I 玩遊 C — IC 著色與 IC 指數

國立花蓮高級中學 孫聖晏
指導老師：黃俊豪

摘要

本作品主要在研究由郵票問題衍生而出的 IC 著色問題，即在圖形上 n 個點填入數字，並在符合此填數字法能夠使此圖生成所有小於等於數字總合的正整數的前提下，求出這些數字和的最大值。本文主要針對直線圖、環形圖、雙線圖、輪形圖、接近完全圖等圖類來探討其 IC 著色的最大值。

對直線圖，前人最好的結果爲：

$$\frac{n^2+8n-8}{4} \le M(P_n) \quad （參見 [1]）$$

本文得到的結果爲：

$$\frac{n^2+9n-\frac{271}{4}+{r_n}^2}{4} \le M(P_n) \quad \left(當\ n=4s+\frac{3}{2}+r_n \ge 45，其中 -\frac{3}{2} \le r_n \le \frac{3}{2}\right)$$

同時，我們可以確定：$M(P_n)$ 的二次項係數是 $\frac{1}{4}$。

對環形圖，前人最好的結果爲：

$$\frac{n^2+2n-1}{2} \le M(C_n) \quad （參見 [1]）$$

本文得到的結果爲：

$$\frac{n^2+7n-\frac{241}{4}+{r_n}^2}{2} \le M(C_n) \quad \left(當\ n=4s+\frac{3}{2}+r_n \ge 12，其中 -\frac{3}{2} \le r_n \le \frac{3}{2}\right)$$

對雙線圖，本文得到的結果爲：

$$6\cdot 2^n-7\cdot 2^{\frac{n}{2}}+1 \le \frac{(1+\sqrt{2})^{n+3}+(1-\sqrt{2})^{n+3}}{4}-2n-\frac{7}{2}$$

對輪形圖，前人最好的結果爲：

$$2^n+10 \le M(W_n) \quad （參見 [5]）$$

本文得到的結果爲：

$$2^n+12 \le M(W_n) \quad （當\ n \ge 5\ 時）$$

對接近完全圖，本文主要研究 K_n-P_r 以及 $K_n-K_{1,m}$，得到的結果爲：

$$2^n-2r+2 \ge M(K_n-P_r) \ge 2^n-9\cdot 2^{r-4}+1 \quad (1 \le r \le n-1)$$

$$M(K_n-K_{1,m}) = 2^n-2^m-1 \quad (n \ge m+1)$$

1 簡介

1.1 研究動機

高三參加校內數學競賽時，遇到了一道滿有趣的題目：

「一個圓上有六個點，我們可以在這六個點上各放一個數字，且必須符合以下條件：

1. 填入的數值必須是正整數
2. 設填入的所有數字總和為 n，那麼對於所有正整數 x（$1 \le x \le n$），必有某幾個相鄰的點，其和為 x。

請問：n 的最大值是多少？」

當時我用帶數字的方式湊出答案，但後來和同學討論，才得知有很多湊的方法都比我所湊出來的答案要大。簡單的加法和不同的位置排法，隱藏著許多神奇的數學性質，使我對這個問題產生興趣。後來查資料才知道這個問題名叫「IC 著色」。

1.2 完整題目敘述

定義 1. 函數 f 把所有的 $V \in V(G)$ 對應到一個正整數 $f(V)$。

定義 2. $f_s(H) = \sum_{V \in V(H)} f(V)$。

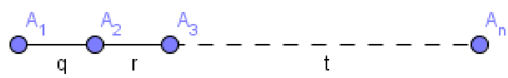
定義 3. $M(G) = \max\{f_s(G) \mid f \text{ 為 } G \text{ 的 } IC\text{-著色}\}$

令 G 是一個連通圖，$V(G)$ 為圖 G 的頂點集。若對所有的正整 k（$1 \le k \le f_s(G)$），皆存在 G 的連通子圖 H 使得 $f_s(H) = k$，則稱 f 為 G 的 IC 著色，並稱 $M(G)$ 為 G 的 IC 指數。

1.3 研究目的

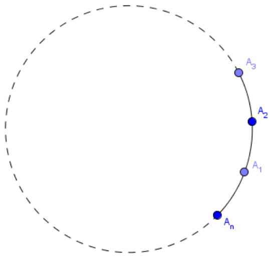
由於多數圖形的 IC 指數非常難找，故前人的研究成果多半是在改進各種圖形 IC 指數的上下界。我們的研究重點在於修正前人所提出的 IC 指數上下界，並專注於下列幾種圖類：

1. 直線圖



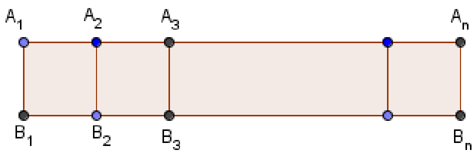
如上圖，有 n 個點排成一列，且 A_i 和 A_{i+1} 有連線（對所有的 $1 \le i \le n-1$）。我們稱此圖為 P_n。

