n 邊形內接相似於某 m 邊形的做法

國立臺南第一高級中學 洪苡皓
指導老師：彭威銘

Abstract

In this project, we discovered a way to make a triangle similar to a target triangle that can be inscribed in any given triangle. Then we found that every triangle we've made in a given triangle seems to rotate and stretch around a particular point. Therefore we try to find out the proof of the rotating point and its behavior. We also succeeded in extending the problem into making a triangle inscribed in any given polygon, making a m-shaped polygon inscribed in any given n-shaped polygon, and even making a m-shaped polygon on any given m straight lines.

中文摘要

對於三角形內接三角形的問題，本文給出在任意三角形中內接相似於某標的三角形之子三角形作法，並發現這無限多個子三角形都繞同一個中心旋轉及伸縮，所以接下來證明旋伸中心的存在及找到它的方法，並研究出與它有關的諸多性質。然後為將問題延伸到一般的情況，依序研究 n 邊形內接相似於某標的三角形、n 邊形內接相似於某標的 m 邊形的作法與解法數討論。最後發展到在 m 條直線上取點作相似於與某標的 m 邊形的子 m 邊形作法。

1 簡介

1.1 研究動機

對於三角形內接三角形的問題，本文給出在任意三角形中內接相似於某標的三角形之子三角形作法，並發現這無限多個子三角形都繞同一個中心旋轉及伸縮，所以接下來證明旋伸中心的存在及找到它的方法，並研究出與它有關的諸多性質。然後為將問題延伸到一般的情況，依序研究 n 邊形內接相似於某標的三角形、n 邊形內接相似於某標的 m 邊形的作法與解法數討論。最後發展到在 m 條直線上取點作相似於與某標的 m 邊形的子 m 邊形作法。

2 研究內容

2.1 定義名詞

1. 先任意給定一個 m 邊形作為接下來所要作的相似形對象，稱為「**標的 m 邊形**」。

2. 依序 $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 設定範圍 L_i (可為直線或直線上的部分圖形)後，在每一 L_i 上取出點 E_i'，作出與標的 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 相似的 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$ (其中 E_i' 為 E_i 之對應點)，稱為「**子 m 邊形**」。收集所有子 m 邊形而成之集合表示成「**$\{m$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_m)\}$**」。

3. 兩個相似多邊形對應頂點繞行時針方向，若相同則稱「**同相似**」；若相反則稱「**反相似**」。

4. $\{m$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_m)\}$ 中的子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$ 與 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m$ 同相似者稱為「**同子 m 邊形**」；反相似者稱為「**反子 m 邊形**」。
   而收集所有同子 m 邊形之集合表成「**$\{$同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)\}$**」；收集所有反子 m 邊形之集合表成「**$\{$反m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_m)\}$**」。

5. 元素屬於同一個 {同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$} 或屬於同一個 {反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$} 者，稱為「**同組子 m 邊形**」。

6. 同一個 {同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$} 或同一個 {反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$} 中的所有同組子 m 邊形有時會繞同一點旋轉及伸縮、有時只有伸縮，稱此點為該集合的「**旋伸中心**」，底下習慣以 R 表之。

7. 同一個 {同 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$} 或同一個 {反 m 邊形 $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$} 中的所有同組子 m 邊形 $E_1'E_2'\cdots E_m'$，其頂點 E_i' 在 L_i 上的變動範圍以「S_i **{同 m 邊形** $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$**}**」或「$S_i$ **{反 m 邊形** $E_1E_2\cdots E_m(L_1\times L_2\times\cdots\times L_m)$**}**」表之。

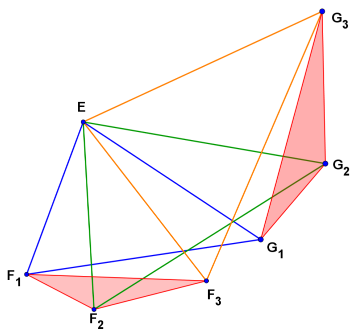
2.2 三直線取點作子三角形的方法

2.2.1 作法

引理 1. 若 $\triangle EF_1G_1\sim\triangle EF_2G_2\sim\triangle EF_3G_3$（同相似），則

1. $\triangle F_1F_2F_3\sim\triangle G_1G_2G_3$

2. 當 F_1、F_2、F_3 共線時，G_1、G_2、G_3 亦共線。



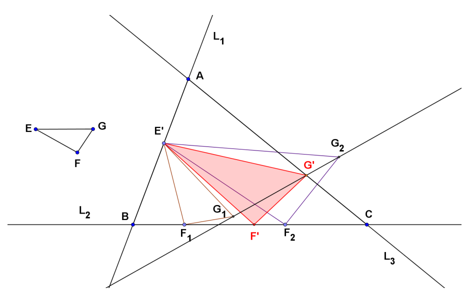
證明.

1. 在 $\triangle EF_1F_2$ 與 $\triangle EG_1G_2$ 中，
因 $\angle F_1EF_2=\angle F_1EG_1-\angle F_2EG_1=\angle F_2EG_2-\angle F_2EG_1=\angle G_1EG_2$，
又 $\overline{EF_1}:\overline{EF_2}=\overline{EG_1}:\overline{EG_2}$， 所以 $\triangle EF_1F_2\sim\triangle EG_1G_2$ （SAS 相似），
得 $\angle EF_2F_1=\angle EG_2G_1$，同理得 $\angle EF_2F_3=\angle EG_2G_3$。
上兩式相加得 $\angle F_1F_2F_3=\angle G_1G_2G_3$，同理亦得 $\angle F_1F_3F_2=\angle G_1G_3G_2$。
故 $\triangle F_1F_2F_3\sim\triangle G_1G_2G_3$ （AA 相似）。

2. 由 1. 明顯可得。

□

引理 2. 依序在任意三相異直線上取點作子三角形方法如下：



已知. 標的 $\triangle EFG$，任意三直線 L_1、L_2、L_3。

求作. $\triangle E'F'G' \in \{\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$。

作法.

1. 在 L_1 上取一點 E'。
2. 在 L_2 上任取兩點 F_1、F_2，分別作 $\triangle E'F_1G_1$、$\triangle E'F_2G_2$ 同相似於 $\triangle EFG$。
3. 設直線 G_1G_2 交 L_3 於 G'。
4. 作 $\triangle E'G'F'$ 同相似於 $\triangle EGF$，則 $\triangle E'F'G'$ 即為所求。

註：若無法作出，換成在 L_2 上重複相對應步驟就能作出，其理由等旋伸中心討論後便知。

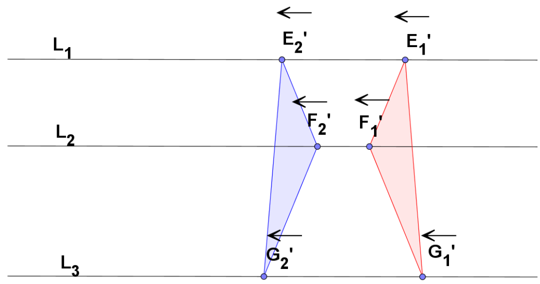
證明.

因 $\triangle E'F_1G_1 \sim \triangle E'F'G' \sim \triangle E'F_2G_2$（同相似）且 G_1、G'、G_2 共線。由 **引理** 1 知 F_1、F'、F_2 共線，所以 $F' \in L_2$。 □

2.2.2 三直線取點作出的同組子三角形之旋伸中心探討

依三相異直線 L_1、L_2、L_3 相交情形與 $\{\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$ 中同子 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 組與反子 $\triangle E_2'F_2'G_2'$ 組落在哪區，分四類型討論旋伸中心 R：

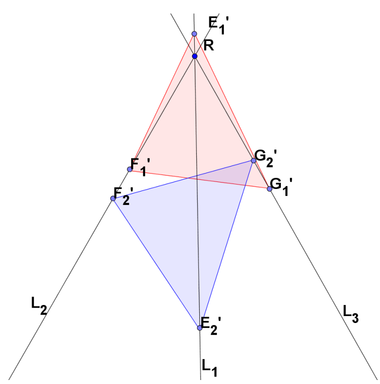
- ＜型a＞ 三線平行：同組子三角形沒有旋轉，沒有伸縮，只有平移。



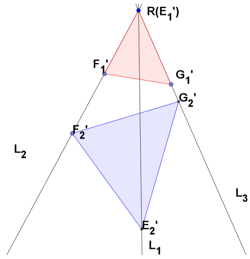
- ＜型b＞ 三線共點：同組子三角形僅有伸縮，R 在三直線交點。

  設 θ_i 表示以 R 為旋轉中心，將 L_i 分別往順、逆時針兩個方向旋轉到下一條直線之旋轉角度和：

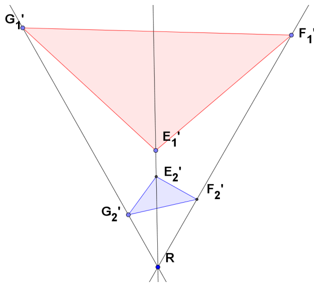
  – 若 $E < \theta_1$ 且 $F < \theta_2$ 且 $G < \theta_3$，則 R 恰落在同子組或反子組之一的所有三角形內。如圖 R 落在 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 同組子三角形內。



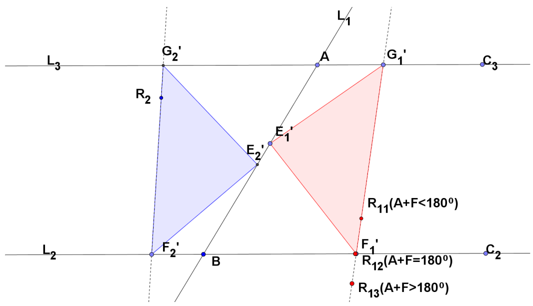
– 若 $E = \theta_1$ 或 $F = \theta_2$ 或 $G = \theta_3$，則 R 就是同子組或反子組之一的所有子三角形同一對應頂點。如圖 $E = \theta_1$，所以 $R = E_1$。



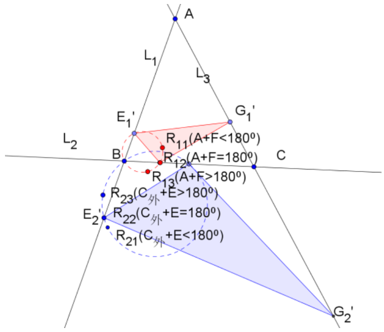
– 若 $E > \theta_1$ 或 $F > \theta_2$ 或 $G > \theta_3$，則 R 落在同子組與反子組所有三角形外。



- <型c> 兩線平行：同組子三角形會旋轉及伸縮，R 在子三角形兩平行線上之頂點的連線上。只討論子 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 組中 R 的局部相對位置即可，設 $\angle C_3AB = A$，$\angle C_2BA = B$。



- <型d> 圍三角形：同組子三角形會旋轉及伸縮，區分成在旋伸過程中會出現內接於三直線所圍成三角形 $\triangle ABC$，如圖子 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 組，以 <型 d 內> 稱之；與側接於三直線所圍成三角形，如圖子 $\triangle E_2'F_2'G_2'$ 組，以 <型 d 側> 稱之。圖中並以落在 $\angle B$ 的內、外角區作分別，並討論 R 的局部相對位置。設 $\angle A$ 的內角 $= A$，$\angle C$ 的外角 $= C_{外}$。

