

三角形內心性質研究

台北市立建國高級中學 鄭容濤

指導老師：李宗憲

Abstract

The article stemmed from a common geometry problem: Triangle ABC with incenter I , centroid G , circumcenter O . $IG \parallel BC \Leftrightarrow \angle AIO = 90^\circ$. I found that there are lots of characteristics, and tried to expand: Connect incenter with another center of a triangle, and consider what will happen if the line parallel to BC . I chose 6 points on the Euler line, which is orthocenter, centroid, circumcenter, nine-point center, Schiffler point, De Longchamps point respectively. The article uses synthetic geometry to solve those problems, and surprised at the marvelous and wonderful results, including beautiful collinear, concurrent, concyclic or special angles.

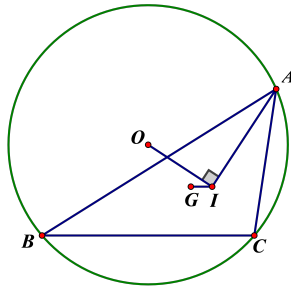
中文摘要

本文起源於一個常見的幾何性質： $\triangle ABC$ 的內心為 I 、重心為 G 、外心為 O ， $IG \parallel BC \Leftrightarrow \angle AIO = 90^\circ$ ，我不僅發現原命題擁有更多充要性質，同時繼續推廣研究：考慮 $\triangle ABC$ 中，內心與特定點的連線平行底邊 BC 的延伸性質，我選取了歐拉線上的特定六個點，為垂心 H 、重心 G 、外心 O 、九點圓心 N 、Schiffler 點 Sc 、DeLongchamps 點 L 。本文使用純粹的綜合幾何方法切入證明，結果發現許多看似不相干的點與線之間交織的美麗幾何故事，包含美妙的共線、共圓、垂直、平行、重合或其他特殊定角。

1 簡介

1.1 原始問題

某天我發現了一個有趣的性質， $\triangle ABC$ 的內心為 I 、重心為 G 、外心為 O



$$IG \parallel BC \Leftrightarrow \angle AIO = 90^\circ$$

證明此充要性質並不難，透過重心與內心的基本長度比例性質即可得出，然而結論十分新奇與美麗，非常吸引我！它讓三角形不同的心連結與對話，而且我也發現原命題能夠延伸的研究非常多，引起我極高興趣。

1.2 提問與思考

關於三角心的心，在過去研究中，總是探討「三角形中某點的軌跡」，或著「給定初始規則的動態系統軌跡」，這些重複的題材常常陷入找某個圖形中特殊點的軌跡方程，但是當這個軌跡沒什麼特別性質，或著太常見（例如二次曲線）的時候，找出軌跡方程價值就不大了（游森

棚，2014），所以本文不打算探討動態下的軌跡問題，而是回到根本的幾何關聯性——長度、角度、共線、共圓等等性質。

此外，關於三角形的心的研究就不得不提到數學家 Kimberling 的貢獻，他在二十年前發表一篇數學論文〈Major Centers of Triangle〉，將三角形的心視作函數，透過三線座標 trilinear coordinates 作為工具，探討心與心之間的關係，隨後許多研究者投入相關研究，形成三角形幾何學的分支。Kimberling 架構的網站「Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers」持續整理了世界各國眾多研究者關於三角形心的成果，不過討論範圍大多僅限於單一的「點對點」的關係，例如： $X(6091)$ 與 $X(5203)$ 為等角共軛關係，又或某心為其他心的線性關係，例如： $X(6090) = X(25) + 3 \times X(394)$ ，經查詢截至目前為止，已有超過 12,000 個心 $X(1) \sim X(12001)$ （詳見 [2]）。然而，Kimberling 的網站列出的研究成果中，沒有針對心與心在特定關聯下，與其他心的關係而進行深入探討。

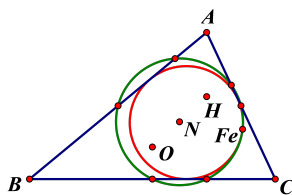
因此，我從前述的內心與重心連線的性質中，不禁好奇各個主要形心跟內心連線跟底邊平行的延伸結論內心與其他點之連線平行底邊 BC 的性質有哪些？然而，當三角形的「心」的數字超過一萬個後，似乎變得不再稀有，累積下來的煩瑣也會降低對人的吸引。所以我只選定在歐拉線上很基礎且特殊的六個三角形的心作為研究素材，它們為垂心 H 、重心 G 、外心 O 、九點圓心 N 、Schiffler 點 Sc 、De Longchamps 點 L 。

注意到，本研究不採用解析幾何（三線座標 trilinear coordinates）作為工具，而是使用純粹的綜合幾何方法切入證明。因為這樣的題目在解析時會陷入提取公因式的困境，而在式子龐大的時候這是困難的工作，再來使用純幾才可以在推導的過程發現新性質，而解析只能處理當下的問題。我在研究過程中不斷發現新的性質，抽絲剝繭、層層相扣，在線與點的性質不斷完備的途中，整個研究地圖也越來越明朗，它們包含特定角關係、特定的延伸線與點的交互性質、特殊點重合等。

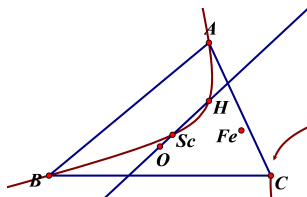
1.3 名詞定義

給定 $\triangle ABC$ ，其常見的五心，內心為 I 、重心為 G 、外心為 O 、垂心為 H 、 A 點對向的旁心為 I_A ，以及歐拉線，本文不多對其闡述。本研究考慮內心與其他歐拉線上的心的連線，因此需要使用到與內心相關的點或圓，以下作定義說明。

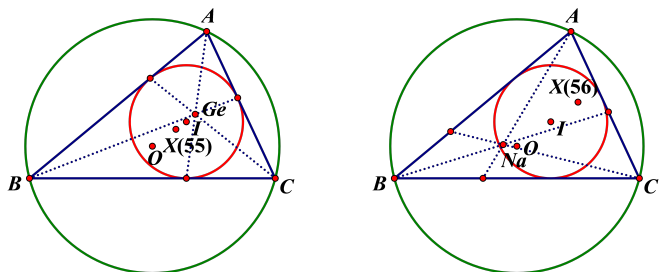
1. 九點圓： $\triangle ABC$ 外心或垂心的垂足圓（通過 $\triangle ABC$ 三邊的中點、三高的垂足、和頂點到垂心的三條線段的中點的圓）。九點圓將與 $\triangle ABC$ 內切圓相切（費爾巴哈定理）。
2. 九點圓圓心 N ：九點圓的圓心 N 為 $\triangle ABC$ 外心與垂心連線的中點。
3. 費爾巴哈點 Fe ： $\triangle ABC$ 的九點圓與內切圓的切點稱作 Fe 。



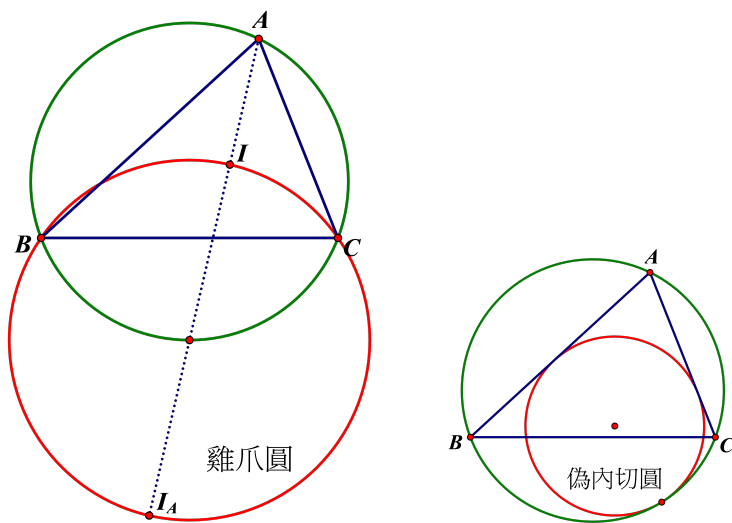
4. 費爾巴哈雙曲線： $\triangle ABC$ 中 OI 上點的等角共軛點軌跡，此雙曲線中心為 Fe 。
5. Schiffler 點 Sc ： $\triangle ABC$ 中歐拉線與費爾巴哈雙曲線除了垂心的另一個交點為 Schiffler 點，簡稱 Sc 點。



- Gergonne 點 Ge : $\triangle ABC$ 中頂點分別連內切圓切對邊的切點，此三線共 Gergonne 點，其等角共軛點 $X(55)$ 為外心與內心的內位似中心。
- Nagel 點 Na : $\triangle ABC$ 中頂點分別連對向旁切圓切底邊的切點，此三線共 Nagel 點，簡稱 Na 點，其等角共軛點 $X(56)$ 為外心與內心的外位似中心，且 I, G, Na 共線。



- De Longchamps 點: $\triangle ABC$ 中 H 和 De Longchamps 點 (簡稱 L 點) 的中點為 O 。此點會是 IGe 跟歐拉線的交點。
- 雞爪圓: $\triangle ABC$ 中 A 的對向旁心 I_A ，則 B, C, I, I_A 共圓，此圓稱作雞爪圓，其圓心為外接圓 BC 底弧中點。
- 偽內切圓: 與 $\triangle ABC$ 的邊 AB, AC ，以及其外接圓內切的圓，稱作偽內切圓。



