 $P[n, k, M]$ 種不同的 $[k, M]$-分割方法。

例如：

考慮自然數 $n = 10, k = 4, M = 6$，我們利用表格列舉自然數 10 所有 $[4,6]$-分割 $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$，其中要求 $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4$。可知 $P[10, 4, 6] = 8$。

s_1	3	3	4	4	4	5	5	6
s_2	3	3	2	3	4	2	3	2
s_3	2	3	2	2	1	2	1	1
s_4	2	1	2	1	1	1	1	1

若 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 n 的 k-分割，則集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 中的最大元素有一定的範圍。以下透過簡單的計算，刻畫 k-分割中最大元素的可能值，並以下列引理呈現。

> **引理 5.** 若自然數 n 有 k-分割 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$，令 s_1 爲 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 中的最大元素，則：
>
> *1.* $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \leq s_1 \leq n - k + 1$，
>
> *2.* 若 $M < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$，則 $P[n, k, M] = 0$，
>
> *3.* 若 $M \geq n - k + 1$，則 $P[n, k, M] = p(n, k)$。

證明.

1. 令集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 表示自然數 n 的 k-分割，其中要求 s_1爲$\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 中的最大元素。若希望 s_1 越小越好，則需讓 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 內的數值越平均越好。故可知 s_1 的最小可能值爲 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$。另一方面，若希望 s_1 越大越好，則需讓 $\{s_2, \cdots, s_k\}$ 內的數值越小越好。故可知當 $s_2 = s_3 = \cdots = s_k = 1$ 時，則 $s_1 = n - k + 1$ 爲最大可能值。由此可知，當 s_1 爲自然數 n 的 k-分割中最大的數值時，則 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \leq s_1 \leq n - k + 1$ 恆成立。

2. 因爲自然數 n 的 $[k, M]$-分割必爲 k-分割，令此 $[k, M]$- 爲 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$。若 $M < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$，則 $s_1 \leq M < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$。根據 1. 可知最大數值 $s_1 \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$，因此可得矛盾關係

$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \le s_1 < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$。由此可知，若 $M < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$時，則自然數 n 不存在 $[k,M]$-分割，意即 $P[n,k,M] = 0$。

3. 考慮 $M \ge n-k+1$。令 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 n 的 k-分割，其中 s_1 爲 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 中的最大元素。根據 1. 可知 $s_1 \le n-k+1$，因此 $s_1 \le M$，意即 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 n 的 $[k,M]$-分割，故 $P[n,k,M] \ge p(n,k)$。此外，根據定義可知自然數 n 的 $[k,M]$-分割必爲 n 的 k-分割，所以 $P[n,k,M] \le p(n,k)$。由此可知 $P[n,k,M] = p(n,k)$。

□

2.3.2 $P[n,k,M]$ 的遞迴關係

爲了觀察自然數 n 的 $[k,M]$-分割數，我先著手於數值較小的 k, M 進行分類討論，利用表格從中觀察規律與模式。考慮自然數 $n = 10, k = 4, M = 6$，利用表格列舉自然數 10 所有的 $[4,6]$-分割 $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$，其中要求 $s_1 \ge s_2 \ge s_3 \ge s_4$。可知 $P[10,4,6] = 8$。

s_1	3	3	4	4	4	5	5	6
s_2	3	3	2	3	4	2	3	2
s_3	2	3	2	2	1	2	1	1
s_4	2	1	2	1	1	1	1	1

將上述表格第一列刪除後，即爲集合 $\{s_2, s_3, s_4\}$ 的情形，將表格分成四個部分，如下所示：

s_1	3	3
s_2	3	3
s_3	2	3
s_4	2	1

$P[7,3,3]$

s_1	4	4	4
s_2	2	3	4
s_3	2	2	1
s_4	2	1	1

$P[6,3,4]$

s_1	5	5
s_2	2	3
s_3	2	1
s_4	1	1

$P[5,3,5]$

s_1	6
s_2	2
s_3	1
s_4	1

$P[4,3,6]$

觀察可知上述四個表格的行數依序爲 $P[7,3,3] = 2$、$P[6,3,4] = 3$、$P[5,3,5] = 2$、$P[4,3,6] = 1$。由此可知 $P[10,4,6] = 8 = P[7,3,3]+P[6,3,4]+P[5,3,5]+P[4,3,6] = \sum_{i=3}^{6} P[10-i,3,i]$。

由上述範例的分析，說明了 $[4,M]$-分割數可由一系列的 $[3,M']$-分割數來整合計算，透過簡單例子給予的啓示，我們將其推廣至一般性，並建立遞迴關係如下：

定理 3. 給定自然數 n,k,M，其中 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \le M \le n-k+1$，則

$$P[n,k,M] = \sum_{i=\lceil \frac{n}{k} \rceil}^{M} P[n-i,k-1,i]。$$

證明.