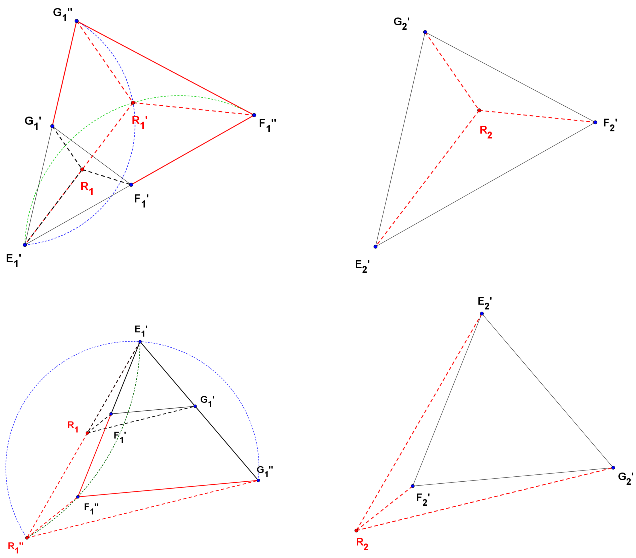


1. 為方便證明<型 b、c、d>的 R 具伸縮中心功能，先引入一引理。

引理 3. 若 $\triangle E_1'F_1'G_1' \sim \triangle E_2'F_2'G_2'$（同相似），無論點 R_1、R_2 在哪，只要滿足

$$\angle E_1'R_1'F_1' = \angle E_2'R_2'F_2'、\angle F_1'R_1G_1' = \angle F_2'R_2G_2'、\angle G_1'R_1E_1' = \angle G_2'R_2E_2'，$$

則 $\angle R_1E_1'F_1' = R_2E_2'F_2'$。



證明.

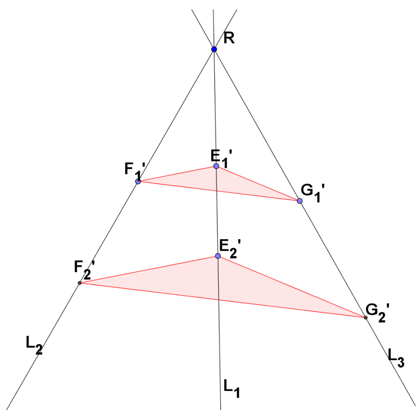
R_i 在 $\triangle E_i'F_i'G_i'$ 某邊所在直線上（含頂點）的情況明顯可證，所以只呈現在 $\triangle E_i'F_i'G_i'$ 內部及外部兩種圖示，但其證法皆同，如下：

以 E_1' 為伸縮中心作 $\overline{E_2'F_2'}/\overline{E_1'F_1'}$ 倍的伸縮變換，將 F_1' 變換到F_1''，G_1' 變換到 G_1''，R_1 變換到 R_1'。則 $\triangle E_1'F_1''G_1'' \cong \triangle E_2'F_2'G_2'$ 且 $\angle E_1'R_1'F_1'' = \angle E_1'R_1F_1' = \angle E_2'R_2F_2'$，$\angle E_1'R_1'G_1'' = \angle E_1'R_1G_1' = \angle E_2'R_2G_2'$。

將 $\triangle E_2'F_2'G_2'$ 疊到 $\triangle E_1'F_1''G_1''$ 上時因 R_2 必在 $\triangle E_1'R_1'F_1''$ 與 $E_1'R_1'G_1''$ 的外接圓上所以 R_2 會正好疊在 R_1' 的位置上得 $\angle R_2E_2'F_2' = \angle R_1'E_1'F_1'' = \angle R_1E_1'F_1'$。

□

2. <型b> 中 R 具伸縮中心功能的確認。

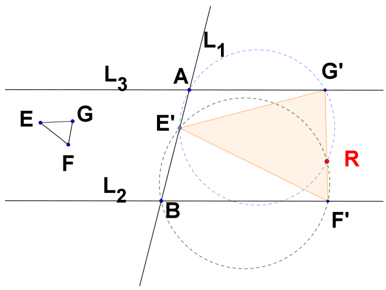


證明.

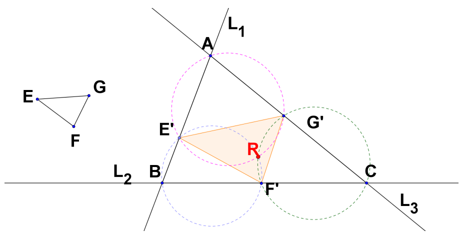
設 $\triangle E_1'F_1'G_1'$，$\triangle E_2'F_2'G_2' \in \{$同$\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$，
則 $\angle E_1'RF_1' = \angle E_2'RF_2'$，$\angle F_1'RG_1' = \angle F_2'RG_2'$，$\angle G_1'RE_1' = \angle G_2'RE_2'$
由 **引理 3** 得 $\angle RE_1'F_1' = \angle R_2E_2'F_2'$，即 $\triangle RE_1'F_1' \sim \triangle RE_2'F_2'$ （AA相似），
所以 $\overline{RE_1}' : \overline{RE_2'} = \overline{RF_1'} : \overline{RF_2'}$，同理得 $\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RG_1'} : \overline{RG_2'}$。 因此 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 是以 R 為伸縮中心變換到 $\triangle E_2'F_2'G_2'$。 □

3. <型c、d>中 R 的存在性證明與具旋轉、伸縮中心功能確認。

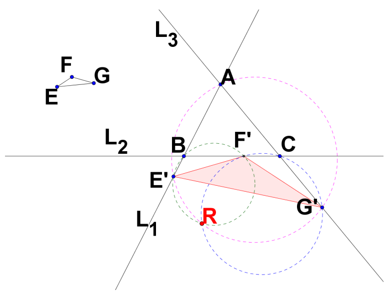
- R 的找法



<型c>



<型d內>



<型d側>

作法：

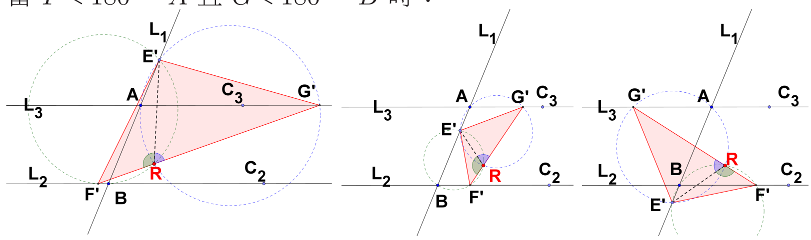
(a) 先作一同子 $\triangle E'F'G'$。

(b) 分別作 $\triangle AE'G'$、$\triangle BE'F'$、$\triangle CF'G'$ 的外接圓（<型c>沒有 $\triangle CF'G'$ 的外接圓），則三圓會交於一點 R 即為所求。

- R 的存在性證明

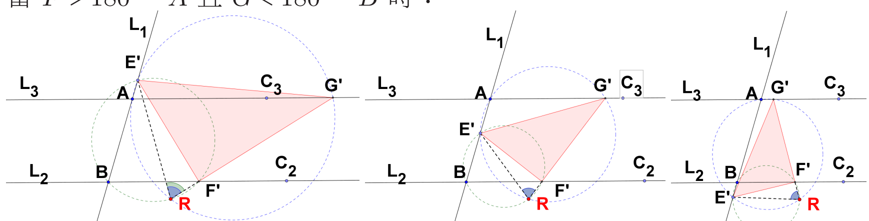
  (a) **證明<型c>兩外接圓交點在子三角形邊 $F'G'$ 所在直線上：**
  設 $\triangle AE'G'$ 與 $\triangle BE'F'$ 兩外接圓異於 E' 的交點為 R，觀察當頂點 E' 在 L_1 上由遠端移近，依序經 A、B 再遠離的過程中，子 $\triangle E'F'G'$ 的 $\angle E'RG'$、$\angle E'RF'$ 值之變化，進而得證 R 亦在直線 $F'G'$上。
  設 $\angle C_3AB = A$，$\angle C_2BA = B$：

  – 當 $F < 180° - A$ 且 $G < 180° - B$ 時：



  R 在兩平行線內側，子 $\triangle E'F'G'$ 變動過程中保持 $\angle E'RG' = 180° - A$，$\angle E'RF' = 180° - B$，所以 $\angle F'RG' = \angle E'RG' + \angle E'RF' = 180°$。

  – 當 $F > 180° - A$ 且 $G < 180° - B$ 時：

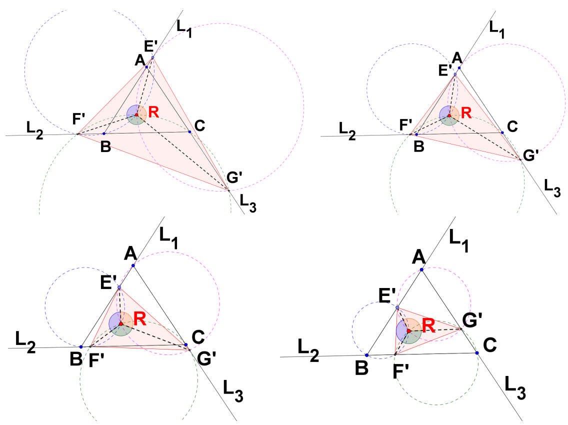


  R 在兩平行線外側（過點 B 線 L_3 外側），子 $\triangle E'F'G'$ 變動過程中保持 $\angle E'RG' = 180° - A$，$\angle E'RF' = B$，所以 $\angle E'RG' = \angle E'RF'$。

  (b) **證明<型d>三外接圓會交於一點：**
  設 $\triangle AE'G'$ 與 $\triangle BE'F'$ 兩外接圓異於 E' 的交點為 R，觀察當頂點 E' 在 L_1 上由遠端移近，依序經 A、B 再遠離的過程中，子 $\triangle E'F'G'$ 的 $\angle E'RG'$、$\angle E'RF'$ 、$\angle F'RG'$ 值之變化，進而得證 R 亦在 $\triangle CG'F'$ 外接圓上。

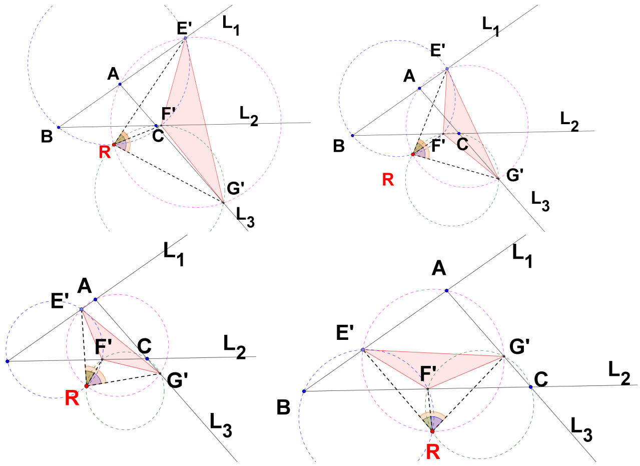
  – <型d內>

    $*$ 當 $F < A_{外}$ 且 $G < B_{外}$ 且 $E < C_{外}$ 時：



  R 在 $\triangle ABC$ 內，子$\triangle E'F'G'$ 變動過程中保持 $\angle E'RG' = A_{外}$，$\angle E'RF' = B_{外}$，所以 $\angle F'RG' = 360° - (\angle E'RG' + \angle E'RF') = C_{外}$。