2. 環形圖



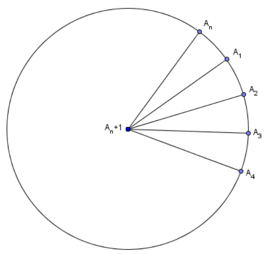
如上圖，有 n 個點排成環狀，且 A_i 和 A_{i+1} 有連線（對所有的 $1 \le i \le n$，$A_{n+1} = A_1$）。我們稱此圖為 C_n。

3. 雙線圖



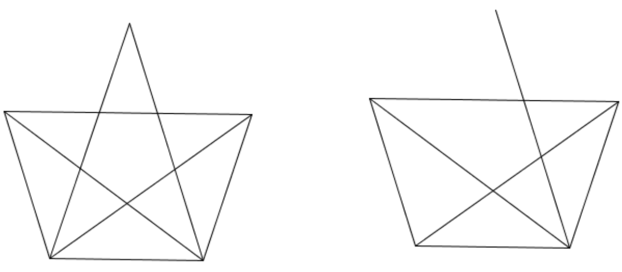
如上圖，有兩排共 $2n$ 個點形成的圖，其中 A_i 和 A_{i+1}、B_i 和 B_{i+1}、A_i 和 B_i 有連線（對所有的 $1 \le i \le n-1$，A_n 和 B_n 亦有連線）。我們稱此圖為 D_n。

4. 輪形圖



如上圖，有 n 個點排成一個環，並有一個點和這 n 個點皆相連。我們稱此圖為 W_n。

5. 接近完全圖



本文主要研究兩種接近完全圖：$K_n - P_r$ 以及 $K_n - K_{1,m}$，其中 K_n 為 n 個點的完全圖，$K_{1,m}$為 1 個點對 m 個點的完全二分圖。$K_n - P_r$ 即為從 K_n 中扣除 P_r 所形成的圖，$K_n - K_{1,m}$ 即為從 K_n 中扣除 $K_{1,m}$ 所形成的圖。上左右圖分別為 $K_5 - P_3$ 及 $K_5 - K_{1,3}$ 的例子。

1.4 名詞解釋

1. 對 P_n 而言，我們稱子圖 $H_{l,k}$ 為由左往右數第 l 格到第 k 個形成的圖。
2. 若是一個圖 G 具有子圖 H，使得 $f_s(H)=s$，則我們稱圖 G 能夠生成 s。
3. 對 C_n 而言，我們稱子圖 $H_{l,k}$ 為從第一格開始順時針數第 l 格到第 k 個形成的圖。
4. 對 C_n 而言，我們稱子圖 $H'_{l,k}$ 為 $H_{l,k}$ 關於 C_n 的補圖，亦即 $H'_{l,k}\cup H_{l,k}=C_n$。
5. 在說明如何在一個圖上填入數字時，我們採用以下的表示法：
   (a) 若是欲填入 k 個 r，則我們以「填入 (k) 個 $\{r\}$」來表示。例如：欲在圖上連續填入 5 個 2，則我們將其記作「填入 (5) 個 $\{2\}$」。
   (b) 若是連續填入 k 組數組 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，則我們以「填入 (k) 個 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$」來表示。例如：欲在圖上依序填入 1、2、1、2，則我們將其記作「填入 (2) 個 $\{1,2\}$」。
6. 對 D_n 而言，第 n 行第 k 列的數我們稱之為 (n,k)，其中 k 只能是 1 或 2。

2 研究內容

2.1 直線圖 P_n

我們將重心放在下界。前人針對 P_n 下界的最佳結果為 $\dfrac{n^2+8n-8}{4}\le M(P_n)$（參見 [1]），以下我們將給出更好的方法。

定理 1.1. $\dfrac{n^2+8n-4-r_n^2}{4}\le M(P_n)$，當 $n=4s+r_n$，其中 $-1\le r_n\le 2$。

在證明之前，先證明一個引理。

引理 1.1. 設在圖 P_r 上填入 r 個數字 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，且圖 P_r 能夠生成所有小於等於 $f_s(P_r)$ 的正整數。那麼在圖 P_r 後再填入 (1) 個 $\{f_s(P_r)+1\}$ 與 $(\max(a_i)-1)$ 個 1，並將這個圖稱為 $P_{r+\max(a_i)}$，則 $P_{r+\max(a_i)}$ 能生成所有小於等於 $f_s\left(P_{r+\max(a_i)}\right)$ 的正整數。