1.4 預備知識

- Monge 定理: 兩個位似變換等同於一個位似變換，且三位似中心共線。
- 射影定理: 等角共軛為保交比變換，所以直線的等角共軛變換為過三頂點的二次曲線。
- 交比: 平面上給定共線的四點 A, B, C, D ，定義其交比為有向線段比 $(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \bigg/ \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$ 。其中， $(A, B; C, D) = -1$ ，則 A, B, C, D 四點稱為調和點列。
- 反演: 平面上給定的一個半徑為 r 的圓 O 。對平面上任意一點 P ，將其變換為射線 $\overrightarrow{OP}$ 上的一點 P' ，使得 $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$ ，則稱 P' 為 P 關於圓 O 的反演點。反演變換具有保性和反向保角性。

1.5 慣用表示法

本文常使用的文字符號有三個，本文約定：

1. 關於：WRT 為 with respect to 的縮寫。
2. (ABC) 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓。
3. (AB) 表示以 AB 為直徑的圓。
4. 本文一致約定， $\triangle ABC$ 中，內心 I 、重心 G 、外心 O 、垂心 H 、Schiffler 點 Sc 、De Longchamps 點 L 、 A 側的旁心 I_A 、九點圓圓心 N 、費爾巴哈點 Fe 、Nagel 點 Na 、Gergonne 點 Ge 、 BC 中點 M 、 AI 交外接圓於 M_A 、內切圓切 BC 於 E 、 A 對 BC 垂足 D 、 AI 交 BC 於 T 。

2 研究內容

2.1 前置研究：三角形特定點常見的性質

性質 1. $\triangle ABC$ 九點圓與內切圓相切。

證明.

1. 設 AI 交 BC 於 T ，則 $(F, E; T, D) = -1$ 又 FE 中點為 M 。把內切圓跟九點圓對 (EF) 反演，則內切圓自反，九點圓變成通過 T 的一條直線。欲證明此直線切內切圓。
2. 意即證明此線 L 為 BC 對 AI 的對稱線。由於反演的保角性，計算九點圓跟 BC 的夾角為 $\angle OAH = C - B$ ，同時 L 與 BC 的夾角為兩倍 AI 與 BC 的夾角即 $C - B$ ，故得證。

□

性質 2. $\triangle ABC$ 中 Na 的等角共軛點為外接圓跟內切圓的外位似中心 K 。

證明.

對 A 反演後，旁切圓會變 A 側的偽內切圓 ω ，因為 (I) 與 ω 的外位似中心 A ， (I) 與 (O) 的外位似中心 K ， (O) 與 ω 的外位似中心（切點）三點會共線，但是旁切圓切點反演後變成偽切圓切點，所以 ANa 與 AK 互為等角線，因此就會得到 Na 的等角共軛點為 K ，而且因此就會有 Na 的等角共軛點在 IO 上，所以 Na 在費爾巴哈雙曲線上。 □

性質 3. $\triangle ABC$ 中 Ge 的等角共軛點為外接圓跟內切圓的內位似中心 L 。

證明.

對 A 反演後，內切圓會變 A 側的偽外切圓 ω ，因為 (I) 與 ω 的外位似中心 A ， (I) 與 (O) 的內位似中心 L ， (O) 與 ω 的內位似中心（切點）三點會共線，但是內切圓切點反演後變成偽切圓切點，所以 AGe 與 AL 互為等角線，因此就會得到 Ge 的等角共軛點為 L ，而且因此就會有 Ge 的等角共軛點在 IO 上，所以 Ge 在費爾巴哈雙曲線上。 □

性質 4. $\triangle ABC$ 中 I, G, Na 共線，且 $IG = 2GN_a$ 。

證明.

1. 原命題要證明 Na 是 I 對 G 作 -2 倍位似，即要證明 I 對 A 作 2 倍位似點 I' ， I' 跟 Na 的對稱點為 M 。
2. 因為 AN_a 過 E 對 (I) 的對徑點 K （位似後顯然），而 M 為 EF 中點所以 $AN_a \parallel IM$ 。因此 $AN_a \parallel IM \parallel I'E$ 而且為等距。所以 I 對 G 作 -2 倍位似在 AN_a 上，同理即可得到原題結論。

□

性質 5. $\triangle ABC$ 中 I, Ge, L 共線，其中 L 與 H 的中點為 O 。

證明.

1. 費爾巴哈雙曲線上 I, Ge, H, Na ，注意到 $A(I, H; Ge, Na) = -1$ ，而 OI 切費爾巴哈雙曲線，否則若 OI 交費爾巴哈雙曲線於 X ，由定義 X 的等角共軛點也在 OI 與費爾巴哈雙曲線上，但 OI 不可能過旁心(除非等腰)，又直線與二次曲線不能交三個點矛盾。
2. 打到歐拉線上 $(I, H; Ge, Na) = (O, H; L', G) = -1$ ，得到 $L' = L$ 為 De Longchamps 點。

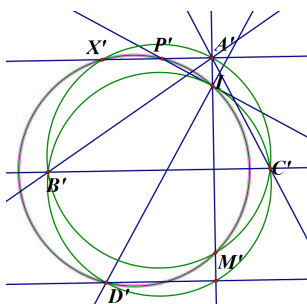
□

引理 1. $\triangle ABC$ ， M 點為 BC 底弧中點， D 點為內切圓切 BC 的點， (AI) 交 AH 於 P 、交 (ABC) 於 X ，則 M, D, P, X 共線。

證明.

1. 考慮把整個圖形對 I 反演， I 變成 $\triangle A'B'C'$ 的垂心； M' 點變成 $A'I$ 交 $(A'B'C')$ ； D' 變成 I 對 $(B'IC')$ 的對徑點； X' 點變成過 A' 平行 $B'C'$ 交 $(A'B'C')$ 的點； P' 點變成 I 對 $(B'IC')$ 的切線與 $A'X'$ 的交點，欲證 I, M', D', P', X' 共圓。
2. 顯然 $IM'D'X'$ 為等腰梯形，而 ID' 在 $A'P'I$ 與 $A'X'M'$ 中分別平行垂線和中線，所以得到 I, M', D', P', X' 共圓。

□



引理 2. 對一雙曲線上任三點的垂心仍在雙曲線上等價此雙曲線為等軸雙曲線。

證明.

1. 一等軸雙曲線過垂直方向的無窮遠點。
2. 垂直方向的無窮遠點的等角共軛點為 (ABC) 上的對徑點，故得 O 在直線上，所以垂心在雙曲線上。

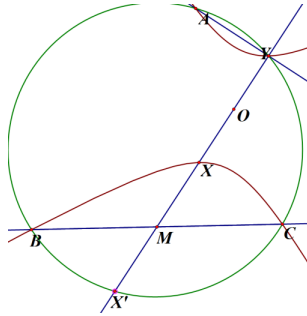
□

引理 3. 等軸雙曲線上二點 B, C ，雙曲線中心 O ， BC 中點 M ， MO 交雙曲線於 X, Y ，則 $MB^2 = MX \times MY$ 。

證明.

1. 因為 XY 過 M ，所以 XY 的極點是 BC 方向無窮遠點。作 BXC 垂心 A ， XAY 垂心 K 。得 K 在雙曲線上， Y 的切線平行 BC 垂直 XA ，得到 Y 與 K 重合，即 $\angle AYZ = 90^\circ$ 。
2. 因為 $\triangle ABC$ 的垂心跟 BC 中點連線過 A 對 (ABC) 的對徑點 X' ，且 $\angle AYZ = 90^\circ$ 得到 Y 在 (ABC) 上，故 $MB^2 = MX' \times MY = MX \times MY$ 。

□



2.2 主要研究：三角形特定點與內心平行底邊 BC 之延伸性質

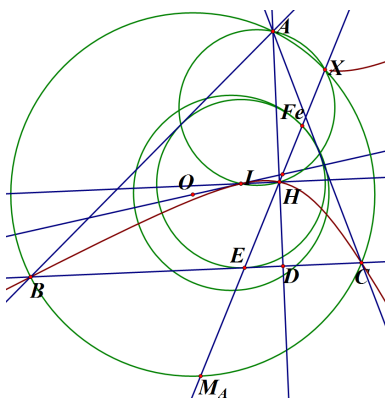
2.2.1 內心與垂心連線平行底邊性質研究

給定 $\triangle ABC$ 中， $IH \parallel BC$

定理 1. $\triangle ABC$ ， (AI) 交 (ABC) 於 X ，則 M_A, E, H, X, Fe 五點共線。

證明.