令 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 n 的一個 $[k,M]$-分割，意即 $\sum_{i=1}^{k} s_i = n$ 且 $\max\{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \le M$。

不失一般性，令 $s_1 = \max\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$。當 $s_1 = i$ 時，根據 **引理** 5 可知 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \le i \le M$，考慮集合 $\{s_2, \cdots, s_k\}$，因爲 $\sum_{i=2}^{k} s_i = n-s_1 = n-i$，且 $\max\{s_2, \cdots, s_k\} \le s_1 = i$，所以 $\{s_2, \cdots, s_k\}$ 爲自然數 $(n-i)$ 的一個 $[k-1,i]$-分割。

此外，令 $\{t_2, t_3, \cdots, t_k\}$ 爲自然數 $(n-i)$ 的一個 $[k-1, i]$-分割，意即 $\sum_{i=2}^{k} t_i = n - i$ 且 $\max\{t_2, t_3, \cdots, t_k\} \le i$。考慮集合 $\{t_2, t_3, \cdots, t_k\} \cup \{t_1\}$，其中 $t_1 = i$，可知 $\sum_{i=1}^{k} t_i = n$ 且 $\max\{t_1, t_2, \cdots, t_k\} = i \le M$，所以 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ 爲自然數 n 的一個 $[k, M]$-分割。

由上述討論可知，當 $s_1 = i$時，自然數 n 的一個 $[k, M]$- 分割 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ 共有 $P[n-i, k-1, i]$ 種不同情形。考慮所有 $s_1 = i$ 的可能性，因爲 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \le i \le M$，由此可知 $P[n, k, M] = \sum_{i=\lceil \frac{n}{k} \rceil}^{M} P[n-i, k-1, i]$。 □

2.3.3 $P[n, k, M]$ 的對稱性與單峰現象

對於自然數 n 的 $[k, M]$-分割數 $P[n, k, M]$，我們欲在固定 k 與 M 的情況下，探討 $P[n, k, M]$ 的分布情形。以下針對 $k = 3$ 時，將 $3 \le n \le 15$、$1 \le M \le 14$ 的 $[3, M]$-分割數 $P[n, 3, M]$ 以表格呈現：

n \ M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7	0	0	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
8	0	0	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
9	0	0	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7
10	0	0	0	2	4	6	7	8	8	8	8	8	8	8
11	0	0	0	1	4	6	8	9	10	10	10	10	10	10
12	0	0	0	1	3	6	8	10	11	12	12	12	12	12
13	0	0	0	0	2	5	8	10	12	13	14	14	14	14
14	0	0	0	0	1	4	7	10	12	14	15	16	16	16
15	0	0	0	0	1	3	7	10	13	15	17	18	19	19

可以從上面的表格中看出，當 $k = 3$ 且 M 爲固定數值時，隨著 n 增加，可以觀察出 $P[n, 3, M]$ 數值的走勢爲先遞增再遞減，此外亦有對稱現象。

由上述表格可知 $P[14, 3, 7] = 7$，以下將自然數 14 的 7 種 $[3, 7]$-分割 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 以表格呈現：

s_1	7	7	7	6	6	6	5
s_2	6	5	4	6	5	4	5
s_3	1	2	3	2	3	4	4

由上述表格亦可知 $P[10, 3, 7] = 7$，以下將自然數 10 的 7 種 $[3, 7]$-$\{t_1, t_2, t_3\}$ 也以表格呈現。特別地，我們將表格中最左行依順序記爲 t_1, t_2, t_3，其中 $t_1 \le t_2 \le t_3$：

t_1	1	1	1	2	2	2	3
t_2	2	3	4	2	3	4	3
t_3	7	6	5	6	5	4	4

$P[14, 3, 7]$ 與 $P[10, 3, 7]$ 兩個表格有一對一對應關係，若 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 爲自然數 14 的 $[3, 7]$-分割，則 $\{8 - s_1, 8 - s_2, 8 - s_3\}$ 亦爲自然數 10 的 $[3, 7]$-分割，可知 $P[14, 3, 7] = P[10, 3, 7]$。如下表格所示：

$t_1 = 8 - s_1$	$8-7=1$	$8-7=1$	$8-7=1$	$8-6=2$	$8-6=2$	$8-6=2$	$8-5=3$
$t_2 = 8 - s_2$	$8-6=2$	$8-5=3$	$8-4=4$	$8-6=2$	$8-5=3$	$8-4=4$	$8-5=3$
$t_3 = 8 - s_3$	$8-1=7$	$8-2=6$	$8-3=5$	$8-2=6$	$8-3=5$	$8-4=4$	$8-4=4$