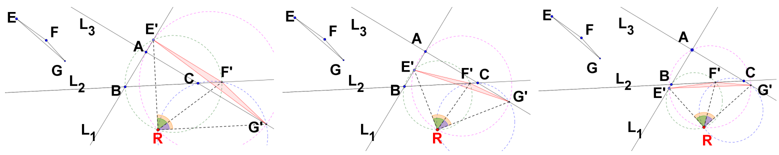
* 當 $F > A_{外}$ 且 $G < B_{外}$ 且 $E < C_{外}$ 時：



R 在 $\angle A$ 內與 $\triangle ABC$ 外，子 $\triangle E'F'G'$ 變動過程中保持 $\angle E'RG' = A_{外}$，$\angle E'RF' = B$，所以 $\angle F'RG' = \angle E'RG' - \angle E'RF' = C$。

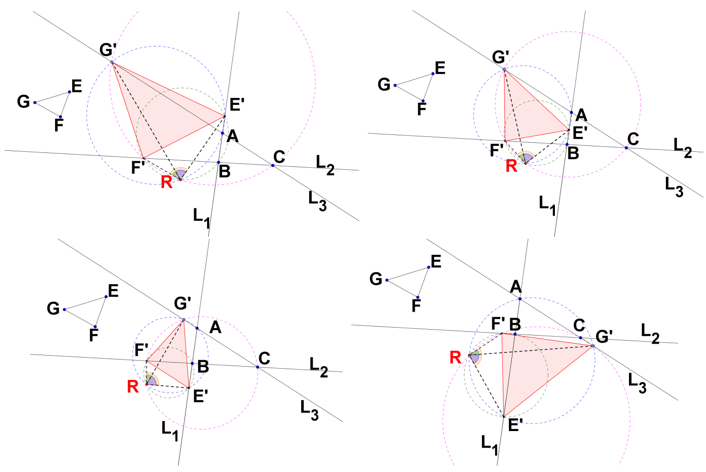
– <型d側>

* 當 $F < A$ 且 $G < B$ 且 $E > C$ 時：



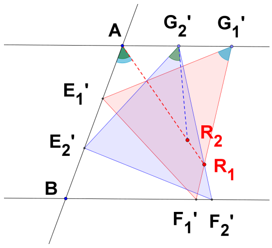
R 在 $\angle C$ 內與 $\triangle ABC$ 外，子 $\triangle E'F'G'$ 變動過程中保持 $\angle E'RG' = A$，$\angle E'RF' = B$，所以 $\angle F'RG' = \angle E'RG' + \angle E'RF' = C_{外}$。

* 當$F > A$且$G < B$且$E > C$ 時：

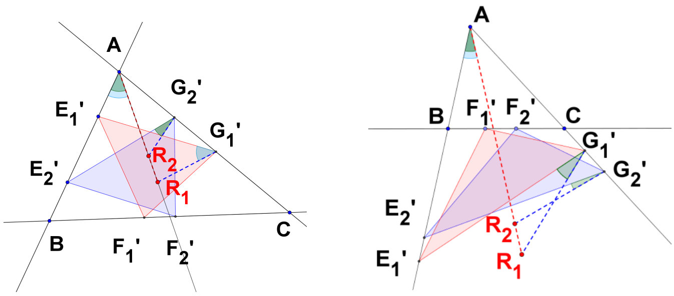


R 在 $\angle B$ 的對頂角內，子 $\triangle E'F'G'$ 變動過程中保持 $\angle E'RG' = A$，$\angle E'RF' = B_{外}$，所以 $\angle F'RG' = \angle E'RF' - \angle E'RG' = C$。

(c) **證明同組子三角形作出的點 R 皆位在同一位置：**



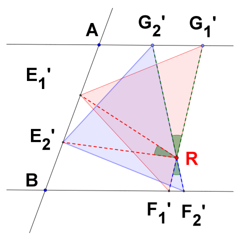
＜型c＞



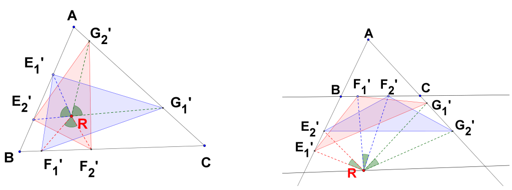
＜型d＞

設 $\triangle E_1'F_1'G_1'$、$\triangle E_2'F_2'G_2'$ 為同組兩個子三角形且各自仿 1. 的作法作出 R_1、R_2， 則 $\angle E_1'R_1F_1' = \angle E_2'R_2F_2'$，$\angle F_1'R_1G_1' = \angle F_2'R_2G_2'$，$\angle G_1'R_1E_1' = \angle G_2'R_2E_2'$，由 引理 3 知 $\angle R_1G_1'E_1' = \angle R_2G_2'E_2'$，又 A、E_1'、R_1、G_1' 共圓且 A、E_2'、R_2、G_2' 共圓，所以 $\angle R_1AB = \angle R_1G_1'E_1'$，$\angle R_2AB = \angle R_2G_2'E_2'$，得 $\angle R_1AB = \angle R_2AB$， 即 R_2 在直線 AR_1 上，同理 R_2 亦在直線 BR_1上，故 $R_1 = R_2$。

(d) **證明同組子三角形皆對點 R 旋轉及伸縮：**



＜型c＞

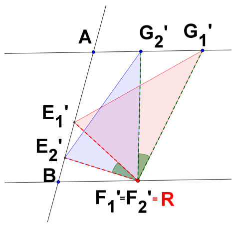


＜型d＞

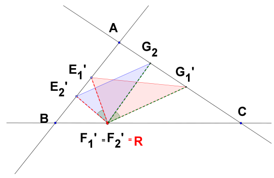
設 $\triangle E_1'F_1'G_1'$、$\triangle E_2'F_2'G_2'$ 為同組兩個子三角形且仿 1. 的方法作出 R。則 $\angle E_1'RF_1' = \angle E_2'RF_2'$，$\angle F_1'RG_1' = \angle F_2'RG_2'$，$\angle G_1'RE_1' = \angle G_2'RE_2'$。在 $\triangle RE_1'E_2'$ 與 $\triangle RG_1'G_2'$ 中，

因 $\angle E_1'RE_2' = \angle E_2'RG_2' - \angle E_1'RG_1' = \angle E_1'RG_2' - \angle E_1'RG_2' = \angle G_1'RG_2'$，
又由 A、E_1'、R、G_1' 共圓得 $\angle RE_1'E_2' = \angle RG_1'G_2'$，
所以 $\triangle RE_1E_2 \sim \triangle RG_1G_2$（AA 相似），即 $\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RG_1'} : \overline{RG_2'}$。
同理得 $\angle E_1'RE_2' = \angle F_1'RF_2'$ 與 $\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RF_1'} : \overline{RF_2'}$，
因 $\angle E_1'RE_2' = \angle F_1'RF_2' = \angle G_1'RG_2'$ 且 $\overline{RE_1'} : \overline{RE_2'} = \overline{RF_1'} : \overline{RF_2'} = \overline{RG_1'} : \overline{RG_2'}$，得證$\triangle E_1'F_1'G_1'$是以$R$為旋轉及伸縮中心變換到$\triangle E_2'F_2'G_2'$。

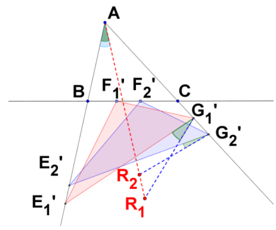
(e) **仿 (c)(d) 部分的證明，可知：**



＜型c＞：當 $F = 180° - A$ 時



＜型d內＞：當 $F = A_{外}$ 時



＜型d側＞：當 $E = C$ 時

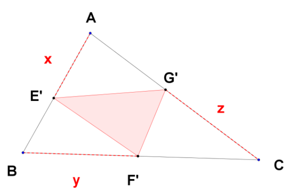
同組子 $\triangle E'F'G'$ 在變動過程中，頂點 E' 位置始終保持不變，且正好是旋伸中心 R 所在位置。

□

2.3 三角形三邊取點作內接子三角形的作法

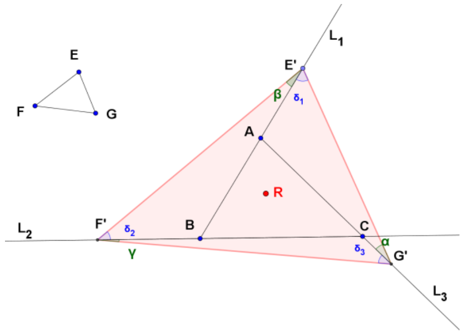
欲在 $\triangle ABC$ 中作 $\triangle E'F'G' \in \{\triangle EFG(\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA})\}$，由引理 2 作法可依序在 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 上取點作出 $\triangle EFG$ 的同相似及反相似三角形，由＜型d＞的觀察知必有一種經旋伸變換後會內接於 $\triangle ABC$。問題是要如何確保作出的子 $\triangle E'F'G'$ 三頂點皆能成功落在邊上而非邊外呢？所以要討論子 $\triangle E'F'G'$ 成功內接時（＜型d內＞），三頂點落下的範圍，然後在使用 引理 2 作法的第 1 步驟時就直接將點取入範圍內，即可成功作出內接子三角形。但因最後要探討到作內接 m 邊形，所以＜型d側＞與＜型c＞也一併討論。討論方式皆是觀察點 E' 由遠處漸漸接近 $\triangle ABC$，依序經點 A、B 後遠離，子 $\triangle E'F'G'$ 變動過程中旋入我們預設範圍時，算出 E'、F'、G' 確切落在哪。下以 r 表 $\triangle ABC$ 外接圓半徑；A、B、C 表三內角；a、b、c 表三對邊；$A_{外}$、$B_{外}$、$C_{外}$ 表三外角。E、F、G 表標的$\triangle EFG$ 三內角；e、f、g 表當下子$\triangle E'F'G'$ 三對邊。

1. ＜型d內＞：預設 $E' \in \overline{AB}$、$F' \in \overline{BC}$、$G' \in \overline{CA}$；變動過程分別算出
   $x = \overline{E'A}$、$y = \overline{F'B}$ 、$z = \overline{G'C}$ 的變動區間。



   (a) R 在$\triangle ABC$ 內 ($E < C_{外}$ 且 $F < A_{外}$ 且 $G < B_{外}$)：
   $x \in [x_1, x_2]$、$y \in [y_1, y_2]$、$z \in [z_1, z_2]$

i. 旋入



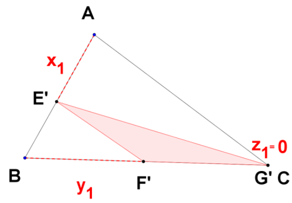
設 E'、F'、G' 旋入角度分別為 α、β、γ。利用輔助角 δ_1、δ_2、δ_3 列式：

$$\begin{cases}\delta_1 = A-\alpha = E-\beta \\ \delta_2 = B-\beta = F-\gamma \Rightarrow E' \text{ 先 } F' \Leftrightarrow \alpha-\beta = A-E<0 \Leftrightarrow E>A \\ \delta_3 = C-\gamma = G-\alpha\end{cases}$$