由 引理 1 $M_A E H X$ 共線。又顯然內切圓與 (ABC) 的外位似中心為 OI 交 $M_A E$ ，故關於內切圓、 (ABC) 、九點圓的 Monge 定理可得到內切圓與 (ABC) 的外位似中心 Fe 在 $M_A E$ 上。 $\square$

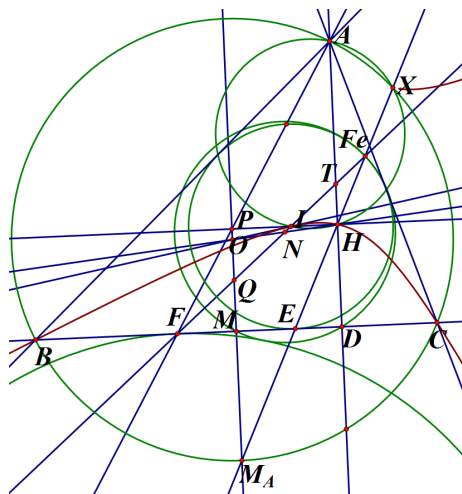


定理 2. F 為旁切圓 I_A 切 BC 的點、 AH 交 BC 於 D 、 AD 中點 T 。則 F, I, N, T, Fe 共線。

證明.

1. 易有 AF 過 E 對內切圓的對徑點，所以顯然 FIT 共線。
2. 令 BC 中點 M ， OM 交 IH 於 P 、交 IF 於 Q 。則因 $FM = ME$ 得 P 在 AF 上，得 Q 為 PM 中點。又 $2OQ = 2OM - 2MQ = AH - HD = 2TH$ ，得 QNT 共線，故 F, I, N, T 共線。且顯然 I, N, Fe 共線，所以得到 F, I, N, T, Fe 共線。

$\square$

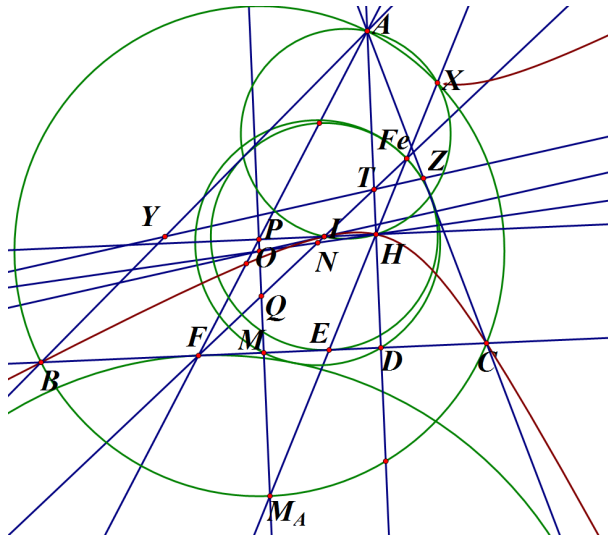


定理 3. Y 為旁切圓 I_C 切 AB 的點， Z 為旁切圓 I_B 切 AC 的點。則 Y, T, Z 共線且平行 OI 。

證明.

1. $\frac{FeI}{FeT} = \frac{FeE}{FeH} = \frac{FeF}{FeI}$ 得 $FeI^2 = FeF \times FeT$ ，因此 F 對費爾巴哈雙曲線的極線 YZ 過 T 。
2. 因為 Fe, F, I 共線，所以 F 和 I 對費爾巴哈雙曲線的極線平行，即 YZ 平行 OI 。

□



2.2.2 內心與外心連線平行底邊性質研究

給定 $\triangle ABC$ 中， $IO \parallel BC$ 。

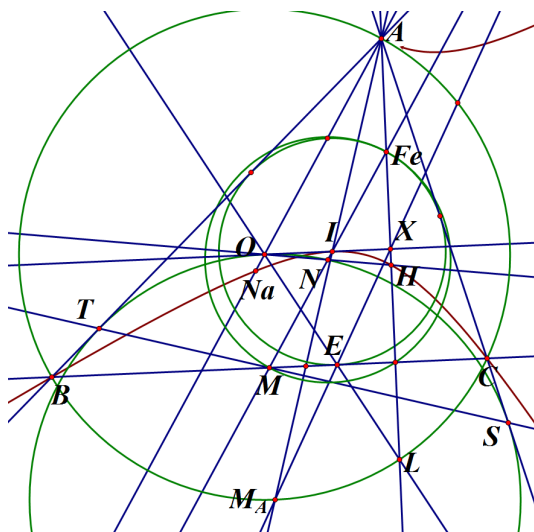
定理 4. $\angle AIH = 90^\circ$ ，且 Fe 為 AH 中點。

證明.

1. 以 M_A 為圓心作圓 Ψ 切 AB, AC 於 T, S ，則因 $TM_AB \cong OM_AI$ ，得 Ψ 過 O 。
2. 探討九點圓與 Ψ 的外位似中心 X ，由九點圓、 (ABC) 、 Ψ 的 Monge 定理得 X 在 AH 上。又由九點圓、內切圓、 Ψ 的 Monge 定理得 Fe 在 AH 上。內切圓切九點圓於 AH 上，易有 Fe 為 AH 中點。又 $AF_e = IE = IF_e$ 得 $\angle AIH = 90^\circ$ 。

□

由 Fe 為 AH 中點可輕易得到 Fe, N, I, M 共線，且 AF 過 E 對內切圓的對徑點得 A, O, Na 共線。令 H 對 BC 對稱點 L 。因為 AO 過 E 對內切圓的對徑點，對 IO 鏡射後得 O, E, L 共線。



引理 4. 設 T 為 ABC 內切圓切點三角形 DEF 的垂心，則 T 在 OI 上。

證明.

1. 設 DT , ET , FT 分別再與 (I) 交於 D' , E' , F' 。
2. 因為 $ABCOI$ 與 $D'E'F'IT$ 位似 (easy to check)，所以 TOI 共線。

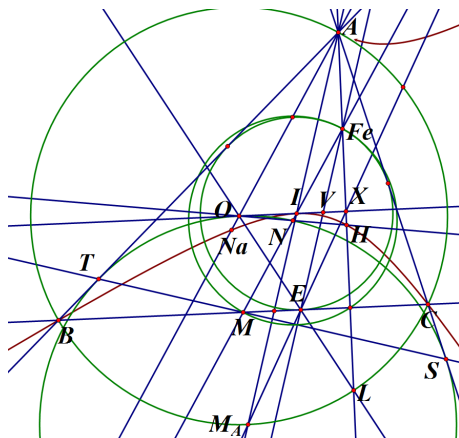
□

定理 5. EFe 交 OI 於 V ，則 V 為 ABC 內切圓切點三角形的垂心。

證明.

1. 熟知 ABC 內切圓切點三角形的垂心在 OI 上，所以等價證明 $EFe \parallel AI$ 。
2. 因 AO 為 I 對 H 的兩倍像，所以 $FeIE$ 位似 AOM_A ，而位似中心是 X ，故得證。

□



引理 5. 設向 A 的偽內切圓 Φ 切外接圓於 L ，則 LI 過 BAC 弧中點。

證明.

1. 考慮原圖對 I 反演則 I 變為 ABC 之垂心 H ， BAC 弧中點反演到 D 使得 D 在 ABC 外接圓上且 HD 垂直 AD ，欲證偽切圓切點 K 反演到 A 之對徑點 J 。
2. 偽內切圓切其餘兩邊的點反演到 F, G ，因為 AH 垂直 FH 且 $AHBF$ 共圓同理得另一點為 G 。
3. 又因為 $AHBF$ 共圓則 AB 垂直 BF 又 AB 垂直 BJ 故有 FBJ 共線，同理 GCJ 共線。
4. 故有 GFJ 外接圓與 $ABJC$ 外接圓相切於 J 點。
5. 所以有 J 為 K 之反演點，由 2. 得證。

□

定理 6. $\angle BAC$ 的外角平分線交外接圓於 K ，則 K, I, L 共線。

證明.

等價於證明對向 A 的偽內切圓 Φ 切外接圓於 L ，又 (ABC) 與 Φ 的外位似在 AH 上（性質 2）。

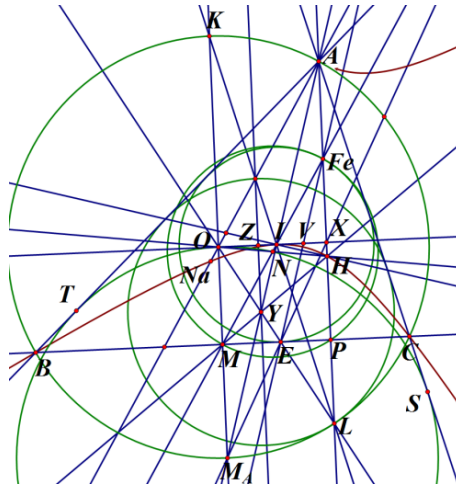
□

定理 7. Φ 的外心 Y 為 OL 交 HM ，過 Y 作 $YZ \parallel AH$ 交 OI 於 Z ，則 Z 為外接圓與內切圓的內位似。

證明.