將此對稱性推廣到一般 $P[n,k,M]$ 與 $P[k(M+1)-n,k,M]$ 的一對一對應關係，並有以下定理：

定理 4. 給定自然數 n,k,M，則

$$P[n,k,M] = P[k(M+1)-n,k,M]\text{。}$$

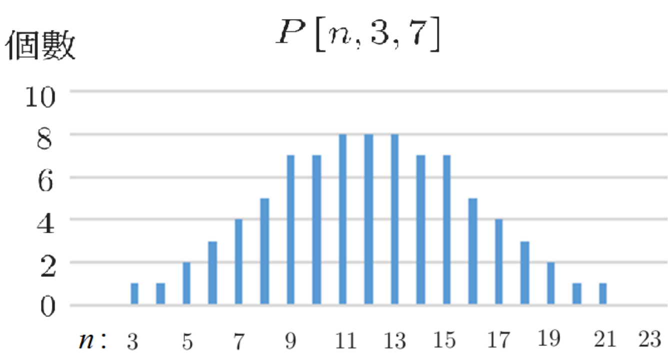
證明.

令 $\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 爲自然數 n 的 $[k,M]$-分割，意即 $\sum_{i=1}^{k} s_i = n$ 且 $\max\{s_1,s_2,\cdots,s_k\} \le M$。不失一般性，假設 $s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_k$。考慮集合 $\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，其中 $t_i = (M+1) - s_i$，$\forall i \in \{1,2,\cdots,k\}$。透過計算可知 $\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{k} (M+1) - s_i = k(M+1) - \sum_{i=1}^{k} s_i = k(M+1) - n$。此外，因爲 $M \ge s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_k \ge 1$，所以 $1 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le M$。由此可知 $\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$ 爲自然數 $(k(M+1)-n)$ 的一個 $[k,M]$-分割，所以 $P[n,k,M] \le P[k(M+1)-n,k,M]$。

令 $\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$ 爲自然數 $(k(M+1)-n)$ 的一個 $[k,M]$-分割，意即 $\sum_{i=1}^{k} t_i = k(M+1)-n$ 且 $\max\{t_1,t_2,\cdots,t_k\} \le M$。不失一般性，假設 $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k$。考慮集合 $\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$，其中 $s_i = (M+1)-t_i$，$\forall i \in \{1,2,\cdots,k\}$。可知 $\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} ((M+1)-t_i) = k(M+1) - \sum_{i=1}^{k} t_i = n$。此外，因爲 $1 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le M$，所以 $M \ge s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_k \ge 1$。由此可知 $\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 爲自然數 n 的一個 $[k,M]$-分割，所以 $P[n,k,M] \ge P[k(M+1)-n,k,M]$。

綜合上述討論可知，$P[n,k,M] = P[k(M+1)-n,k,M]$。 □

在證明完 $P[n,k,M]$ 的對稱性後，考慮 $k=3, M=7$，我們針對不同的自然數 n，將 $P[n,3,7]$ 的情形以長條圖表示如下，可看出除了對稱性之外，隨著自然數 n 的增加，則 $[3,7]$- 具有先遞增後遞減的現象，我們將此分布特徵稱爲單峰現象。以下我們將從觀察 $[3,7]$-分割的情形，進一步說明，在 $k=3$ 並固定 M 的情況下，自然數 n 的 $[3,M]$-分割數 $P[n,3,M]$ 必定具有單峰現象。