證明.
由於 P_r 是 $P_{r+\max(a_i)}$ 的一個連通子圖，所以 $P_{r+\max(a_i)}$ 能生成所有小於等於 $f_s(P_r)$ 的正整數。
對 $f_s(P_r)+1$， 直接取在 P_r 後面填入的 $f_s(P_r)+1$ 即可。
對 $f_s(P_r)+1+a_r+\ldots+a_i\le x\le f_s(P_r)+a_r+\ldots+a_{i-1}$，取子圖

$$H_{\max(a_i)-x+f_s(P_r)+1+a_r+\ldots+a_i,\max(a_i)+i-1}$$

所以 $P_{r+\max(a_i)}$ 能生成所有小於等於 $f_s\left(P_{r+\max(a_i)}\right)$ 的正整數。 □

現在證明 **定理** 1.1。

證明.
取圖 P_n 填入數字如下：(k-2) 個 $\{1\}$，(1) 個 $\{2\}$，$(N-2k-1)$ 個 $\{1\}$，(1) 個 $\{k\}$，(L) 個 $\{N\}$，(1) 個 $\{N-k\}$，(1) 個 $\{k+1\}$，$(k-2)$ 個 $\{1\}$，(1) 個 $\{N(L+2)+k-1\}$，$(N-1)$ 個 $\{1\}$，其中 $2N+L-1=n$。則 $f_s(P_n)=N(2L+5)+2k-4$。

1. 說明圖 P_n 能生成所有小於等於 $f_s(P_n)$ 的正整數 x：

   由 **引理** 1.1，再觀察上述填數字法，可以發現 $N(L+2)+k-1$ 恰好是 $f_s(H_{1,N+L-1})+1$。如果 N 比 $k+1$ 大，則只須證明 $H_{1,N+L-1}$ 能夠生成所有小於等於 $f_s(H_{1,N+L-1})$ 的正整數即可。

   (a) $1 \le x \le N-1$：取子圖 $H_{2N+L-x,2N+L-1}$

   (b) $N \le x \le N(L+1)$：
   對 $x = Nr$，其中 $1 \le r \le L$，取子圖 $H_{N-k,N-k-1+r}$
   對 $Nr+1 \le x \le Nr+k-1$，其中 $1 \le r \le L$，取子圖 $H_{N+L-k+1-r,N-k+L+x-Nr}$
   對 $Nr+k \le x \le N(r+1)-k-1$，$1 \le r \le L$，取子圖 $H_{N-k-1-x+Nr+k,N-k-1+r}$
   對 $x = N(r+1)-k$，其中 $1 \le r \le L$，取子圖 $H_{N-k+L-r,N-k+L}$
   對 $x = N(r+1)-k+1 \le x \le N(r+1)-1$，其中 $1 \le r \le L$，取子圖

   $$H_{k-1-x+N(r+1)-k+1,N-k-1+r}$$

   對 $x = N(L+1)$，取子圖 $H_{N-k-1,N-k+L}$
   依此類推，一樣的方法可以生成 $N(L+1) \le x \le N(L+2)+k-2$ 的所有正整數。唯一會出現問題的地方在於 $N(L+1)+k$ 和 $N(L+2)-k$，從目前圖上還找不到能生成這兩者的連通子圖，所以我們必須找出特殊的 k 值以使圖 $H_{1,N+L-1}$ 能生成這兩者。

   若是我們令 $N-k-1 = k$，則 $k = \dfrac{N-1}{2}$，且

   $$f_s(H_{1,N-k+L}) = N(L+1) + \frac{N-1}{2} = N(L+1)+k\text{；}$$

   同時 $f_s(H_{N-k-1,N-k+L+1}) = N(L+2) - \dfrac{N-1}{2} = N(L+2)-k$。

   恰好使得原本不能生成的兩數得以生成，所以在 $k = \dfrac{N-1}{2}$ 時，$H_{1,N+L-1}$ 能生成所有小於等於 $f_s(H_{1,N+L-1})$ 的正整數，故 P_n 能生成所有小於等於 $f_s(P_n)$ 的正整數。

2. 求 $f_s(P_n)$ 的最大值：

   因爲 $2N+L-1 = n$，所以 $L = n+1-2N$。

   $$f_s(P_n) = N(2L+5)+2k-4 = -\left(2N - \frac{n+4}{2}\right)^2 + \frac{n^2+8n-4}{4} \le \frac{n^2+8n-4}{4}$$

   上式等號成立的條件爲 $N = \dfrac{n+4}{4}$，N、n 皆爲正整數。但 $\dfrac{n+4}{4}$ 並不一定是正整數，所以 N 值需取最接近 $\dfrac{n+4}{4}$ 的整數：