1. 因 Φ 與外接圓切於 L ，所以 O, L, Y 共線。欲證 $OL, MH, M_A A$ 共點，令 AH 交 BC 於 P 。因 $OL, MP, M_A X$ 共點 E ，故 $\frac{MM_A}{OM} = \frac{PX}{LP} = \frac{HA}{LH}$ （對 L 位似 2 倍）得 $OL, MH, M_A A$ 共點。
2. 因 AO 上弧中點（以 BC 為基準）， LI 交外接圓上弧中點。所以根據位似，得有 AO, IL, YZ 交於偽切圓上弧中點，故 $(O, I; Z, X) = -1$ （完全四邊形），即 Z 為內位似中心。

□



2.2.3 內心與重心連線平行底邊性質研究

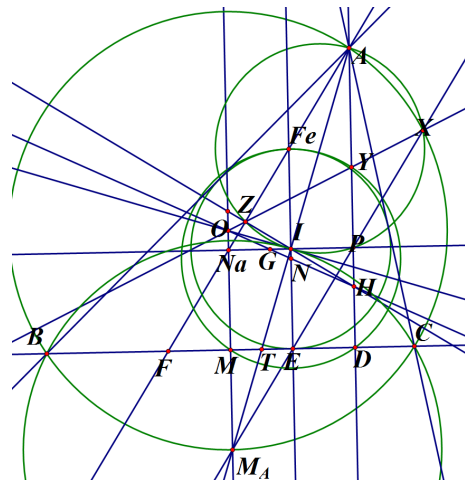
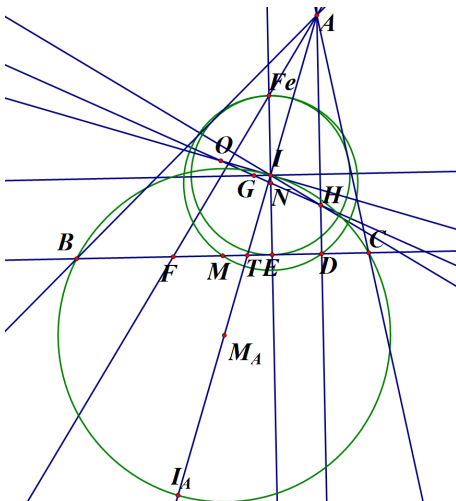
給定 $\triangle ABC$ 中， $IG \parallel BC$ 。

定理 8. $\angle AIO = 90^\circ$ 、 $IN \parallel AH$ 、 $IH \perp AN_a$ 。

證明。

1. AI 交 BC 於 T ，因 $IG \parallel BC$ 得 $\frac{IT}{AI} = 2$ ，又 $(A, T; I, I_A) = -1$ ，得 $AI = IM_A$ 即 $\angle AIO = 90^\circ$ 。
2. A 對 BC 垂足 D ， $AI = IM_A$ 垂直打到 BC 上得 $ME = ED$ ，所以 N 在 IE 上得 $IN \parallel AH$ 。 A, I, T, M_A, I_A 的比例關係垂直打到 BC 即有 $FM = 2MT = 2TE = ED$ 。
3. $-1 = (IO, IN; IG, IH) = (AT, ABC; AD, AF)$ ，得到兩線束轉 90° 即 $IH \perp AN_a$ 。

□



定理 9. AI 直徑圓交外接圓於 X , AH 中點 Y , IH 交 ANa 於 Z , 則 $OXYZ$ 共線。

證明.

1. Na 在 IG 和 AF 上, 又 $IN \parallel ONa$ (對 G 作 -2 倍位似)。
2. 將 $(IO, IN; IG, IH) = -1$ 打到 ONa 上得 OZ 是 AZH 中線, 即 OYZ 共線。
3. (AI) 交 AH 於 P , 令 $M_A P$ 交 OZ 於 X' , 又 $NaM = PD$, $FM = ED$ 得 $NaF \parallel PE$ 。所以 $\angle ZX'P = \angle AZY = \angle ZAP$ 得 $X' = X$ (引理 1), 故 $OXYZ$ 共線。

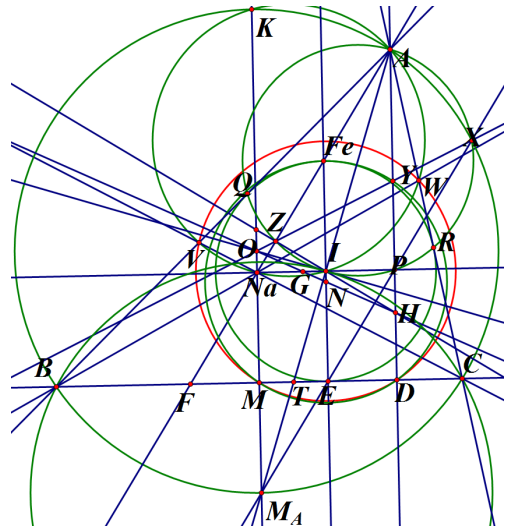
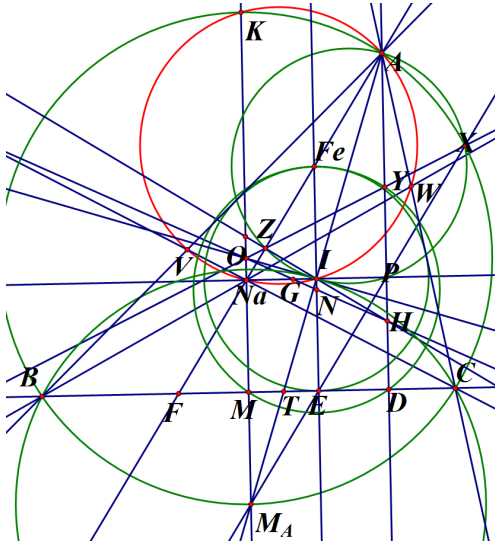
□

定理 10. V, W, M, D 共圓心為 I 的圓。

證明.

1. 內切圓切 AB, AC 於 Q, R , 則 $AQ = AR = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{BC}{2} = BM$ 。
2. $VQ = AV - AQ = CF - CM = FM = ME = ED$, 同理有 $VQ = WR = ME = ED$ 。
3. 因此 $\triangle IQV, \triangle IRW, \triangle IEM, \triangle IED$ 全等, 得到 $VI = WI = MI = DI$, 故得證。

□



定理 11. CNa, BNa 分別交 AB, AC 於 V, W ， BC 上弧中點 K ，則 A, V, W, K, I, Na 共圓 Ψ 。

證明.

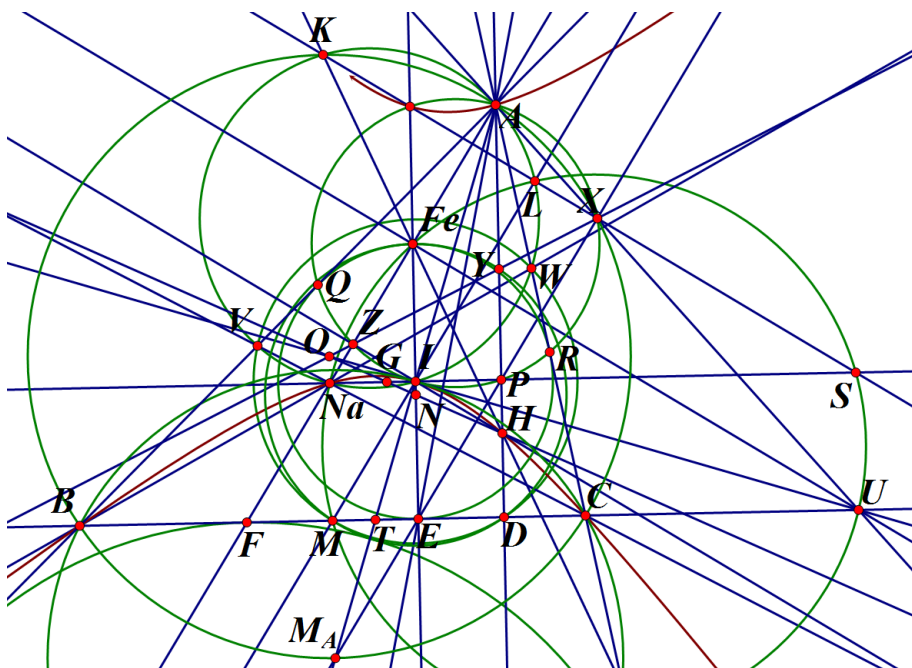
$TI = TM_A \Rightarrow Na$ 對 BC 的對稱點為 M_A ， $\angle IAV = \angle MCNa = \angle CNaI$ ，得 A, V, I, Na 共圓，同理有 A, V, W, I, Na 共圓。又易有 A, Na 過 (IK) ，所以得到 A, V, W, K, I, Na 共圓 Ψ 。 $\square$

定理 12. KX 交 IM, INa 於 L, S ， AX 交 BC 於 U ，則 L, S, U, M, Na, Fe 共圓。

證明.

1. (BIC) 、 (ABC) 、 (AI) 軸共點 (OI, AX, BC 共點 U)。
2. $AI \perp IU \Rightarrow IEU \sim IPA \Rightarrow IFeU \sim INaA \Rightarrow FeU \perp ANa$
3. $KX \perp XP \Rightarrow KX \parallel FeU \parallel IH$ ，且 Fe 為 K, H 中點，故 KX, FeU, IH 為等距的一組平行線。所以 $\overline{US} = \overline{IFe} = \overline{MNa}$ ， Na, M, U, S 構成長方形。
4. $\angle NaFeM = 90^\circ$ ， $\angle MLS = 90^\circ$ ，因此 L, S, U, M, Na, Fe 共圓。

$\square$



2.2.4 內心與九點圓圓心連線平行底邊性質研究

給定 $\triangle ABC$ 中， $IN \parallel BC$ 。

定理 13. E 對 AI 對稱點 E' ，則 MEE', IAH, OAI 相似。

證明.