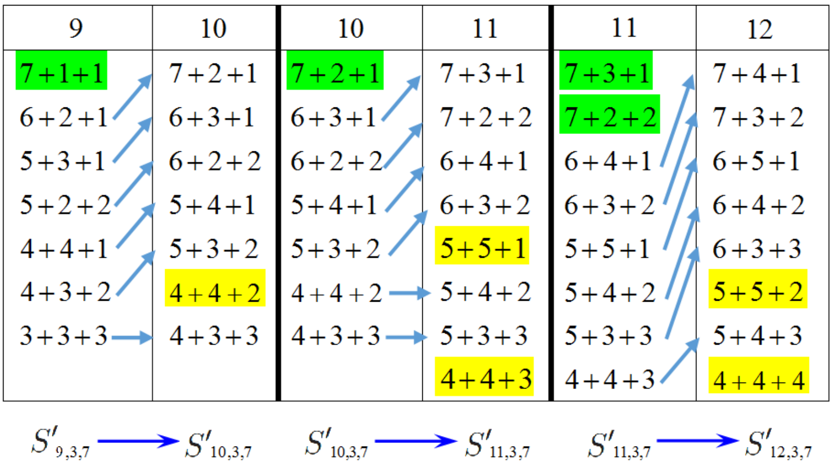


$P[n,3,7]$ 的單峰現象

首先，承上圖對 $P[n,3,7]$ 的觀察，我們列出 n 從 8 增加到 12 時，對應到的所有 $[3,7]$-分割：

n	8	9	10	11	12
	$6+1+1$	$7+1+1$	$7+2+1$	$7+3+1$	$7+4+1$
	$5+2+1$	$6+2+1$	$6+3+1$	$7+2+2$	$7+3+2$
	$4+3+1$	$5+3+1$	$6+2+2$	$6+4+1$	$6+5+1$
	$4+2+2$	$5+2+2$	$5+4+1$	$6+3+2$	$6+4+2$
	$3+3+2$	$4+4+1$	$5+3+2$	$5+5+1$	$6+3+3$
		$4+3+2$	$4+4+2$	$5+4+2$	$5+5+2$
		$3+3+3$	$4+3+3$	$5+3+3$	$5+4+3$
				$4+4+3$	$4+4+4$

不失一般性，以下討論的分割集合皆由大至小排列。考慮 $4 \le n \le 12$，令 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 是 $n-1$的一個$[3,7]$-分割，其中 $s_1 \ge s_2 \ge s_3$。定義 $t_1 = s_1 + 1$、$t_2 = s_2$、$t_3 = s_3$，顯然除了 $s_1 = 7$ 的情形外，$\{t_1, t_2, t_3\}$ 必然是 n 的一個 $[3,7]$-分割，因此我們根據上述 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 與 $\{t_1, t_2, t_3\}$ 的定義建立 $S'_{n-1,3,7}$ 與 $S'_{n,3,7}$ 的特殊對應關係，觀察重點為「**$S'_{n-1,3,7}$ 中無法以上述方式對應至 $S'_{n,3,7}$ 的 $[3,7]$-分割**」以及「**$S'_{n,3,7}$ 中沒被對應到的 $[3,7]$-分割**」。以 $n = 10, 11, 12$ 為例，製表如下，並以箭頭呈現對應關係：



將 $S'_{n-1,3,7}$ 中無法對應至 $S'_{n,3,7}$ 的 $[3,7]$-分割以綠色標示，並將 $S'_{n,3,7}$ 中沒被對應到的 $[3,7]$- 以黃色標示。觀察 $S'_{n-1,3,7}$ 與 $S'_{n,3,7}$，計算「**$S'_{n,3,7}$ 中黃色標示的數量減掉 $S'_{n-1,3,7}$ 中綠色標示的數量**」，其值恰等於 $P[n,3,7] - P[n-1,3,7]$。舉例來說，觀察 $S'_{10,3,7}$與$S'_{11,3,7}$ 時，由於 $S'_{10,3,7}$ 中有一個綠色標示的 $[3,7]$-分割（$7+2+1$），而 $S'_{11,3,7}$ 中有兩個黃色標示的 $[3,7]$-分割（$5+5+1$、$4+4+3$），因此 $P[11,3,7] - P[10,3,7] = 1$（多兩個少一個），可知 $P[10,3,7] < P[11,3,7]$。

比較 $S'_{n-1,3,7}$ 與 $S'_{n,3,7}$，不難觀察出，在 $S'_{n-1,3,7}$ 中綠色標示的 $[3,7]$-分割 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 必滿足「$s_1 = 7$」（分割內最大元素恰等於最大值限制）；然而在 $S'_{n,3,7}$ 中黃色標示的 $[3,7]$-分割 $\{t_1, t_2, t_3\}$ 必滿足「$t_1 = t_2 \ge t_3$」（分割內最大的兩個數相等）。

考慮一般情形，在 $k = 3$ 並固定 M 的情況下，我將 $S'_{n-1,3,M}$ 中無法對應至 $S'_{n,3,M}$ 的 $[3,M]$-分割（綠色標示）數量記為「g_{n-1}」；將 $S'_{n,3,M}$ 中沒被對應到的 $[3,M]$-分割（黃色標示）數量記為「y_n」。定義如下：

$S'_{n-1,3,M}$ **與** $S'_{n,3,M}$ **的對應**

在 $k=3$ 並固定 M 的情況下，集合內的元素皆從大到小排列：

1. 定義 $G_{n-1}=\{\{s_1,s_2,s_3\}\in S'_{n-1,3,M} | s_1\geq s_2\geq s_3$ 且 $\{s_1+1,s_2,s_3\}\notin S'_{n,3,M}\}$，$g_{n-1}=|G_{n-1}|$。
2. 定義 $Y_n=\{\{t_1,t_2,t_3\}\in S'_{n,3,M} | t_1\geq t_2\geq t_3\ t_1=t_2\geq t_3\}$，$y_n=|Y_n|$。