同理 F' 先 $G' \Leftrightarrow F>B$；G' 先 $E' \Leftrightarrow G>C$

E'、F'、G' 旋入的次序分六種：

A. $E' \to F' \to G'$ （$E>A$ 且 $F>B$ 且 $G<C$）



因點 G' 位於點 C 上，所以 $z_1=0$。由正弦定理：

$$\frac{x_1}{b} = \frac{\sin(C-G)}{\sin(B+G)} \Rightarrow x_1 = \frac{2\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}r$$

$$\frac{y_1}{g}\times\frac{g}{f}\times\frac{f}{b} = \frac{\sin(F-B)}{\sin B}\times\frac{\sin G}{\sin F}\times\frac{\sin A}{\sin(B+G)} \Rightarrow y_1 = \frac{2\sin A\sin(F-B)\sin G}{\sin F\sin(B+G)}r$$

B. $E' \to G' \to F'$($E>A$ 且 $F<B$ 且 $G<C$)

$$x_1 = \frac{2\sin E - A\sin F\sin C}{\sin E\sin(A+F)}r, y_1=0, z_1 = \frac{2\sin A\sin(B-F)}{\sin A+F}r$$

C. $F' \to E' \to G'$ ($E<A$ 且 $F>B$ 且 $G<C$)

$$x_1 = \frac{2\sin B\sin(C-G)}{\sin(B+G)}r, y_1 = \frac{2\sin(F-B)\sin F\sin A}{\sin E\sin(B+G)}r, z_1=0$$

D. $F' \to G' \to E'$($E<A$ 且 $F>B$ 且 $G>C$)

$$x_1=0, y_1 = \frac{2\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}r, z_1 = \frac{2\sin(G-C)\sin E\sin B}{\sin G\sin(C+E)}r$$

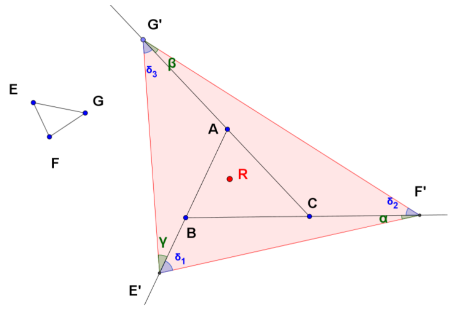
E. $G' \to E' \to F'$($E>A$ 且 $F<B$ 且 $G>C$)

$$x_1 = \frac{2\sin(E-A)\sin F\sin C}{\sin E\sin(A+F)}r, y_1=0, z_1 = \frac{2\sin A\sin(B-F)}{\sin(A+F)}r$$

F. $G' \to F' \to E'$ ($E<A$ 且 $F<B$ 且 $G>C$)

$$x_1=0, y_1 = \frac{2\sin C\sin(A-E)}{\sin(C+E)}r, z_1 = \frac{2\sin(G-C)\sin E\sin B}{\sin G\sin(C+E)}r$$

ii. 旋出

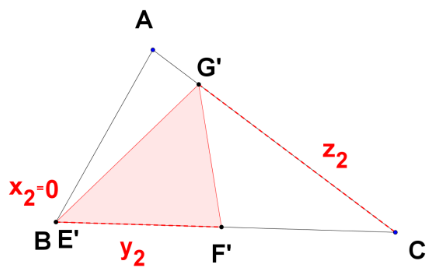


設 E'、F'、G' 已旋出角度分別為 α、β、γ。利用輔助角 δ_1、δ_2、δ_3 列式：

$$\begin{cases}\delta_1 = B-\alpha = E-\beta \\ \delta_2 = C-\beta = F-\gamma \Rightarrow E'\text{先}F' \Leftrightarrow \alpha-\beta = F-C>0 \Leftrightarrow F>C \\ \delta_3 = A-\gamma = G-\alpha\end{cases}$$

同理 F' 先 $G' \Leftrightarrow G>A$；G' 先 $E' \Leftrightarrow E>B$。
E'、F'、G'旋出的次序分六種：

A. $E'\to F'\to G'$（$E<B$ 且 $F>C$ 且 $G>A$）



$$x_2 = 2r\sin C, y_2 = \frac{2\sin A\sin G\sin C}{\sin F\sin(C+E)}r, z_2 = \frac{2\sin A\sin E}{\sin(C+E)}r$$

B. $E'\to G'\to F'(E<B$ 且 $F>C$ 且 $G<A)$

$$x_2 = 2r\sin C, y_2 = \frac{2\sin A\sin G\sin C}{\sin F\sin(C+E)}r, z_2 = \frac{2\sin A\sin E}{\sin(C+E)}r$$

C. $F'\to E'\to G'(E<B$ 且 $F<C$ 且 $G>A)$

$$x_2 = \frac{2\sin B\sin F}{\sin(A+F)}r, y_2 = 2r\sin B, z_2 = \frac{2\sin B\sin E\sin A}{\sin G\sin(A+F)}r$$

D. $F'\to G'\to E'(E>B$ 且 $F<C$ 且 $G>A)$

$$x_2 = \frac{2\sin B\sin F}{\sin(A+F)}r, y_2 = 2r\sin B, z_2 = \frac{2\sin B\sin E\sin A}{\sin G\sin(A+F)}r$$

E. $G'\to E'\to F'(E>B$ 且 $F>C$ 且 $G<A)$

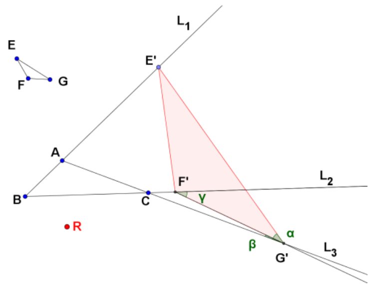
$$x_2 = \frac{2\sin C\sin F\sin B}{\sin E\sin(B+G)}r, y_2 = \frac{2\sin C\sin G}{\sin(B+G)}r, z_2 = 2r\sin B$$

F. $G'\to F'\to E'(E>B$ 且 $F<C$ 且 $G<A)$

$$x_2 = \frac{2\sin C\sin F\sin B}{\sin E\sin(B+G)}r, y_2 = \frac{2\sin C\sin G}{\sin(B+G)}r, z_2 = 2r\sin B$$

(b) R 在 A 內且 $\triangle ABC$ 外 ($E < C_{外}$ 且 $F > A_{外}$ 且 $G < B_{外}$)：
$x \in [x_1, x_2]$、$y \in [y_2, y_1]$、$z \in [z_1, z_2]$

i. 旋入

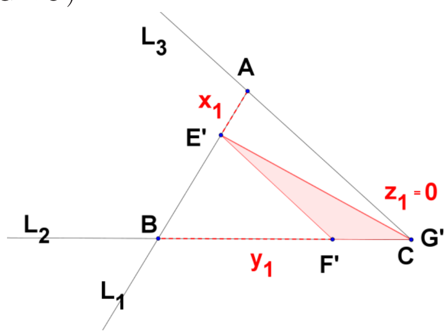


設 E'、F'、G' 旋入角度分別為 α、β、γ。

$$\beta = \alpha - G = \gamma - C \Rightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \text{ 且 } \gamma > \beta \Rightarrow F' \text{ 最先} \\ E' \text{ 先 } G' \Leftrightarrow \alpha - \gamma = G - C < 0 \Leftrightarrow G < C \end{cases}$$

E'、F'、G' 旋入的次序分二種：

A. $F' \to E' \to G'(G < C)$

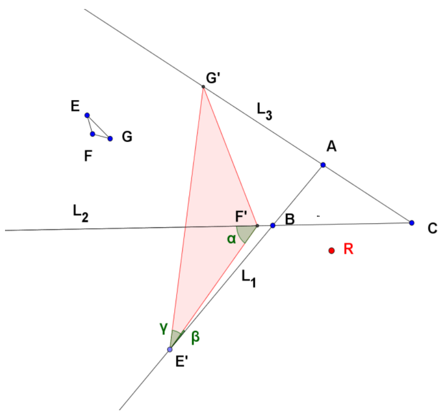


$$x_1 = \frac{2\sin B \sin(C-G)}{\sin(B+G)} r, y_1 = \frac{2\sin(F-B)\sin F \sin A}{\sin E \sin(B+G)} r, z_1 = 0$$

B. $F' \to G' \to E'$ $(G > C)$

$$x_1 = 0, y_1 = \frac{2\sin C \sin(A-E)}{\sin(C+E)} r, z_1 = \frac{2\sin(G-C)\sin E \sin B}{\sin G \sin(C+E)} r$$

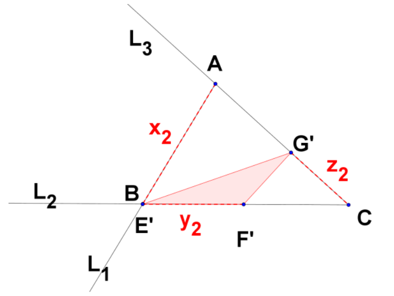
ii. 旋出



設 E'、F'、G' 旋入角度分別為 α、β、γ。

$$\beta = \alpha - B = \gamma - E \Rightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \text{ 且 } \gamma > \beta \Rightarrow F' \text{ 最後} \\ E' \text{ 先 } G' \Leftrightarrow \alpha - \gamma = B - E > 0 \Leftrightarrow E < B \end{cases}$$

A. $E' \to G' \to F'(E < B)$

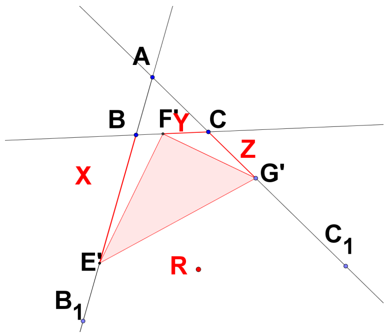


$$x_2 = 2r\sin C, y_2 = \frac{2\sin G\sin A\sin C}{\sin F\sin(A+E)}r, z_2 = \frac{2\sin A\sin E}{\sin(C+E)}r$$

B. $G' \to E' \to F'(E > B)$

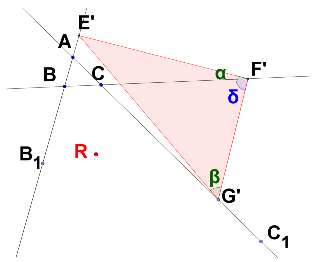
$$x_2 = 2r\sin C, y_2 = \frac{2\sin G\sin A\sin C}{\sin F\sin(A+E)}r, z_2 = \frac{2\sin A\sin E}{\sin(C+E)}r$$

2. <型d側>：預設 $E' \in \overrightarrow{BB_1}$、$F' \in \overline{BC}$、$G' \in \overrightarrow{CC_1}$；變動過程分別算出 $x = \overline{E'B}, y = \overline{F'C}, z = \overline{G'C}$ 的變動區間。