1. AH 中點 R ， IN 交 AH 於 U ， AH 中垂線交 AI 於 S ， AI 中點 V ， AI 中垂線交 AO 於 W ， F 為旁切圓 I_A 切 BC 的點， AI 交 BC 於 T ，易有 $(F, E; T, D) = -1$ 與 W, I, E 共線。
2. $\angle E'EM = \angle TIE = \angle HAI = \angle IAO$ ，所以要證 $\frac{ME}{MT} = \frac{OA}{OW} = \frac{IA}{IS}$ 。 R, D 在九點圓上，所以有 $RU = UD \Rightarrow TI = IS$ 。
3. $\frac{OA}{OW} = \frac{MD}{ME} = \frac{ME}{MT}$ （調和性質）， $\frac{IA}{IS} = \frac{IA}{TI} = \frac{ED}{TE} = \frac{ME}{MT}$ （調和性質）。

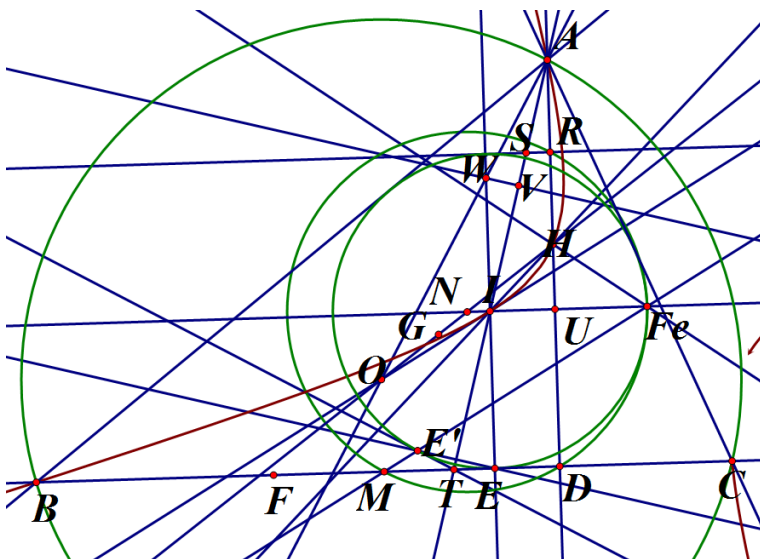
□

定理 14. $\angle AHI = \angle AIO = \angle HIN = 135^\circ$ 。

證明.

1. 因 $\angle FeE'E = \frac{1}{2} \angle FeIE = 45^\circ$ ，所以僅要證明 M, E', Fe 共線。
2. 對 M 反演，則顯然九點圓變成 TE' 而內切圓自反，所以切點共線即 M, E', Fe 共線。
即 $\angle AHI = \angle AIO = 135^\circ \Rightarrow \angle IHU = 45^\circ \Rightarrow \angle HIN = 135^\circ$ 。

□



2.2.5 內心與 Sc 點連線平行底邊性質研究

給定 $\triangle ABC$ 中， $ISc \parallel BC$ 。

定理 15. $\angle BAC = 60^\circ$ 。

證明.

1. 因為 AIH 的垂心在 ISc 上，且又在費爾巴哈雙曲線上，得到 Sc 為 AIH 垂心。
2. 所以 AI 垂直歐拉線，故得到 $AH = AO$ ，即 $\angle BAC = 60^\circ$ 。

□

因為 $\angle BAC = 60^\circ$ 的幾何性質已經有非常多的結論，所以就不繼續琢磨於此了。

2.2.6 內心與 De Longchamps 點（簡稱 L 點）連線平行底邊性質研究

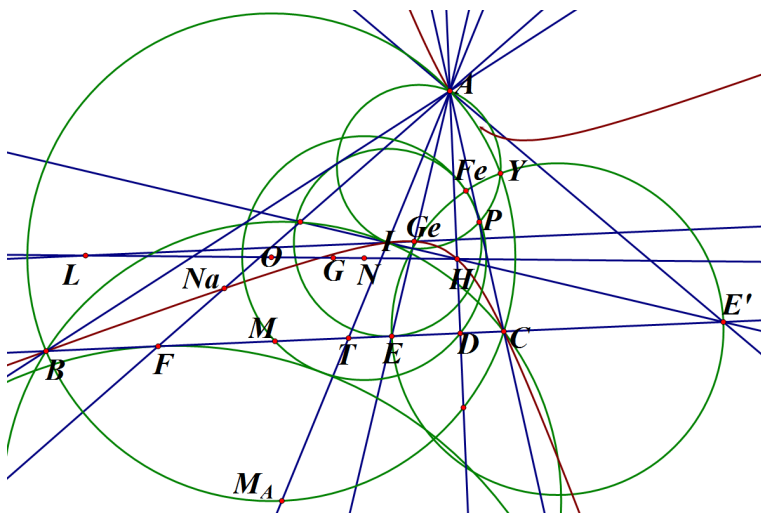
給定 $\triangle ABC$ 中， $IL \parallel BC$ 。

定理 16. 定義 E wrt (BC) 的反演點 E' ，則 Fe 在 (EE') 上。

證明.

1. (AI) 、 (ABC) 共點於 Y ，則因 YEM_A 共線且 $(B, C; E, E') = -1$ ，得 Y 過 (EE') 。又因為 (EE') 圓心到 (ABC) 的幂為其半徑平方，得 (EE') 與 (ABC) 正交。
2. 因 IGe 垂直 AH ，且 Ge 在費爾巴哈雙曲線上，得 Ge 為 AIH 垂心， AE 垂直 HI ，因此 I 、 H 、 E' 共線（ E' 對內切圓的極線為 AE ），得 H 為 AEE' 的垂心，所以 $DE * DE' = -DH * DA = DB * DC$ ，故 D 在 (EE') 與 (ABC) 的根軸，即 O wrt (EE') 的極線（因為兩圓正交），又 OM 垂直 $E'D$ ，所以 M 為 D wrt (EE') 的反演點。
3. 因為 $(M, D; E, E') = -1$ 而知 Fe 在 (EE') 上。

□

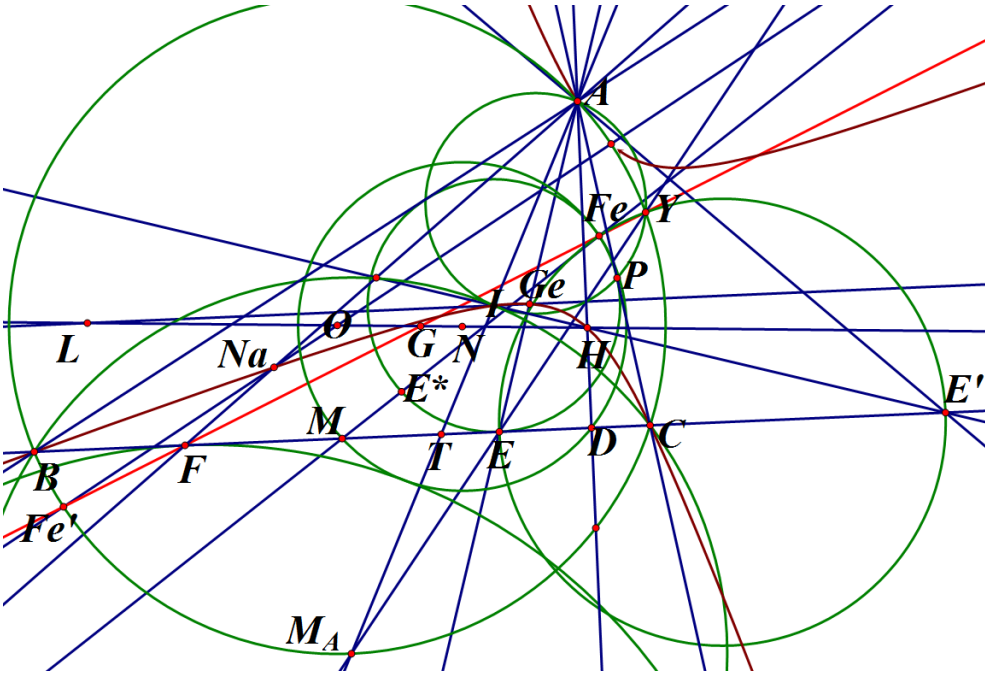


定理 17. Y 、 Fe 、 G 共線。

證明.