根據上述的討論，在 $k=3$ 並固定 M 的情況下，對於 g_{n-1} 與 y_n 我們有以下引理：

引理 6. 在 $k=3$ 並固定 M 的情況下，集合內的元素皆從大到小排列：

1. $\{s_1,s_2,s_3\}\in G_{n-1}\Leftrightarrow s_1=M$；
此外 $g_{n-1}=p(n-1-M,2)=\left\lfloor\dfrac{n-1-M}{2}\right\rfloor$。

2. $y_n=\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor$。

3. $P[n,3,M]-P[n-1,3,M]=y_n-g_{n-1}$。

證明.

1. 令 $\{s_1,s_2,s_3\}$ 爲 $S'_{n-1,3,M}$ 中的 $[3,M]$-分割，滿足 $s_1\geq s_2\geq s_3$ 且 $\{s_1+1,s_2,s_3\}\notin S'_{n,3,M}$，則可知 $s_1=M$，反之亦然。考慮 s_2,s_3 的可能性，其個數等於自然數 $(n-1-M)$ 的 2-分割數。根據 2-分割數的結論可知 $p(n-1-M,2)=\left\lfloor\dfrac{n-1-M}{2}\right\rfloor$。故 $g_{n-1}=p(n-1-M,2)=\left\lfloor\dfrac{n-1-M}{2}\right\rfloor$。
2. 令 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 爲$S'_{n,3,M}$ 中的 $[3,M]$-分割，滿足 $t_1=t_2\geq t_3$（該分割內最大的兩個數相等），可知 t_1 的取值範圍決定 y_n 的值。因爲 $t_1+t_2<n$（$\sum_{i=1}^{3}t_i=n$ 且 $t_3\geq 1$），可知 t_1 的最大值是 $\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor$；因爲 $t_1=t_2\geq t_3$，所以 t_1 的最小值是 $\left\lceil\dfrac{n}{3}\right\rceil$。由此可知 y_n 數量爲 $\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lceil\dfrac{n}{3}\right\rceil+1$，又因爲「$\forall n\in\mathbb{N}$，$\left\lceil\dfrac{n}{3}\right\rceil=\left\lfloor\dfrac{n+2}{3}\right\rfloor$ 恆成立」，故 $y_n=\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\dfrac{n+2}{3}\right\rfloor+1=\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor$。
3. 在觀察 y_n 與 g_{n-1} 的數量前，我們先確認集合 $S'_{n,3,M}\backslash Y_n$ 與集合 $S'_{n-1,3,M}\backslash G_{n-1}$ 的數量關係。

   考慮 $\{t_1,t_2,t_3\}\in S'_{n,3,M}$。若 $\{t_1,t_2,t_3\}\notin Y_n$，則 $t_1>t_2\geq t_3$。因爲 $t_1+t_2+t_3=n$ 且 $t_1\leq M$，故 $\{t_1-1,t_2,t_3\}\in S'_{n-1,3,M}$ 且 $\max\{t_1-1,t_2,t_3\}\leq M-1$。根據 1. 的結果，可知 $\{t_1-1,t_2,t_3\}\notin G_{n-1}$。

   考慮 $\{s_1,s_2,s_3\}\in S'_{n-1,3,M}$。若 $\{s_1,s_2,s_3\}\notin G_{n-1}$，則 $M>s_1\geq s_2\geq s_3$。因爲 $s_1+s_2+s_3=n-1$ 且 $s_1<M$，故 $\{s_1+1,s_2,s_3\}\in S'_{n,3,M}$ 且 $s_1+1\neq s_2$。可知 $\{s_1+1,s_2,s_3\}\notin Y_n$。

由上述討論可知集合 $S'_{n,3,M}\backslash Y_n$ 與集合 $S'_{n-1,3,M}\backslash G_{n-1}$有一對一對應關係，所以 $|S'_{n,3,M}\backslash Y_n| = |S'_{n-1,3,M}\backslash G_{n-1}|$。

因爲 $P[n,3,M] = |Y_n|+|S'_{n,3,M}\backslash Y_n|$ 且 $P[n-1,3,M] = |G_{n-1}|+|S'_{n-1,3,M}\backslash G_{n-1}|$，所以 $P[n,3,M] - P[n-1,3,M] = |Y_n| - |G_{n-1}| = y_n - g_{n-1}$。

$\square$

定理 5. 給定自然數 n, M，若 $4 \le n \le \dfrac{3(M+1)}{2}$，則

$$P[n-1,3,M] \le P[n,3,M]。$$

證明.