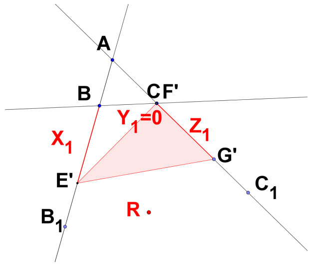
(a) R 在 $\angle A$ 內且 $\triangle ABC$ 外 ($E < C$ 且 $F > A$ 且 $G < B$)：
$x \in [x_1, x_2]$、$y \in [y_1, y_2]$、$z \in [z_2, z_1]$

i. 旋入



G' 已在預設範圍內，設 E'、F' 旋入角度分別為 α、β。利用輔助角 δ 列式：$\delta = C_{外} - \beta = F - \alpha \Rightarrow E'$ 先 $F' \Leftrightarrow \alpha - \beta = F - C_{外} < 0 \Leftrightarrow F < C_{外}$。
E'、F'、G' 旋入的次序分二種：

A. $G' \to E' \to F'(F < C_{外})$



因點 F' 位於點 C 上，所以 $y_1=0$。由正弦定理：

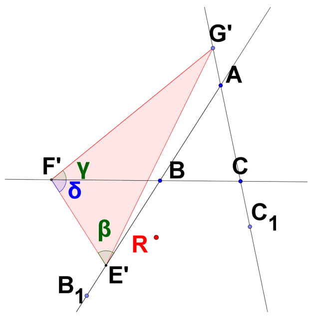
$$\frac{x_1}{a}=\frac{\sin(C_{外}-F)}{\sin(F-A)}\rightarrow x_1=\frac{2\sin A\sin(C+F)}{\sin(F-A)}r$$

$$\frac{z_1}{g}\times\frac{g}{a}=\frac{\sin E}{\sin G}\times\frac{\sin B}{\sin(F-A)}\rightarrow z_1=\frac{2\sin A\sin E\sin B}{\sin G\sin(F-A)}r$$

B. $G'\rightarrow F'\rightarrow E'(F>C_{外})$

$$x_1=0,y_1=\frac{2\sin A\sin(C+F)\sin E}{\sin F\sin(C-E)}r,z_1=\frac{2\sin A\sin E}{\sin(C-E)}r$$

ii. 旋出

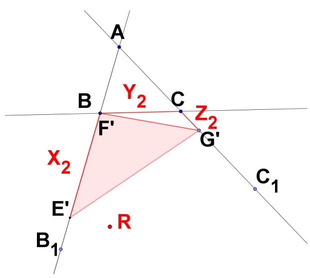


E' 在預設範圍內，設 F'、G' 已旋出角度分別為 β、γ。利用輔助角 δ 列式：

$\delta=B_{外}-\beta=F-\gamma\Rightarrow F'$ 先 $G'\Leftrightarrow\beta-\gamma=B_{外}-F>0\Leftrightarrow F<B_{外}$ 。

E'、F'、G' 旋出的次序分二種：

A. $F'\rightarrow G'\rightarrow E'(F<B_{外})$



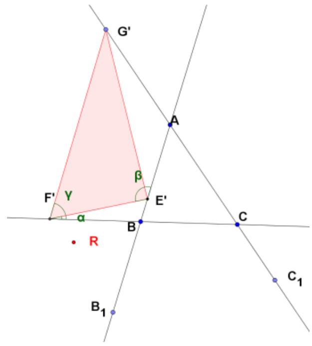
$$x_2=\frac{2\sin A\sin(B+E)}{\sin(A+F)}r,y_2=2r\sin A,z_2=\frac{2\sin A\sin G\sin C}{\sin E\sin(A+F)}r$$

B. $G'\rightarrow F'\rightarrow E'(F>B_{外})$

$$x_2=\frac{\sin A\sin G}{\sin(B-G)}r,y_2=\frac{2\sin A\sin E\sin B}{\sin E\sin(B-G)}r,z_2=0$$

(b) R 在 $\angle B$ 的對頂角內部 ($E>C$ 且 $F>A$ 且 $G<B$)：
$x\in[x_1,x_2]$、$y\in[y_2,y_1]$、$z\in[z_1,z_2]$

i. 旋入

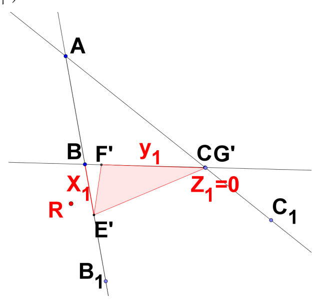


設 E'、F'、G' 旋入角度分別為 α、β、γ。

$$\alpha = \beta - B_{外} = \gamma - F \Rightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \text{ 且 } \alpha < \gamma \Rightarrow E' \text{ 最先} \\ F' \text{ 先 } G' \Leftrightarrow \beta - \gamma = B_{外} - F < 0 \Leftrightarrow F < B_{外} \end{cases}$$

E'、F'、G' 旋入的次序分二種：

A. $E' \to F' \to G' (F > B_{外})$



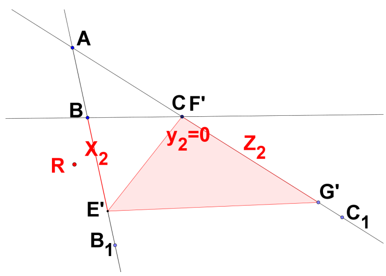
$$x_1 = \frac{2\sin A \sin G}{\sin(B-G)} r, y_1 = \frac{2\sin A \sin E \sin B}{\sin F \sin(B-G)} r, z_1 = 0$$

B. $E' \to G' \to F' (F < B_{外})$

$$x_1 = \frac{2\sin G \sin C \sin A}{\sin(F-A)\sin E} r, y_1 = 2r\sin A, z_1 = \frac{2\sin(F+B)\sin A}{\sin(F-A)} r$$

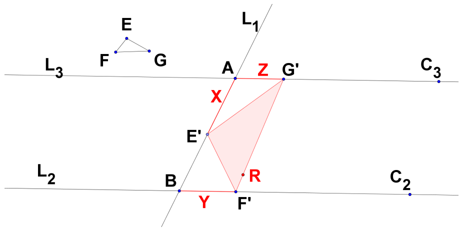
ii. 旋出

E'、G' 在預設範圍內，只需考慮 F' 旋出即可



$$x_2 = \frac{2\sin A \sin(C+F)}{\sin(F-A)} r, y_2 = 0, z_2 = \frac{2\sin A \sin E \sin B}{\sin G \sin(F-A)} r$$

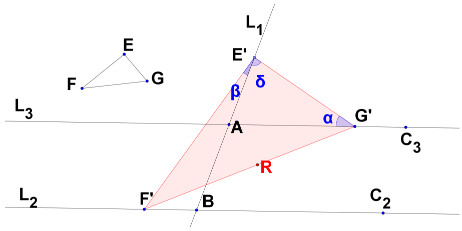
3. <型c>兩線平行：預設 $E' \in \overline{AB}$、$F' \in \overrightarrow{BC_2}$、$G' \in \overrightarrow{AC_3}$；變動過程分別算出 $x = \overline{E'A}$、$y = \overline{F'B}$ 、$z = \overline{G'A}$ 的變動區間。



設 $\angle C_3AB = A$，$\angle C_2BA = B$。

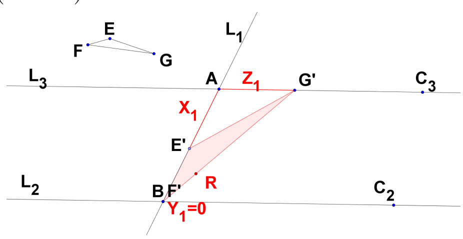
(a) R 在兩平行線 L_2、L_3 間($F < B$ 且 $G < A$)：
$x \in [x_1, x_2]$、$y \in [y_1, y_2]$、$z \in [z_2, z_1]$

i. 旋入



G' 已在預設範圍內，設 E'、F' 旋入角度分別為 α、β。利用輔助角 δ 列式：
$\delta = A - \alpha = E - \beta \Rightarrow E'$ 先 $F' \Leftrightarrow \alpha - \beta = A - E < 0 \Leftrightarrow E > A$。
E'、F' 旋入的次序分兩種：

A. $G' \to E' \to F'$ $(E > A)$



因點 F' 位於點 B 上，所以 $y_1 = 0$。由正弦定理：

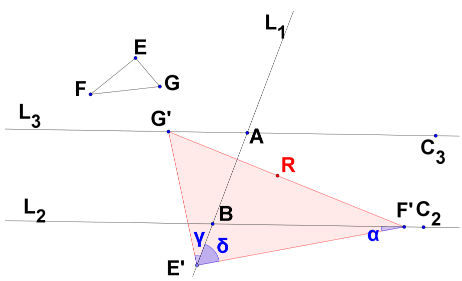
$$\frac{x_1}{f} \times \frac{f}{e} \times \frac{e}{c} = \frac{\sin(E-A)}{\sin A} \times \frac{\sin F}{\sin E} \times \frac{\sin A}{\sin(B-F)} \to x_1 = \frac{\sin(E-A)\sin F}{\sin(B-F)\sin E} c$$

$$\frac{z_1}{e} \times \frac{e}{c} = \frac{\sin F}{\sin A \times \frac{\sin A}{\sin(B-F)}} \to z_1 = \frac{\sin F}{\sin(B-F)} c$$

B. $G' \to F' \to E'$ $(E < A)$

$$x_1 = 0, y_1 = \frac{\sin(A-E)}{\sin(C-G)} c, z_1 = \frac{\sin F \sin B}{\sin G \sin E} c$$

ii. 旋出

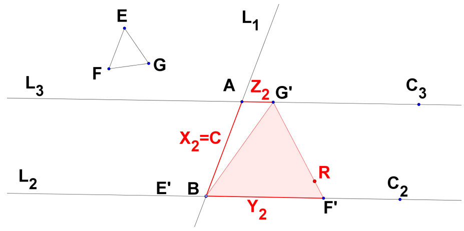


F' 在預設範圍內，設 E'、G' 已旋出角度分別為 α、γ。利用輔助角 δ 列式：

$\delta = B - \alpha = E - \gamma \Rightarrow E'$ 先 $G' \Leftrightarrow \alpha - \gamma = B - E > 0 \Leftrightarrow E < B$。

E'、G' 旋出的次序分兩種：

A. $E' \to G' \to F'(E < B)$



$$x_2 = c, y_2 = \frac{\sin G \sin A}{\sin F \sin E}c, z_2 = \frac{\sin(A-E)}{\sin(C-G)}c$$

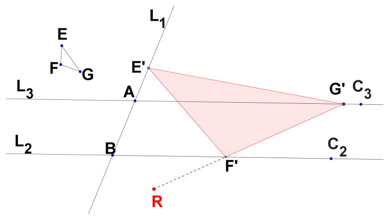
B. $G' \to E' \to F'(E > B)$

$$x_2 = \frac{\sin F \sin B}{\sin G \sin E}, y_2 = \frac{\sin G}{\sin(A-G)}c, z_3 = 0$$