1. 設 Fe 在 $(G, -2)$ 下的像為 Fe' ，因為 $INFe$ 共線與 Fe 過九點圓作 $(G, -2)$ 得到 Fe' 在 (ABC') 上，且 $Fe'ONa$ ，又 ONa 為 IN 作 $(H, 2)$ 的線，所以過費爾巴哈雙曲線與 (ABC') 的交點。而 Fe' 對徑點在費爾巴哈雙曲線上，得 Fe' wrt ABC 的等角共軛點為垂直 IO 方向的無窮遠點。
2. E 對 AI 的對稱點為 E^* ，且 MEE^* 與 OAI 反向相似 (定理 13)，故
 $\angle FeYE = \angle FeE'E = \angle FeEI = \angle (\perp FeE^*, EE^*) = \angle (\perp ME^*, EE^*) = \angle (AI, \perp OI)$
 $= \angle Fe'AM_A = \angle Fe'YM_A = \angle Fe'YE$ ，因此有 Y 、 Fe 、 Fe' 共線，而 Fe 、 G 、 Fe' 共線，所以 Y 、 Fe 、 G 、 Fe' 共線。

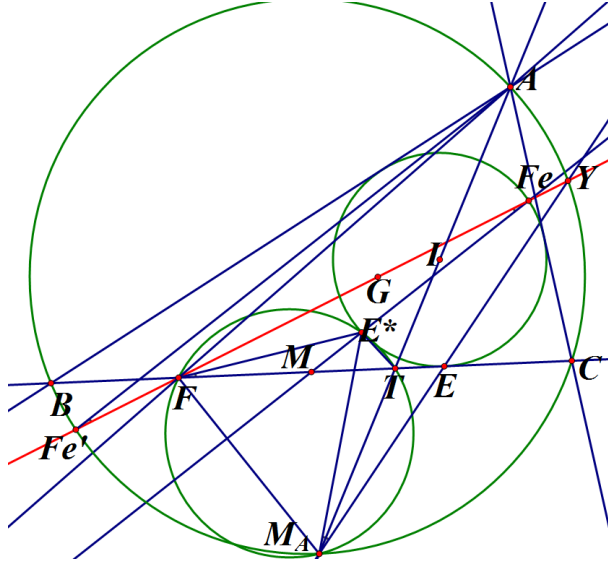
□



定理 18. Y 、 Fe 、 G 、 F 共線。

證明.

設 AI 交 BC 於 T ，則知 T 、 M_A 、 F 、 E^* 共圓 ($\angle M_AET = \angle M_AFE$)，又 M 到內切圓的幂等於 MF^2 ，而 $MFe \parallel Fe'A(G, -2)$ 。由 $\angle MFeF = \angle MFE^* = \angle TFE^* = \angle TM_AE^* = \angle EM_AT = \angle YM_AA = \angle YFe'A = \angle FeFe'A = \angle MFeFe'$ ，得 Fe 、 F 、 Fe' 共線，所以 Y 、 Fe 、 G 、 F 、 Fe' 共線。 $\square$



引理 6. 三角形 ABC 切點三角形 DEF 的垂心 T ，證明 T 是 IH 對費爾巴哈雙曲線的極點。

證明.

1. 設 DT, ET, FT 分別再與 (I) 交於 U, V, W 並且 M, R 分別為 IH, AH 的中點。注意到 R 在九點圓上，因為 $ABCOI$ 與 $UVWIT$ 位似 (easy to check)，所以 RN 平行 AO 平行 UI 得到 RU 過 $(I), (N)$ 的外位似中心 Fe 。因為 RM 平行 AI 平行 UT ，所以結合

$$\frac{RM}{UT} = \frac{AI}{2UT} = \frac{(N) \text{ 的半徑}}{(I) \text{ 的半徑}}, \text{ 得 } M, T, Fe \text{ 共線。}$$

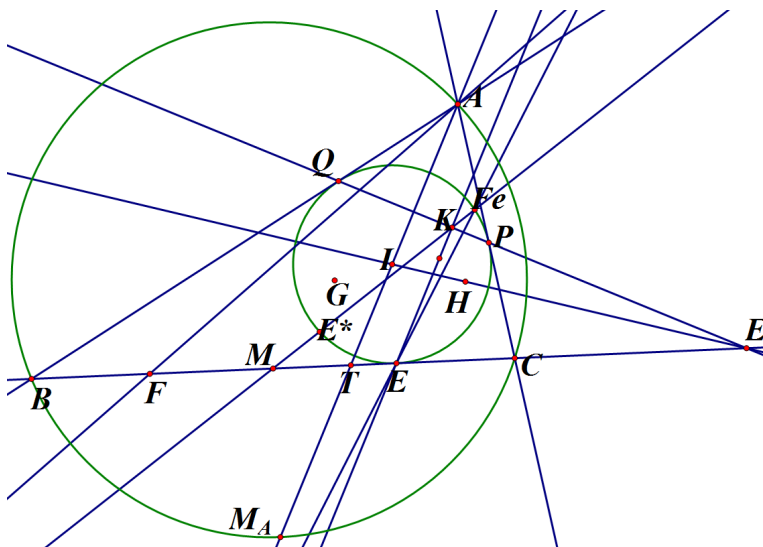
2. 另一方面，因 O, I, T 共線 (位似) 且 OI 與三角形 ABC 的費爾巴哈雙曲線相切於 I ，所以可得 T 是 IH 關於費爾巴哈雙曲線的極點。

$\square$

定理 19. K 是切點三角形 EPQ 中， E 對 PQ 的垂足，證明 K 是 BC 對費爾巴哈雙曲線 f 的極點。

證明.

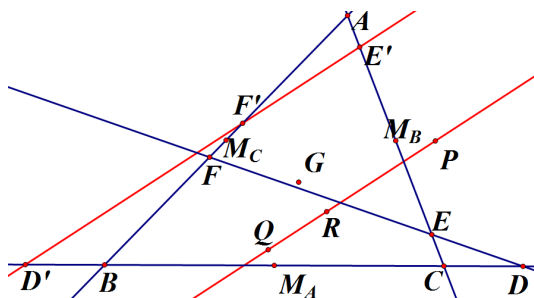
EK 交 BC 交 PQ 於 E' ，對 f 配極完得 K 的極線過 E' ，又 E 對 f 的極線是 PQ ，可推論得 M, K, Fe 共線。□



引理 7. 一條線跟三角形 ABC 三邊分別交於 D, E, F 與 A, B, C 相對，取 D, E, F 分別對 M_A, M_B, M_C 對稱得到 D', E', F' ， AD, BE, CF 中點 P, Q, R 。則 PQR 跟 $D'E'F'$ 為平行線。

證明.

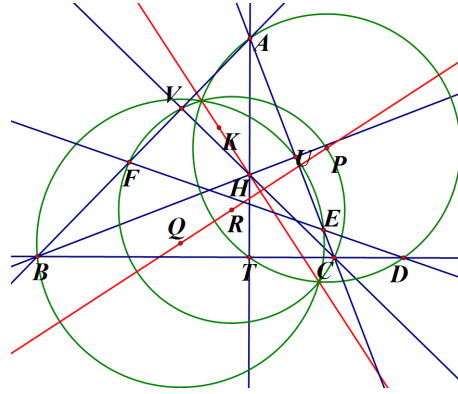
由孟氏定理可以得到 $D'E'F'$ 共線，注意到 D' 為 P 對 A 位似 2 倍再對 M_A 位似 -1 倍，亦即對 P 對 ABC 重心 G 位似 -2 倍。因 $D'E'F'$ 為 PQR 對 G 位似 -2 倍。所以 PQR 共線且平行。□



引理 8. 承上，作 ABC 垂心 H ， AEF 垂心 K ，則 KH 垂直 PQR 。（即垂心線垂直牛頓線）

證明.

AH, BH, CH 分別交對邊於 T, U, V ，作 $(AD), (BE), (CF)$ ，因為 H 到三個圓的幂是 $HA \times HT = HB \times HE = HC \times HF$ ，同理 K 到三個圓的幂也一樣。所以 KH 是三個圓的跟軸而垂直連心線 PQR 。□

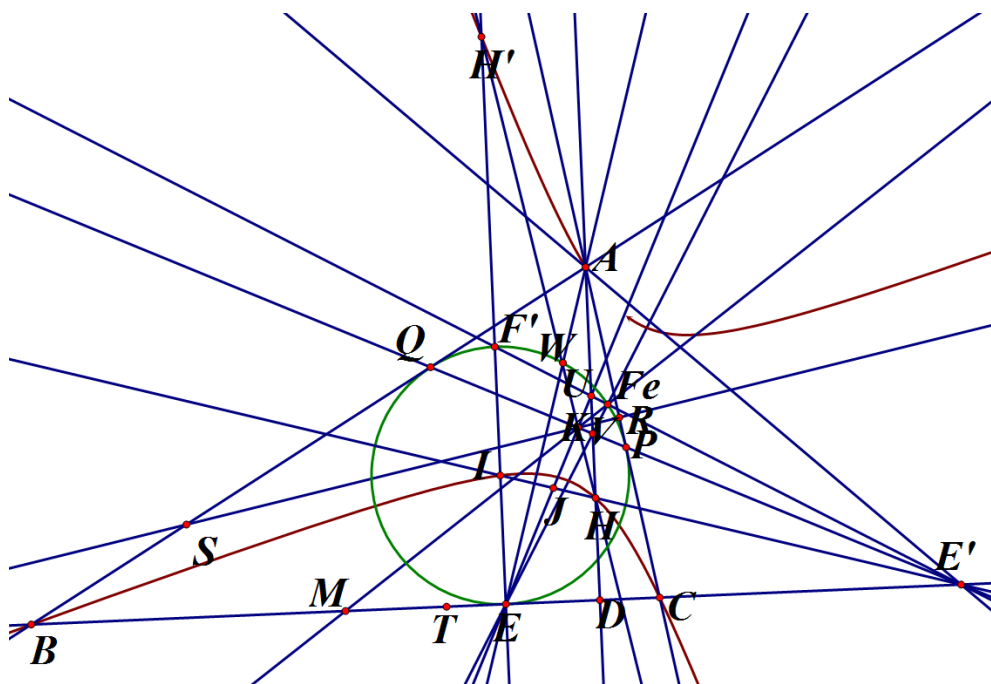


定理 20. B -旁切圓， C -旁切圓分別切 AC, AB 於 R, S ，證明 HK 過 BIC 垂心 H' 且垂直 RS 。

證明.