欲證明 $[3, M]$- 分割數 $P[n,3,M]$ 隨著自然數 n 的增加，其數量具有單峰現象，意謂著必須說明在 $4 \le n \le \dfrac{3(M+1)}{2}$ 時，$P[n,3,M] - P[n-1,3,M] \ge 0$ 恆成立。根據 **引理** 6 中的結論 (c)，可知 $P[n,3,M] - P[n-1,3,M] = y_n - g_{n-1}$。這表示證明單峰現象等價於證明「$y_n - g_{n-1} \ge 0$」。

原命題等價於當 $4 \le n \le \dfrac{3(M+1)}{2}$ 時，證明

$$y_n - g_{n-1} = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1-M}{2} \right\rfloor \ge 0$$

恆成立。 以下我們針對 M 的奇偶性分別討論。

1. 當 M 爲偶數時：

$$\begin{aligned} y_n - g_{n-1} &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1-M}{2} \right\rfloor \\ &= \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1-M}{2} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = \frac{M}{2} - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor。\end{aligned}$$

因爲 $n \le \dfrac{3(M+1)}{2}$ 且 M 爲偶數，所以 $n \le \dfrac{3M+2}{2} \in \mathbb{N}$。

故 $y_n - g_{n-1} = \dfrac{M}{2} - \left\lfloor \dfrac{n-1}{3} \right\rfloor \ge \dfrac{M}{2} - \left\lfloor \dfrac{\frac{3M+2}{2}-1}{3} \right\rfloor = \dfrac{M}{2} - \left\lfloor \dfrac{M}{2} \right\rfloor = \dfrac{M}{2} - \dfrac{M}{2} = 0$。

2. 當 M 爲奇數時，進一步分爲兩類來討論，分別是 $M = 4\ell+1$ 和 $M = 4\ell+3$（$\ell \in \mathbb{N}$）：

   (a) 假設$M = 4\ell+1$。因爲 $n \le \dfrac{3(M+1)}{2} = \dfrac{3(4\ell+1+1)}{2} = 6\ell+3$ 爲一奇數，故

$$\begin{aligned} y_n - g_{n-1} &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1-M}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1-M}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\ell + 1 - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \\ &\ge 2\ell - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \ge 2\ell - \left\lfloor \frac{(6\ell+3)-1}{3} \right\rfloor = 2\ell - \left\lfloor \frac{6\ell+2}{3} \right\rfloor = 2\ell - 2\ell = 0。\end{aligned}$$

(b) 假設$M=4\ell+3$。因爲 $n \le \dfrac{3(M+1)}{2}=\dfrac{3(4\ell+3+1)}{2}=6\ell+6$ 爲一偶數，故

$$
\begin{aligned}
y_n-g_{n-1} &= \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1-M}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1-M}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1-(4\ell+3)}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-4\ell-4}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor \\
&= (2\ell+1)-\left\lfloor\frac{6\ell+5}{3}\right\rfloor=(2\ell+1)-(2\ell+1)=0\text{。}
\end{aligned}
$$

由 $(a),(b)$ 可知，若 $4\le n\le \dfrac{3(M+1)}{2}$，則 $P[n,3,M]-P[n-1,3,M]=y_n-g_{n-1}\ge 0$。 意即，當 $4\le n\le \dfrac{3(M+1)}{2}$ 時，$P[n-1,3,M]\le P[n,3,M]$。 □

在 **定理** 5 證明了 $P[n,3,M]$ 的單峰現象後，於 $P[n,3,M]$ 的表格中觀察「當 M 固定時，隨著 n 增加，峰頂（$P[n,3,M]$ 爲最大值）的數量」。在固定 M 的情況下，隨著 n 的不同考慮 $P[n,3,M]$ 的最大值，若 $P[t,3,M]=\max\{P[n,3,M]|n\in\mathbb{N}\}$，則稱 $P[n,3,M]$ 在 $n=t$ 處爲峰頂。此外，將峰頂發生的位置記爲「T_M」，意即 $T_M=\{t\in\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N}P[t,3,M]\ge P[n,3,M]\}$。在 $P[n,3,M]$ 的表格中可觀察出峰頂的數量 $|T_M|$ 會隨著 M 除以 4 的餘數而有特定規律，進一步延伸 **定理** 5 的論證，可得到以下結果：

結果 3. 對自然數 M，定義 $T_M=\{t\in\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N},P[t,3,M]\ge P[n,3,M]\}$，
則 $|T_M|=\begin{cases}4 & \text{，}M\equiv 0\,(\text{mod}2)\\ 1 & \text{，}M\equiv 1\,(\text{mod}4)\\ 3 & \text{，}M\equiv 3\,(\text{mod}4)\end{cases}$ 。

證明.