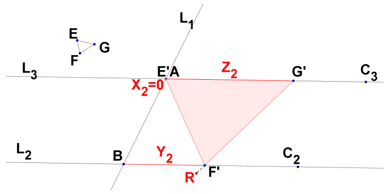
(b) R 在兩平行線 L_2 外側 ($F > B$ 且 $G < A$)：

$x \in [x_1, x_2]$、$y \in [y_2, y_1]$、$z \in [z_2, z_1]$

i. 旋入

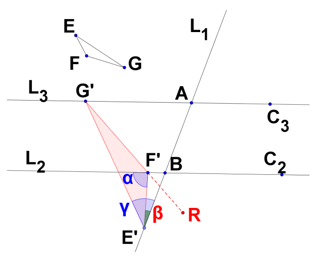


F'、G' 在預設範圍內，只需考慮 E' 旋入即可



$$x_1 = 0, y_1 = \frac{\sin(A-E)}{\sin E}c, z_1 = \frac{\sin F \sin B}{\sin G \sin A}c$$

ii. 旋出

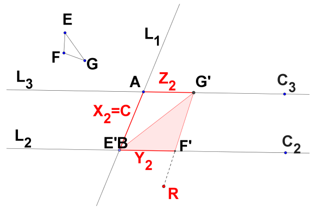


設 E'、F'、G' 已旋出角度分別為 α、β、γ。

$$\beta = \alpha - B = \gamma - E \to \begin{cases} \alpha > \beta \text{ 且 } \gamma > \beta \Rightarrow F' \text{ 最後} \\ E' \text{ 先 } G' \Leftrightarrow \alpha - \gamma = B - E > 0 \Leftrightarrow E < B \end{cases}$$

E'、F'、G' 旋出的次序分兩種：

A. $E' \to G' \to F'(E < B)$



$$x_2 = c, y_2 = \frac{\sin G \sin A}{\sin F \sin E} c, z_2 = \frac{\sin(F+G)}{\sin E} c$$

B. $G' \to E' \to F'(E > B)$

$$x_2 = \frac{\sin F \sin B}{-\sin(A+E)\sin E} c, y_2 = \frac{\sin G}{\sin(A-G)} c, z_2 = 0$$

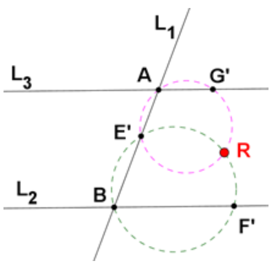
2.4 n 邊形作內接子 m 邊形的作法（$n \geq m$）

引理 4. 任意三直線 L_1、L_2、L_3 不平行且不共點。若已知 { 同$\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)$} 或 { 反$\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)$} 旋伸中心 R 的位置，則可作出該組所有子三角形。而細部取點方式分成：

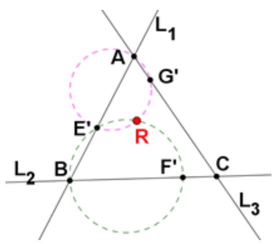
1. 若 R 不在 L_i 上，則在 L_i 上任取一點為頂點皆可作出子該組所有子三角形;
2. 若 R 在 L_i 上，則在 L_i 上須取 R 為頂點方可作出該組所有子三角形。

底下以 { 同$\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)$} 作證明，並設點 A、B、C 依序為 L_1 與 L_2、L_2 與 L_3、L_3 與 L_1 的交點（若 L_2 與 L_3 平行，則不設點 C） 作法：

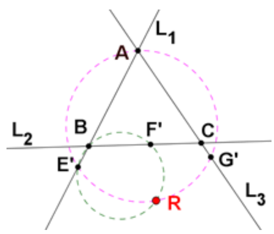
1. 設 R 不在 L_1 上且在 L_1 上任取一點，設為 E'：
   分別作 $\triangle RE'A$、$\triangle RE'B$ 的外接圓交 L_3、L_2 於 G'、F'， $\triangle E'F'G'$ 即為所求。



<型d內>

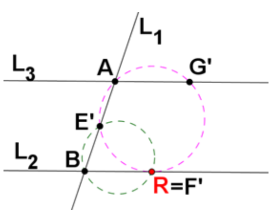


<型d側>

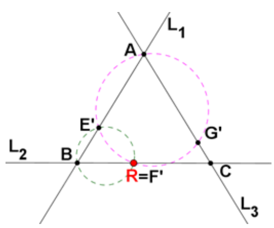


<型c>

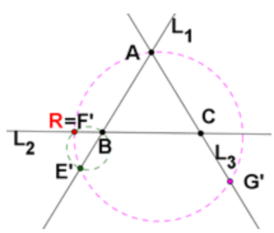
2. 因<型c>R 不會在 L_1 上，所以設 R 在 L_2 上且在 L_2 上取 R 為頂點，設為 F'：
   任作一圓過點 R 與 A 且分別交 L_1、L_3 於 E'、G'，則 $\triangle E'F'G'$ 即為所求。



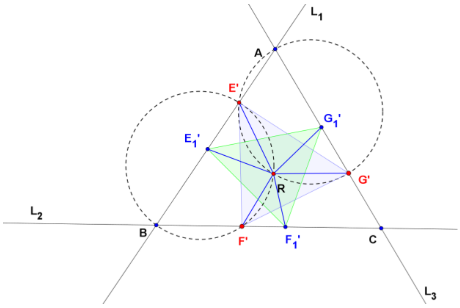
<型d內>



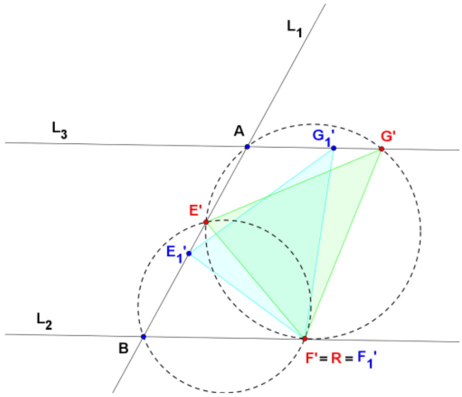
<型d側>



<型c>



＜型d側＞



＜型c＞

證明.

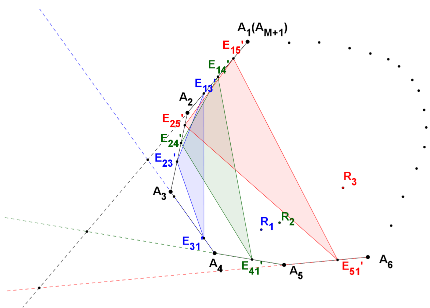
設 $\triangle E_1'F_1'G_1' \in \{$同 $\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$。在 $\triangle RE'G'$ 與 $\triangle RE_1'G_1'$ 中，因 A、E'、R、G' 共圓且 A、E_1'、R、G_1' 共圓（R 為 $\{$同$\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$ 旋伸中心）。
所以 $\angle RE'G' = \angle RAC = \angle RE_1'G_1'$且$\angle RG'E' = \angle RAB = \angle RG_1'E_1'$，
得 $\triangle RE'G' \sim \triangle RE_1'G_1'$（AA 相似）（至此已證出情形 2），
即$\overline{E'G}' : \overline{E_1'G_1}' = \overline{RE}' : \overline{RE_1}'$，同理 $\overline{E'F}' : \overline{E_1'F_1}' = \overline{RE}' : \overline{RE_1}'$。
由上兩式得 $\overline{E'G}' : \overline{E_1'G_1}' = \overline{E'F}' : \overline{E_1'F_1}'$，同理$\overline{E'G}' : \overline{E_1'G_1}' = \overline{F'G}' : \overline{F_1'G_1}'$，
得 $\overline{E'G}' : \overline{E_1'G_1}' = \overline{E'F}' : \overline{E_1'F_1}' = \overline{F'G}' : \overline{F_1'G_1}'$，故 $\triangle E'F'G' \sim \triangle E_1'F_1'G_1'$（SSS 相似）。 □

2.4.1 m 邊形作內接子 m 邊形的作法與解法數判斷

已知. 標的 m 邊形 $E_1E_2\ldots E_m$ 與 m 邊形 $A_1A_2\ldots A_m$。

求作. m 邊形 $E_1'E_2'\ldots E_m' \in \left\{同\ m\ 邊形\ E_1E_2\ldots E_m\left(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}}\right)\right\}$，

其中 $A_{m+1} = A_1$。

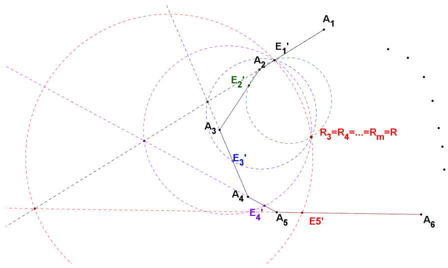


作法.

1. 依序作子 $\triangle E_{1k}'E_{2k}'E_{k1}' \in \{同\triangle E_1E_2E_k(\overleftrightarrow{A_1A_2} \times \overleftrightarrow{A_2A_3} \times \overleftrightarrow{A_kA_{k+1}})\}$，$3 \le k \le m$，再利用 $\triangle E_{1k}'E_{2k}'E_{k1}'$ 作出 $\{同\triangle E_1E_2E_k(\overleftrightarrow{A_1A_2} \times \overleftrightarrow{A_2A_3} \times \overleftrightarrow{A_kA_{k+1}})\}$ 的旋伸中心 R_k。
2. R_3、R_4、…、R_m 所在位置區分三種，並令

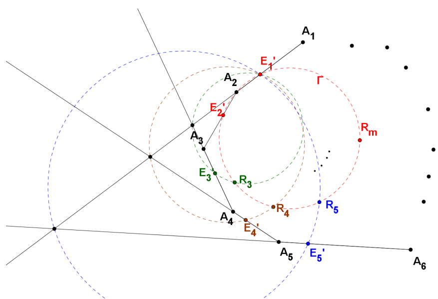
$$S = \bigcap_{k=3}^{m} S_1\{同\triangle E_1E_2E_{3k}(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3} \times \overline{A_kA_{k+1}})\}$$

<情形1> 所有 R_k 在同一位置（設為 R）



1. 若 $S=\varnothing$，則無法作出。
2. 若 $S\neq\varnothing$，則取 $E_1'\in S$，再利用 **引理** 4 作法依序作 $\triangle E_1'E_2'E_k'\in\{$同$\triangle E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$，$3\le k\le m$， 則 m 邊形 $E_1'E_2'\ldots E_m'$ 即為所求。

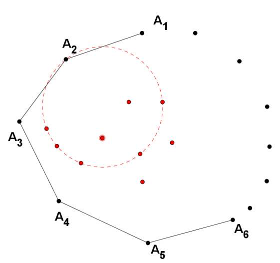
<情形2>非所有 R_k 在同一位置且 A_2 與所有 R_k 共圓（設此圓為 Γ）



設 Γ 與 $\overline{A_1A_2}$ 的交點 E_1'。

1. 若 $E_1'\notin S$，則無法作出。
2. 若 $E_1'\in S$，則利用 **引理** 4 作法依序作 $\triangle E_1'E_2'E_k'\in\{$同$\triangle E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$，$3\le k\le m$， 則 m 邊形 $E_1'E_2'\ldots E_m'$ 即為所求。

<情形3>非所有 R_k 在同一位置且 A_2 與所有 R_k 不共圓



無法作出<情形1>與<情形2>，因作 $\triangle E'F'G'\sim\triangle EFG$ 與 $\triangle E'F'H'\sim\triangle EFH$，所以得四邊形 $E'F'G'H'\sim$ 四邊形 $EFGH$。

證明. <情形1>與<情形2>可作出的狀況下，因依序作 $\triangle E_1'E_2'E_k'\sim\triangle E_1E_2E_k$ 所以得 m 邊形$E_1'E_2'\ldots E_m'\sim m$ 邊形 $E_1E_2\ldots E_m$。 □

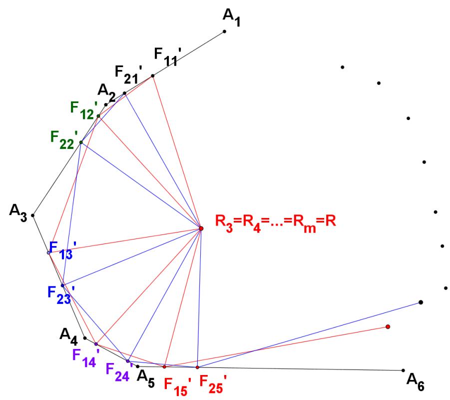
由上述作法中我們得到 $\left\{同\ m\ 邊形\ E_1E_2\dots E_m\left(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}}\right)\right\}$ 中子 m 邊形解法數判斷方法：

1. 若所有 R_k $(3 \le k \le m)$ 在同一位置 (設為 R) 且 $S \ne \varnothing$，則有無限多解且 R 為此組子 m 邊形的旋伸中心；
2. 非所有 R_k $(3 \le k \le m)$ 在同一位置時，若 A_2 與所有 R_k 共圓且此圓與 S 有交點，則有唯一解；
3. 若非所有 R_k $(3 \le k \le m)$ 在同一位置且 A_2 不與所有 R_k 共圓或非上述兩種情形，則無解。

證明.