1. 先證明 I 對 PQ 的對稱點 I' ， $I'H$ 垂直 RS （對所有三角形都會對），因為 APQ 垂心 I' ，所以 $I'H$ 為 AB, AC, BC, PQ 完全四邊形的垂心線，所以由 **引理 6** 與 **引理 7** 得證。
2. 令 EFe 交 $E'K$ 於 V ， EK 交 FeE' 於 U ，則 V 為 $EE'U$ 的垂心，因 $(M, D; E, E') = -1$ 且 M, K, Fe 共線，所以 A, V, U, H 共線。
3. 令 KE 交 IH 於 J ，因為 $K(I, I'; E', E) = -1$ ，欲證 HKI' 共線等價 $(I, H; E', J) = -1$ ，用 E 打到 AD 上，等價於要證明 H 為 DU 中點，而 $DH \times DA = DE \times DE' = DU \times DV$ 所以等價證明 AD 中點 V 。
4. 令 EI 交內切圓於 F' ， AE 交內切圓於 W ， $EFe \perp FeE' \Rightarrow F', Fe, E'$ 共線，因 E' 是 EW 對 (I) 的極點，所以 $(W, E; Fe, F') = -1$ ，由 $E(W, E; Fe, F') = -1$ 得 AD 中點 V 。
5. 費爾巴哈雙曲線上， $I(B, H; C, H') = -1$ ，所以 HH' 過 BC 的極點 K 。

□

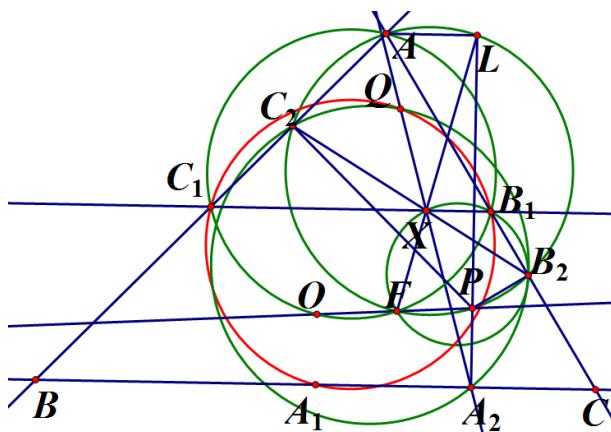


引理 9. 設 P 對三角形 ABC 的垂足三角形為 A_2, B_2, C_2 ，三邊中點為 A_1, B_1, C_1 ， B_1C_1 和 B_2C_2 交於 X ， PO 交 (AO) 於 F ，則 A_2X 過 F 對 B_1C_1 的對稱點 Q ，且 Q 在 $(A_1B_1C_1)$ 和 $(A_2B_2C_2)$ 上。

證明.

1. 設 A_2 對 B_1C_1 的對稱點 L ，則 L 在 (AP) 上。 $(AO) \angle XB_1F = \angle C_1AF = \angle C_2B_2F$ 得 B_1B_2FX 共圓。
2. 因 $XB_1 \parallel AL$ ，因 B_1B_2FX 共圓與 LB_2FA 共圓，由同一法得 LFX 共線(有向角)。
3. 對 B_1C_1 對稱得到 Q 為 A_2X 交 $(A_1B_1C_1)$ ，故 $XQ \times XA_2 = XF \times XL = XB_1 \times XC_1$ 得到 Q 在 $(A_2B_2C_2)$ 上。

□

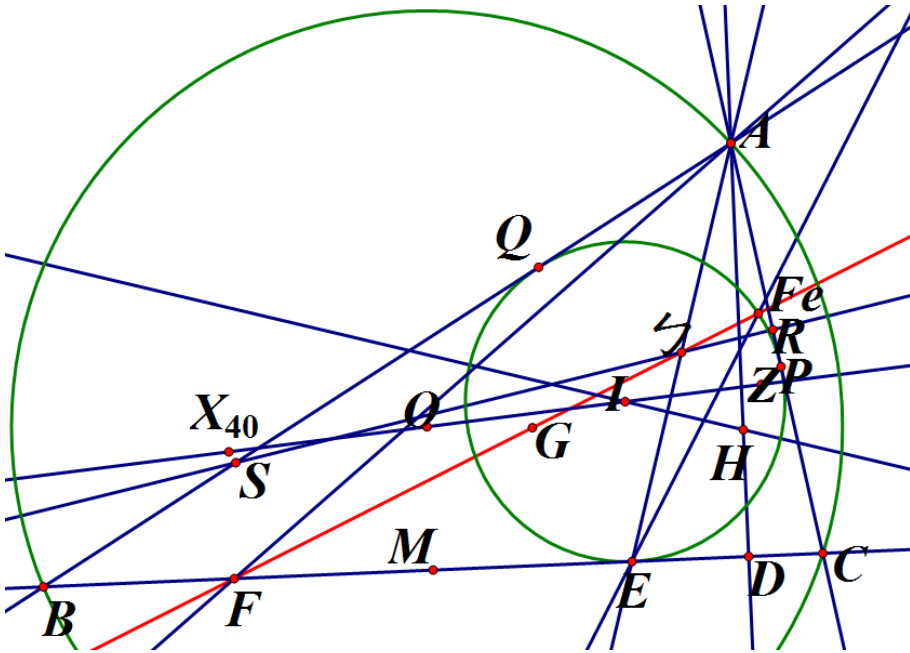


定理 21. AE, RS, GF 交於一點 ω 。

證明.

1. $AG : GM = 2 : 1$ ，所以 G 是 AEF 的重心，所以 FG 過 AE 中點。
2. 令 (AO) 交 OI 於 Z ，由 **引理 6**， Z 對 BC 中位線的對稱點為 Fe （垂足圓交九點圓）。作點 $X(40)$ 使 O 為 $X(40)$ 與 I 的中點，顯然有 F, R, S 是 $X(40)$ 的垂足三角形，而 $X(40)$ 在 OI 上，由 **引理 8** 所以 FFe, RS 交在中位線上，由同一法，可得 AE, RS, GF 交於一點 ω 。

□



3 結論

本文考慮 $\triangle ABC$ 中，內心與歐拉線上的特定點之連線平行底邊 $\overline{BC}$ 的延伸性質，這些特定六個三角形的心為垂心 H 、重心 G 、外心 O 、九點圓圓心 N 、Schiffler 點 Sc 、De Longchamps 點 L ，研究發現點與線之間交織出美麗的共線、共圓、垂直、平行、重合或其他特殊定角。

3.1 $IH \parallel BC$

利用 Monge 定理與簡單的算長度，可以得到費爾巴哈點在兩條主要的線上： FI, HE 。然後就會得到費爾巴哈雙曲線上的極點極線關係，並得到一些比較不顯然但又美麗的性質。

3.2 $IO \parallel BC$

同樣利用 Monge 定理與算長度可以得到 $\angle AIH = 90^\circ$ ，之後算角度會得到一些常見的線有互相平行的關係。因為事實上切點三角形的垂心對費爾巴哈雙曲線的極線是 IH （對所有三角

形都會對)，所以確認這個點的位置很有用。而因為角度的關係畫出偽切圓時，也可以算到偽切圓中心在 MH 上，以及找到他跟位似中心的關係。

3.3 $IG \parallel BC$

根據比例關係可以直接得到 $\angle AIO = 90^\circ$ ，打上來就有 $IN \parallel AH$ 。而 $IH \perp AN_a$ 可以看成 I 打歐拉線轉直角，或是也可以直接想成 AIH 的垂心是 N_a 。因為長度的關係實在是太多了，所以基本上怎麼連怎麼共線，怎麼畫怎麼共圓。所以因為性質太多而以兩個比較炫的六點共圓作結。雖然圖比較大，可是裡面的證明也都是相當顯然的。可能看起來會覺得是硬湊的結論，但請讀者一定要理解我。

3.4 $IN \parallel BC$

定理 13 有一個小推廣就是，若 P, Q 互為等角共軛點， PQ 中點 M 。 IM 方向無窮遠點的等角共軛點 K ，則 KPI 跟 KIQ 旋似，證明會比 **定理 13** 複雜上許多。然後藉由這個相似就可得到角度關係。注意到， $\angle AHI = \angle AIO = \angle HIN = 135^\circ$ 是一個違反直覺的角度，得到結論的同時也覺得很新潮。