首先由 **定理** 4 可知對稱性 $P[n,3,M]=P[3(M+1)-n,3,M]$，又根據 **定理** 5 可知 $P[n,3,M]$ 具有單峰現象。因此在固定 M 的情況下，根據 M 的奇偶性，可知：

1. 當 M 爲奇數時，若自然數 t 滿足 $t=3(M+1)-t$，則 $P[t,3,M]$即爲$[3,M]$-分割數的最大值，意即 $t\in T_M$；

2. 當 M 爲偶數時，若自然數 t 滿足 $t+1=3(M+1)-t$，則 $P[t,3,M]$ 與 $P[t+1,3,M]$ 皆爲 $[3,M]$-分割數的最大值，意即 $t\in T_M$且$t+1\in T_M$。

以下我們針對 M 的奇偶性，利用 **定理** 6 與 **定理** 5 來刻畫峰頂的數量 $|T_M|$ 的值。

1. 當 M 爲偶數時： 令 $M=2\ell$（$\ell\in\mathbb{N}$），考慮 $t+1=3(2\ell+1)-t$，可得 $t=3\ell+1$，故 $3\ell+1\in T_M$ 且 $3\ell+2\in T_M$。因爲對稱性，證明「$P[3\ell+1,3,2\ell]-P[3\ell,3,2\ell]=0$」以及「$P[3\ell,3,2\ell]-P[3\ell-1,3,2\ell]>0$」，即可確定會有四個峰頂。根據 **定理** 6 可知，上述兩式等價於證明「$y_{3\ell+1}-g_{3\ell}=0$」以及「$y_{3\ell}-g_{3\ell-1}>0$」，算式如下：

$$
\begin{aligned}
y_{3\ell+1}-g_{3\ell} &= \left\lfloor\frac{3\ell}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3\ell}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3\ell-2\ell}{2}\right\rfloor=\left(\left\lfloor\frac{3\ell}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3\ell-2\ell}{2}\right\rfloor\right)-\left\lfloor\frac{3\ell}{3}\right\rfloor=\ell-\ell=0\text{。}\\
y_{3\ell}-g_{3\ell-1} &= \left\lfloor\frac{3\ell-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3\ell-1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3\ell-1-2\ell}{2}\right\rfloor\\
&= \left(\left\lfloor\frac{3\ell-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3\ell-1-2\ell}{2}\right\rfloor\right)-\left\lfloor\frac{3\ell-1}{3}\right\rfloor=\ell-\left\lfloor\frac{3\ell-1}{3}\right\rfloor=1\text{。}
\end{aligned}
$$

2. 當 M 爲奇數時，進一步分爲兩類來討論，分別是 $M=4\ell+1$ 和 $M=4\ell+3$（$\ell\in\mathbb{N}$）：

(a) 假設 $M=4\ell+1$。 考慮 $t=3(4\ell+2)-t$，可得 $t=6\ell+3$，故$6\ell+3\in T_M$。因爲對稱性，我們只要證明「$P[6\ell+3,3,M]-P[6\ell+2,3,M]>0$」，即可確定只有一個最大值。根據 **引理** 6 可知，上式等價於證明「$y_{6\ell+3}-g_{6\ell+2}>0$」。因爲 $6\ell+3$ 爲奇數，故可得下列算式：
$y_{6\ell+3}-g_{6\ell+2}=\left\lfloor\frac{6\ell+2}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{6\ell+2}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{6\ell+2-(4\ell+1)}{2}\right\rfloor=3\ell+1-2\ell-\ell=1$。

(b) 假設$M=4\ell+3$。 考慮 $t=3(4\ell+4)-t$，可得 $t=6\ell+6$，故 $6\ell+6\in T_M$。因爲對稱性，我們只要證明「$P[6\ell+6,3,M]-P[6\ell+5,3,M]=0$」以及「$P[6\ell+5,3,M]-P[6\ell+4,3,M]>0$」，即可確定會有三個最大值。根據 **引理** 6 可知，上述兩式等價於證明「$y_{6\ell+6}-g_{6\ell+5}=0$」以及「$y_{6\ell+5}-g_{6\ell+4}>0$」。因爲 $6\ell+6$ 爲偶數，故可得下列算式： $y_{6\ell+6}-g_{6\ell+5}=\left\lfloor\frac{6\ell+5}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{6\ell+5}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{6\ell+5-(4\ell+3)}{2}\right\rfloor=3\ell+2-(2\ell+1)-(\ell+1)=0$。$y_{6\ell+5}-g_{6\ell+4}=\left\lfloor\frac{6\ell+4}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{6\ell+4}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{6\ell+4-(4\ell+3)}{2}\right\rfloor=3\ell+2-(2\ell+1)-\ell=1$。