1. (a) 在＜情形1＞有解狀況下，由 **引理** 4 知作出的子 $\triangle E_1'E_2'E_3'$ 會有無限多個選擇，所以 E_1' 位置或 E_2' 位置有無限多個選擇，後在 E_1'、E_2' 固定下才作出 $E_k'(3 \le k \le m)$，所以子 m 邊形$E_1'E_2'\dots E_m'$ 會有無限多解。

   (b) 證明 R 為此組子 m 邊形的旋伸中心：



   設 m 邊形 $F_{11}'F_{12}'\dots F_{1m}'$ 與 m 邊形 $F_{21}'F_{22}'\dots F_{2m}'$ 為此組兩個子 m 邊形則對每一 $k = 3, 4, \dots, m$ 而言，
   $\triangle F_{11}'F_{12}'F_{1k}'$、$\triangle F_{21}'F_{22}'F_{2k}' \in \{同\triangle E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3} \times \overline{A_kA_{k+1}})\}$，
   且因 R 為 $\{同\triangle E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3} \times \overline{A_kA_{k+1}})\}$ 旋伸中心，
   所以 $\angle F_{11}'RF_{21}' = \angle F_{12}'RF_{22}' = \angle F_{k1}'RF_{k2}'$，且 $\overline{RF_{11}'} : \overline{RF_{21}'} = \overline{RF_{12}'} : \overline{RF_{22}'} = \overline{RF_{1k}'} : \overline{RF_{2k}'}$。
   合併可得對每一 $k = 1, 2, \cdot, m$，$\angle F_{1k}'RF_{2k}'$ 皆相等且 $\overline{RF_{1k}'} : \overline{RF_{2k}'}$ 比值皆相等，
   得證 R 為 m 邊形 $F_{11}'F_{12}'\dots F_{1m}'$ 與 m 邊形 $F_{21}'F_{22}'\dots F_{2m}'$ 的旋縮中心。

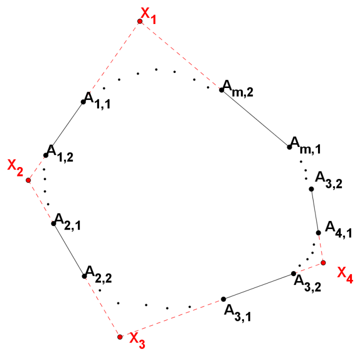
2. 在＜情形2＞有解狀況下，E_1' 位置取自圓 Γ 與 $\overline{A_1A_2}$ 的交點，僅一選擇，後在 E_1' 固定下才作出 $E_k'(2 \le k \le m)$，所以子 m 邊形 $E_1'E_2'\dots E_m'$ 會有唯一解。

3. 用反證法證之：
   設可作出子 m 邊形 $E_1'E_2'\dots E_m' \in \left\{同\ m\ 邊形\ E_1E_2\dots E_m\left(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_kA_{k+1}}\right)\right\}$，
   則子 $\triangle E_1'E_2'E_3' \in \{$ 同 $\triangle E_1E_2E_3(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3} \times \overline{A_3A_4})\}$，
   所以此組旋伸中心R_3必在$\triangle A_2E_1'E_2'$的外接圓上，
   同理 R_k $(4 \le k \le m)$ 亦在 $\triangle A_2E_1'E_2'$ 的外接圓上，
   可得 A_2 與所有 R_k 共圓。

□

2.4.2 n 邊形作內接子 m 邊形的作法（$n \geq m$）

欲在 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 中作子 m 邊形$E_1'E_2'\ldots E_m' \in \left\{同\ m\ 邊形\ E_1E_2\ldots E_m\left(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_{k,1}A_{k,2}}\right)\right\}$，可先將被選定的 m 個邊延長使相鄰兩邊 $\overline{A_{k,1}A_{k,2}}$、$\overline{A_{k+1,1}A_{k+1,2}}$ 的延長線交於 X_{k+1}，令 $X_{m+1} = X_1$。再由 2.4.1 的方法在 m 邊形 $X_1X_2\ldots X_m$ 中作內接子 m 邊形 $E_1'E_2'\ldots E_m' \in \left\{同\ m\ 邊形\ E_1E_2\ldots E_m\left(\prod_{k=1}^{m}\overline{A_{k,1}A_{k,2}}\right)\right\}$ 即可。



2.5 任意 m 條直線上取點作子 m 邊形的作法與解法數判斷

給定標的 m 邊形 $E_1E_2\ldots E_m$ 及任意 m 條直線 L_1、L_2、L_3、…、L_m，
欲作子 m 邊形 $E_1'E_2'\ldots E_m' \in \left\{m\ 邊形\ E_1E_2\ldots E_m\left(\prod_{k=1}^{m}L_k\right)\right\}$。
因同子 m 邊形與反子 m 邊形的作法與討論方式一樣，以下只討論同子 m 邊形，分三情形:

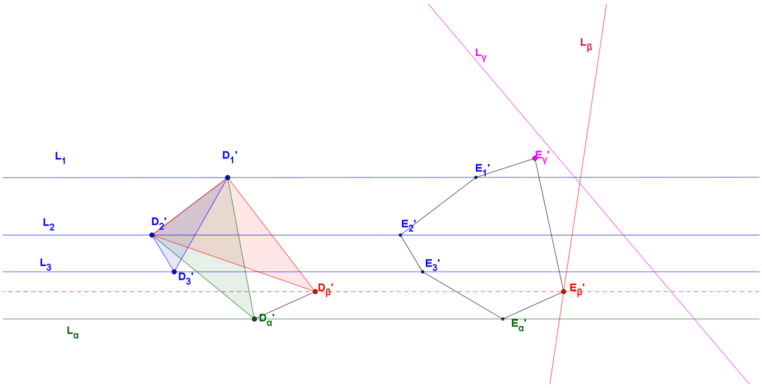
1. 沒有三條以上直線平行且沒有三條以上直線共點
   將「2.4.1 m 邊形作內接子 m 邊形的作法與解個數判斷」中
   取 $E_1'S = \bigcap_{k=3}^{m} S_1\{同\triangle E_1E_2E_k(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}\times\overline{A_kA_{k+1}})\}$ 的條件去掉，就可得到作法與解法數。

2. 有三條以上直線平行
   不失一般性設平行直線為 L_1、L_2、L_3，另設其他與 L_1 平行的直線為 $L_\alpha(\alpha \in N_1)$；其他與 L_1 不平行的直線為 $L_\beta(\beta \in N_2)$。
   先作子 $\triangle D_1'D_2'D_3' \in \{\ 同\ \triangle E_1E_2E_3(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$，再依序作 $\triangle D_1'D_2'D_\alpha'$ 同相似於 $\triangle E_1E_2E_\alpha(\alpha \in N_1)$

   (a) 有一 D_α' $(\alpha \in N_1)$ 不在 L_α 上時，則無解。
   (b) 所有 D_α' $(\alpha \in N_1)$ 皆在 L_α 上且 $N_2 = \phi$ 時，則作出的 m 邊形$D_1'D_2'\ldots D_m'$ 即為所求。且無限多解。
   (c) 所有 D_α' $(\alpha \in N_1)$ 皆在 L_α 上且 $N_2 \neq \phi$ 時，先取一 $\beta \in N_2$，作 $\triangle D_1'D_2'D_\beta'$ 同相似於 $\triangle E_1E_2E_\beta$；
       接著過 D_β' 作 L_1 的平行線交 L_β 於 E_β'；
       再過 E_β' 依序作直線平行於 $\overline{D_\beta'D_\alpha'}$ 且交 L_α 於 $E_\alpha'(\alpha \in N_1)$；
       最後依序作 $\triangle E_1'E_2'E_\gamma'$ 同相似於 $\triangle E_1E_2E_\gamma(\gamma \in N_2 - \{\beta\})$。

       i. 所有 E_γ' $(\gamma \in N_2 - \{\beta\})$ 皆在 L_γ 上時，作出的 m 邊形 $E_1'E_2'\ldots E_m'$ 即為所求。且有唯一解。

ii. 有一 E'_γ $(\gamma \in N_2 - \{\beta\})$ 不在 L_γ 上時，無解。



3. 有三條以上直線共點
   不失一般性設共點 R 的直線為 L_1、L_2、L_3，另設其他通過 R 的直線為 L_α $(\alpha \in N_1)$；其他不通過 R 的直線為 $L_\beta(\beta \in N_2)$。
   先作子 $\triangle D'_1D'_2D'_3 \in \{$ 同 $\triangle E_1E_2E_3(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$，
   再依序作 $\triangle D'_1D'_2D'_\alpha$ 同相似於 $\triangle E_1E_2E_\alpha(\alpha \in N_1)$。

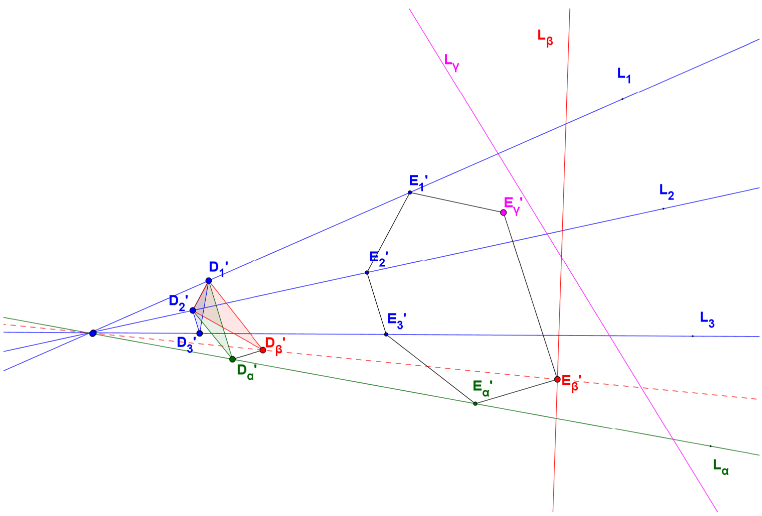
   (a) 有一 D'_α 不在 L_α 上時，則無解。

   (b) 所有 D'_α $(\alpha \in N_1)$ 皆在 L_α 上且 $N_2 = \varnothing$ 時，則作出的 m 邊形$D'_1D'_2 \ldots D'_m$ 即為所求。且有無限多解。