3.5 $IS_c \parallel BC$

$\angle BAC = 60^\circ$ 是一個有非常多性質的角度，也有很多書籍會提到，所以就不再此琢磨了。

3.6 $IL \parallel BC$

這裡在證明上難度比較高，在預設前提下先發現到 (EE') 過 Fe ，所以就可算角度，藉由兩次一連串的算角度就會分別得到 Y 跟 F 分別在 FeG 上。因為注意到 BC 對費爾巴哈雙曲線的極點的位置（也可以利用前面提到的切點三角形的垂心對費爾巴哈雙曲線的極線是 IH ），所以可以得到有 5 條線通過 K ，然後再利用封騰定理的引理就可以得到有另一個點也在神奇的 FeG 上，因為 A 到 Z 都用完了，所以我就取名叫「ㄣ」了。

在這邊附上封騰定理（Fontene），三角形 ABC 一點 P ， P 到三邊的垂足 DEF ， ABC 三邊中點 JKL ，使得 ABC, DEF, JKL 齊序（對應），令 EF 交 KL 於 X ，同理定義 Y, Z ，則 DX, EY, FZ 交於一點 T ， T 為 P 的等角共軛點 Q 跟 ABC 的龐色列點。而龐色列點的定義是四個不構成垂心組的點 $ABCD$ ，則四個三角形圍成的四個九點圓會交於 $ABCD$ 的龐色列點。

3.7 未來研究及應用

本文目前只有簡單討論內心與其他主要心連線平行底邊的情況，相信未來可以做其他心之間的其他角度關係或共線性質。又或是關注上述結論是否是等價命題，即以定理導出的共線或定角的前提下，是否也直接表明了原三角形的內心與其他心的連線與底邊平行？預期能豐富這個研究的內涵，並找出一些新發現。

我也相信還有很多歐拉線上的點與內心連線平行底邊後會有特殊的性質等著去發現。

如果把研究推廣成內心連某一心平行 BC 時也會有很多內容。例如當內心連共軛重心平行底邊的時候，會等價費爾巴哈點在 ABC 中線上並可以推導出重要結論，例如：2017 年 CMO P2 題（2017 年中國數學奧林匹亞試題）。雖然他不在研究範圍裡，但我把一些做出來的結論放在這裡。

這樣類型的題目不太容易找，因為難以找到共通點，可能會跟某些人的自編題等等重覆，但就我目前所知並沒有人做一個這樣的研究，這些結論很有可能全是新的。

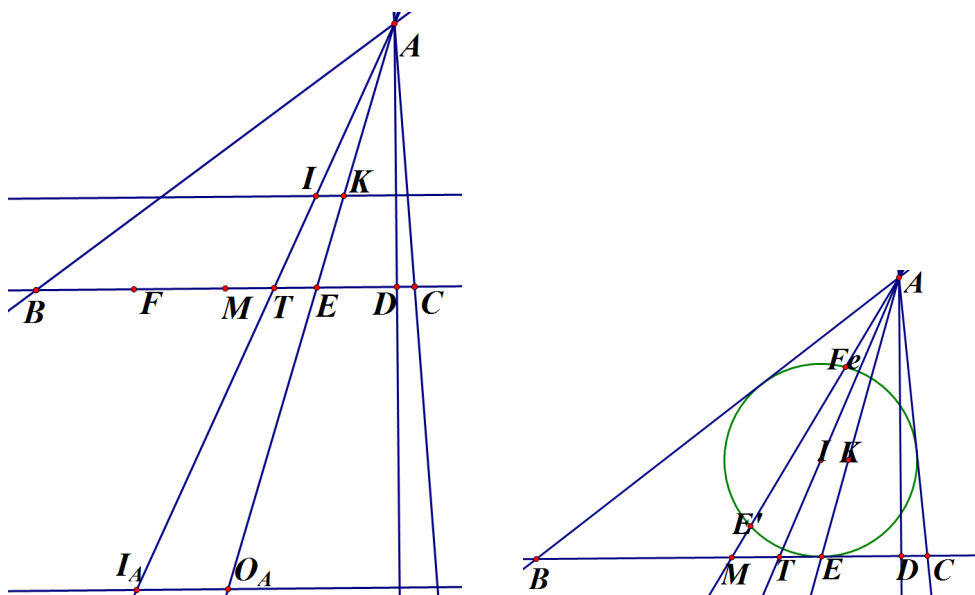
3.7.1 內心與共軛重心（簡稱 K 點）連線平行底邊性質研究

給定 $\triangle ABC$ 中， $IK \parallel BC$ 。

定理 22. AK 過 E 。

證明.

令 AK 交 BCE^* ，作出 B, C 對 (ABC) 的切線交於 O_A ，則因為 $(A, E^*; K, O_A) = -1 = (A, T; I, I_A)$ ，所以 $\frac{AE^*}{AO_A} = \frac{AT}{AI_A}$ 垂直投影到 BC 得到 $DE^* \times DF = DT \times DM$ （調和），所以 $E = E^*$ 。□



定理 23. AM 過 Fe 。

證明.

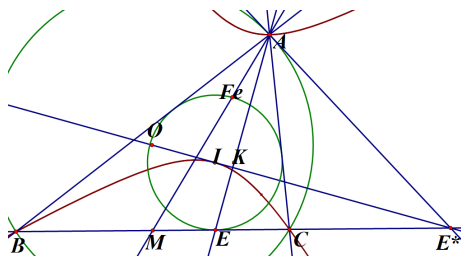
由性質 1，令 E 對 AI 對稱點 E' ，則 $ME'Fe$ 共線，但因為 AK, AM 為等角共軛線，所以 $ME'A$ 共線，故 AM 過 Fe 。□

定理 24. A wrt (ABC) 的切線交 BC 於 E^* ，則 OIE^* 共線且垂直 AE 。

證明.

1. AM 過 Fe ，所以 A 對費爾巴哈雙曲線的切線平行 BC ，對 A 作等角共軛變換及等價 A wrt (ABC) 的切線交 BC 於 E^* ，因為平行線跟切線為等角共軛線。
2. 而因為 AKE 共線， $(B, C; E, E^*) = -1$ ，所以 E^* 對內切圓的極線是 AE ，綜上得到 OIE^* 共線且垂直 AE 。

□



引理 10. 任意三角形中， Fe 對切點三角形的史坦納線是 OI 。

證明.

略。(參考資料 <http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200905.pdf>)

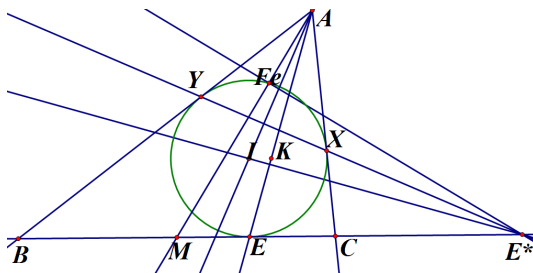
□

定理 25. $\angle AFeE^* = 90^\circ$

證明.

令 (I) 切兩邊於 X, Y ，則 XY 過 E^* 注意到 $AE \perp E^*I$ ， AI 垂直 XY ，而因為 Fe 對 XY 的對稱點在 IE^* 上所以由 A 出發的三條線跟由 E^* 出發的三條線夾角一樣，即 $\angle AFeE^* = 90^\circ$ 。

□



參考文獻

- [1] Kimberling(1997) - Major Centers of Triangle. Amer. Math. Monthly, 104(5), 431-438.
- [2] Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers, Mar, 2017.
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
- [3] 鄭容濤、郭立生 (2014)，三角形等角、等截、角比例共軛點之推廣研究。
- [4] 游森棚 (2014)，給師生的數學科展建議。
<http://www.ntsec.gov.tw/FileAtt.ashx?id=2394>。
- [5] Jan Vonk(2009) - The Feuerbach Point and Reflections of the Euler Line.
<http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200905.pdf>.

作品評語

游森棚教授
國立臺灣師範大學數學系

本篇作品考慮以下的設定: 給定一三角形, 若內心與某個特別的心, 兩者連線與底邊 BC 平行, 則此三角形會出現什麼性質?

作者分別選取了六個特別的心 (垂心, 外心, 重心, 九點圓心, Schiffler 心, De Longchamps 心), 接著針對每一個心, 用綜合幾何的方法針對如上的問題導出各自的幾何性質, 諸如共圓, 共線, 共點等。

本文堅持採用綜合幾何方法切入, 不少性質相當精巧。作者對綜合幾何方法非常熟練, 若干性質的證明需做十餘條輔助線與輔助圓, 配合幾何變換與許多已知的結果才能得到, 顯現了作者相當強的數學能力。未來若能進行高等數學的研究, 發展值得期待。

然而三角形的心 (center) 的性質是相當古典的幾何題材, 目前三角形的心已經超過一萬個。因此可以預期的是必會有源源不絕的幾何性質。若採平面幾何證明, 常需要逐個問題考慮, 沒有共通性, 是較為不足之處。

關於三角形心的研究採取三線性座標座標 (trilinear coordinates) 或是面積座標 (area coordinates) 是常用的方法, 兩者都也已經發展成相當完備的工具。將幾何問題化為代數處理, 不僅是對於孤立的問題有統一的處理方式, 更希望的是能夠發展出理論。採用這些工具, 或許能有機會有較高的觀點處理本文所引出的問題。