由 $(a),(b)$ 可知，固定 M 時考慮 $P[n,3,M]$ 的最大值，峰頂個數 $|T_M|$ 將依據 M 除以 4 的餘數會對應到不同的數值，而形成一定的規律。 □

最後，對 $[3,M]$-分割有一定了解後，考慮 $[4,5]$-分割，再觀察 $P[n,4,5]$ 的值，仍然具有單峰現象。若考慮 $[k,M]$-分割，對於一般的自然數 k，我們亦猜想 $P[n,k,M]$ 必然具有單峰現象，因此我們提出以下猜想：

猜想 1. 給定自然數 n,k,M，若 $k+1\le n\le\frac{k(M+1)}{2}$，則

$$P[n-1,k,M]\le P[n,k,M]\text{。}$$

3 討論

一開始我研究「球與箱子」問題，將「球與箱子」的其中一類型「整數無序分拆問題」做了數字間的『**距離限制**』，試圖建立遞迴關係式及公式來描述新命題的分割數量。爲了使分拆過程更爲簡單明瞭，必須適當地將球數先行放入箱子中，製造出必須滿足的距離條件。此時放入的球數將會影響到後面的公式及遞迴關係式。我從兩種不同的角度進行分析，分別是「**降低長度參數** k」與「**降低間距參數** d」。其中降低參數 d 的方法必須要調整我先行放入的距離差距，而我設計一種方式可以持續降低參數 d 直到 $d=0$ 時，便能直接與球與箱子的原命題做連結。

在研究的過程中，我還對整數無序分拆進行新的『**最大數限制**』，再將滿足條件的數字分割列出並製作圖表進行觀察。我們發現在固定 k 與最大數 M 的情況下，隨著 n 增加，皆會有對稱性與單峰現象。這看似相當直觀的現象，但棘手的部分正是解釋此現象發生的緣由以及證明其合理性，我欲建立特殊的一對一對應關係來說明，並提出猜想，試圖透過理性的數學論證，並釐清醞藏其中的數學結構與眞理。

參考文獻

[1] 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊，南一出版社。

[2] 林福來，組合數學，中央圖書。

[3] 離散數學（一），數學傳播季刊選輯 ⑦，中央研究院數學研究所發行。

[4] MathPages: *Partition Into Distinct Parts.*
http://www.mathpages.com/home/kmath556/kmath556.htm

[5] Herbert S. Wilf, *Lectures on Integer Partitions, University of Pennsylvania.*
https://www.math.upenn.edu/~wilf/PIMS/PIMSLectures.pdf

[6] Dongsu Kim and Ae Ja Yee, *A note on partitions into distinct parts and odd parts*, The Ramanujan Journal, June 1999, Volume 3, Issue 2, pp 227–231.

作品評語

游森棚教授
國立台灣師範大學數學系

將一個正整數 n 寫成若干個正整數之和 (順序不計)，稱爲 n 的一個分割 (partition)，每個正整數稱爲此分割的一個部分 (part)。例如 $5 = 2 + 2 + 1$ 的這個分割中，有三個部分，分別是 $2, 2, 1$。

此篇作品中作者考慮了兩個有限制條件的分割問題。第一個問題的限制條件是 "分割中恰有 k 個部分，且任意兩個部分差距要不小於 d "。第二個問題的限制條件是 "分割中恰有 k 個部分，且最大 part 不超過 M "。 核心的問題是: 在兩種限制條件下，分割分別有幾種方法?

在兩個問題中，作者推導出遞迴公式試圖解決核心問題。並且對於幾個特殊的 k, d，可以得到明確的分割方法數。此外作者亦觀察了第二個問題中，固定特定的 k, M 時，讓 n 變動，所得到的分割方法數有單峰 (unimodal) 的現象。

整數分割的理論是橫跨組合數學與數論的核心主題之一，歷來已經有非常多的研究，目前在高等數學上關於整數分割仍有許多未解決的重要問題。整數分割的研究通常利用高等數學中的生成函數 (generating functions) 當作主要工具。文中的兩類問題都可以明確地寫出生成函數，因此利用生成函數是可以導出本文中大部分的結果。

雖說如此，但本文作者能夠用自己的語言與方式，經由大量的實驗，觀察以及思考得到一些結果，研究的精神非常值得肯定。文中處理問題的想法雖然初等，但是卻是寶貴的。一般來說，學界對於組合結構的單峰性證明仍然沒有一勞永逸的方法，本文是一個相當有意思的例子。倘若作者能維持對分割問題或數學的熱情，經由高等數學的粹練，未來的發展值得期許。