   (c) 所有 D'_α $(\alpha \in N_1)$ 皆在 L_α 上且 $N_2 \neq \phi$ 時，先取一 $\beta \in N_2$，作 $\triangle D'_1D'_2D'_\beta$ 同相似於 $\triangle E_1E_2E_\beta$；
   接著作直線 RD'_β 交 L_β 於 E'_β；再過 E'_β 依序作直線平行於 $D'_\beta D'_\alpha$ 且交 L_α 於 $E'_\alpha(\alpha \in N_1)$；
   最後依序作 $\triangle E'_1E'_2E'_\gamma$ 同相似於 $\triangle E_1E_2E_\gamma(\gamma \in N_2 - \{\beta\})$。

      i. 所有$E'_\gamma(\gamma \in N_2 - \{\beta\})$ 皆在 L_γ 上時，作出的 m 邊形 $E'_1E'_2 \ldots E'_m$ 即為所求。且有唯一解。

      ii. 有一$E'_\gamma(\gamma \in N_2 - \{\beta\})$ 不在 L_γ 上時，無解。

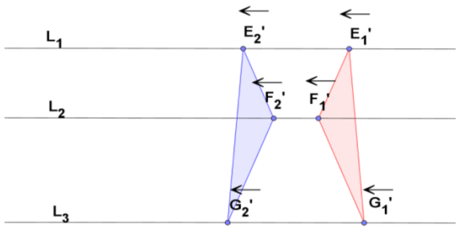


3 結論(Summary and Conclusions)

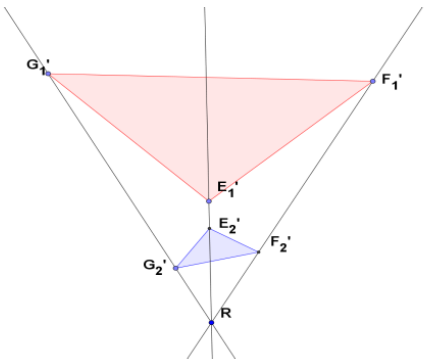
3.1

給定標的 $\triangle EFG$ 及任意三直線 L_1、L_2、L_3，一定可以作出同相似與反相似的子 $\triangle E'F'G' \in \{\triangle EFG(L_1 \times L_2 \times L_3)\}$，詳見 引理 2。且各自同子 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 與反子 $\triangle E_2'F_2'G_2'$ 的同組子三角形會因三直線位置關係而產生不同連結：

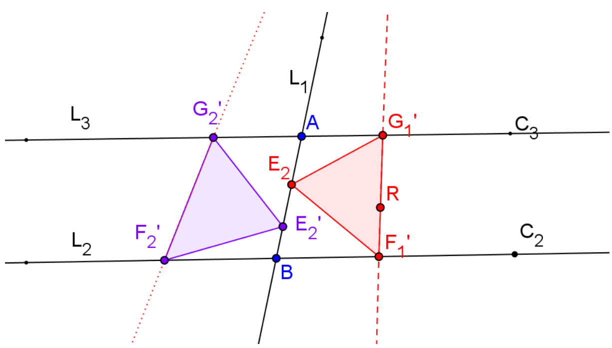
- <型a>三線平行：兩組皆各自以平移作連結。



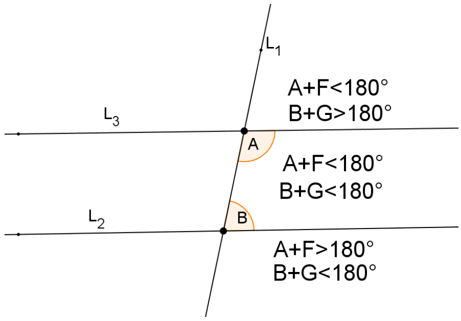
- <型b>三線共點：兩組皆各自以伸縮作連結，且伸縮中心 R 在三線交點。



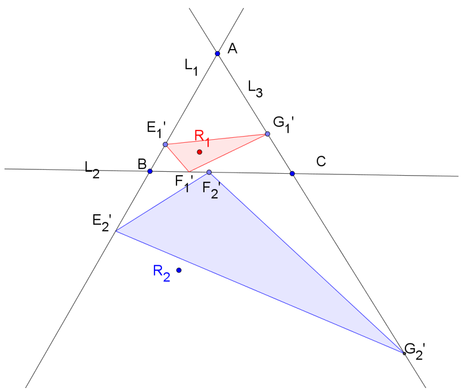
- <型c>兩線平行：兩組皆各自以旋轉及伸縮作連結，且旋伸中心 R 在任一個同組子三角形兩平行線上之頂點的連線上。



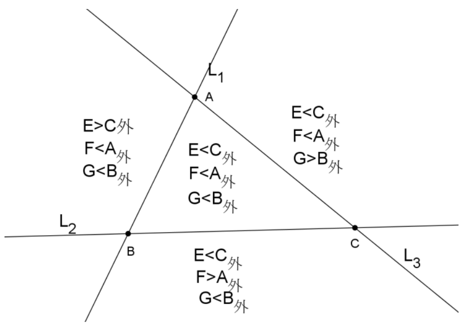
至於 R 細部位置則可由標的 $\triangle EFG$ 三內角與三直線夾角 (令 $\angle C_3AB = A$，$\angle C_2BA = B$) 比較後確認。以子 $\triangle E_1'F_1'G_1'$ 組為例。



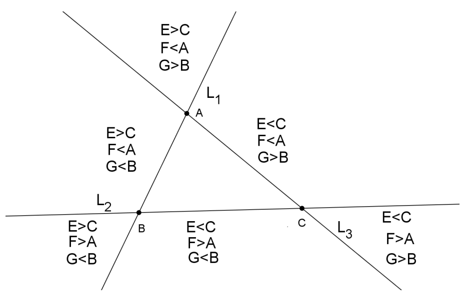
- ＜型d＞圍三角形：兩組皆各自以旋轉及伸縮作連結。有一組 $(\triangle E_1'F_1'G_1')$ 在旋伸過程中會內接於三直線所圍成三角形 $(\triangle ABC)$；另一組 $(\triangle E_2'F_2'G_2')$ 則會側接 $\triangle ABC$ 一邊或兩邊。



至於 R 細部位置則可由標的 $\triangle EFG$ 三內角與三直線夾角 (令$\triangle ABC$ 三內角為 A、B、C；三外角為 $A_{外}$、$B_{外}$、$C_{外}$) 比較後確認：



＜型d內＞



＜型d側＞

3.2

比較標的 $\triangle EFG$ 三內角與三直線夾角可得到子 $\triangle E'F'G'$ 在＜型c＞、＜型d內＞、＜型d側＞的極限情況，進而算出三頂點 E'、F'、G' 變動範圍，詳見「2.3」的研究。＜型d內＞的部份可幫我們第一步就成功取對點，作出子 m 邊形成功內接於 $\triangle ABC$。而＜型c＞、＜型d側＞的研究更可為我們如何能成功取對點，作出子 m 邊形成功內接於 n 邊形做準備。

3.3

給定標的 m 邊形$E_1E_2\dots E_m$ 及任意 m 條直線 L_1、L_2、$\dots$、L_m (無三條以上平行且無三條以上共點)，作子 m 邊形 $E_1'E_2'\dots E_m' \in \left\{m \text{ 邊形 } E_1E_2\dots E_m\left(\prod_{k=1}^{m} L_k\right)\right\}$ 的方法，就是先將 m 邊形 $E_1E_2\dots E_m$ 分開成 $(m-2)$ 個共用邊 $\overline{E_1E_2}$ 的標的 $\triangle E_1E_2E_k$ $(3 \le k \le m)$，在對應的直線上作出 $\triangle E_1E_2E_k$ 的一個同子三角形就可作出該組子三角形的旋伸中心，並由這 $(m-2)$ 個旋伸中心的位置作判斷：

1. 皆重合時：用 **引理** 4 作法可在每條直線上成功取到子三角形頂點，且 $(m-2)$ 個旋伸 中心所在的位置上就是該組子 m 邊形旋伸中心，所以有無限多解。
2. 與 L_1、L_2 交點共圓時：此圓與 L_1、L_2 交點位置就必須拿來當子 m 邊形對應於 E_1、E_2 的頂點，再用 **引理** 4 作法在每條直線上成功取到子三角形頂點，得唯一解。
3. 與 L_1、L_2 交點不共圓時：無解。

3.4

給定標的 m 邊形 $E_1E_2\dots E_m$ 及 m 邊形 $A_1A_2\dots A_m$，作子 m 邊形 $E_1'E_2'\dots E_m' \in \left\{m \text{ 邊形 } E_1E_2\dots E_m\left(\prod_{k=1}^{m} \overline{A_kA_{k+1}}\right)\right\}$ (其中 $A_{m+1} = A_1$) 的方法與在 m 條直線上取點作是一樣的意思，但須利用「2.3」的研究控制好取點範圍方能確認有解與否及順利作出。

3.5

給定標的 m 邊形 $E_1E_2\dots E_m$ 及 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n (n \ge m)$ 的方法，就是延長預定要取點的 m 個邊接成 m 邊形，然後利用作 m 邊形內接 m 邊形方法即可成功。

3.6

要完成任意 m 條直線上取點作子 m 邊形的方法尚須討論：

1. 有三條以上平行：在此平形線組先選其中三條作對應的子三角形當作基準點，再確認這組平行線的其他對應頂點能否成功落在對應的直線上，若可以才再利用在這組平行的平移去確認第一個非這組平行線的對應點位置，此時子 m 邊形的位置完全被鎖住，其他剩下的對應頂點須正好在對應的直線上方有解。
2. 有三條以上共點：在此共點線組先選其中三條作對應的子三角形當作基準點，再確認這組共點線的其他對應頂點能否成功落在對應的直線上，若可以才再利用伸縮去確認第一個非這組共點線的對應點位置，此時子 m 邊形的位置完全被鎖住，其他剩下的對應頂點須正好在對應的直線上方有解。

參考文獻(References)

[1] 《100 個著名初等數學問體歷史和解答》，凡異出版社。

[2] 《大海撈針》，臺北市第三十七屆中小學科學展覽會。

[3] 《探討正 n 邊形的內接正三角形》，2015 年臺灣國際科學展覽會。

作品評語

江謝宏任教授
國立中正大學數學系

本篇論文以探討如何從三角形的三邊取點，作內接子三角形相似於另一個給定之三角形出發，利用旋轉及伸縮不影響三角形相似性的性質，並利用伸旋中心的討論，給出了建構性的作法，是相當完整的作品。

在找出其建構性的作法之後，作者試圖將其方法推廣到在任意 m 條直線上取點，作子 m 邊形相似於另一給定之 m 邊形的作法。首先可行性是個很大的問題，作者討論了當 $m > 3$ 時，若有三條線平行或是三條線共點的情況下，可作圖的必要條件，但對於其他情況，還沒有做更進一步的探討。從有三線平行或是三線共點的情況出發，應該是一個對的方向，期待作者將來在這問題上有更深入的研究作品。