   (a) $n = 4s$，s 爲正整數：取 $N = \dfrac{n+4}{4}$，則 $f_s(P_n) = \dfrac{n^2+8n-4}{4}$

   (b) $n = 4s+1$，s 爲正整數：取 $N = \dfrac{n+3}{4}$，則 $f_s(P_n) = \dfrac{n^2+8n-5}{4}$

   (c) $n = 4s+2$，s 爲正整數：取 $N = \dfrac{n+2}{4}$，則 $f_s(P_n) = \dfrac{n^2+8n-8}{4}$

   (d) $n = 4s+3$，s 爲正整數：取 $N = \dfrac{n+5}{4}$，則 $f_s(P_n) = \dfrac{n^2+6n-5}{4}$

故

$$\begin{cases} \dfrac{n^2+8n-4}{4} \le M(P_n), & \text{當 } n=4s\text{，其中 } s \text{ 爲正整數} \\ \dfrac{n^2+8n-5}{4} \le M(P_n), & \text{當 } n=4s+1 \text{ 或 } 4s+3\text{，其中 } s \text{ 爲正整數} \\ \dfrac{n^2+8n-8}{4} \le M(P_n), & \text{當 } n=4s+2\text{，其中 } s \text{ 爲正整數} \end{cases}$$

經統整後即得：$\dfrac{n^2+8n-4-r_n^2}{4} \le M(P_n)$，當 $n=4s+r_n$，其中 $-1 \le r_n \le 2$。

□

定理 1.2. $\dfrac{n^2+9n-\frac{217}{4}+r_n^2}{4} \le M(P_n)$，當 $n=4s+\dfrac{3}{2}+r_n$，其中 $-\dfrac{3}{2} \le r_n \le \dfrac{3}{2}$。

證明.

取圖 P_n 填入數字如下：$(k-2)$ 個 $\{1\}$，$\left(\dfrac{N-2k}{2}\right)$ 個 $\{2\}$，(1) 個 $\{1\}$，(1) 個 $\{k\}$，(L) 個 $\{N\}$，(1) 個 $\{N-k\}$，(1) 個 $\{k+1\}$，$(k-2)$ 個 $\{1\}$，(1) 個 $\{3\}$，$\left(\dfrac{N-2k-4}{2}\right)$ 個 $\{2\}$，(1) 個 $\{N(L+3)-k-3\}$，$(n-1)$ 個 $\{1\}$。其中 $2N+L-1=n$。則 $f_s(P_n)=N(2L+7)-2k-8$。

1. 說明圖 G 能生成所有小於等於 $f_s(G)$ 的正整數 x：

   和 **定理** 1.1 的方法類似，在此不贅述。但此法一樣會遇到和**定理** 1.1 的類似的問題，也就是有一些數無法生成，以**定理** 1.2 的而言，此填數法無法生成 $N(L+1)+k$。爲此我們須找出特定的 k 值才能使 P_n 生成 $N(L+1)+k$。且從 $2N+L-1=nf_s$ 和 $(P_n)=N(2L+7)-2k-8$ 中可以看出，因爲 k 值不影響 N 和 L 的值，所以 k 值越小，$f_s(P_n)$ 越大。

   若是我們取 $k=5$，則 $f_s\left(H_{\frac{N-8}{2},1+\frac{N}{2}+L}\right)=N(L+1)+5=N(L+1)+k$，

   恰好使得原本不能生成的數得以生成，所以在 $k=5$ 時，P_n 能生成所有小於等於 $f_s(P_n)$ 的正整數。

2. 求 $f_s(G)$ 的最大值：

   因爲 $2N+L-1=n$，所以 $L=n+1-2N$。

$$\begin{aligned} f_s(G) &= N(2L+7)-2k-8 = -4N^2+(2n+9)N-18 \\ &= -\left(2N-\frac{2n+9}{4}\right)^2+\left(\frac{2n+9}{4}\right)^2-18 \le \frac{4n^2+36n-207}{16} \end{aligned}$$

   上式等號成立的條件爲 $N=\dfrac{2n+9}{8}$，N、n 皆爲正整數。但 $\dfrac{2n+9}{8}$ 並不是正整數，所以 N 值需取最接近 $\dfrac{2n+9}{8}$ 的整數：

   (a) $n=4s$，s 爲正整數：取 $N=\dfrac{n+4}{4}$，則 $f_s(P_n)=\dfrac{n^2+9n-52}{4}$

   (b) $n=4s+1$，s 爲正整數：取 $N=\dfrac{n+3}{4}$，則 $f_s(P_n)=\dfrac{n^2+9n-54}{4}$

   (c) $n=4s+2$，s 爲正整數：取 $N=\dfrac{n+6}{4}$，則 $f_s(P_n)=\dfrac{n^2+9n-54}{4}$

   (d) $n=4s+3$，s 爲正整數：取 $N=\dfrac{n+5}{4}$，則 $f_s(P_n)=\dfrac{n^2+9n-52}{4}$

故

$$\begin{cases} \dfrac{n^2+9n-52}{4} \le M\left(P_n\right), & \text{當 } n=4s \text{ 或 } 4s+3\text{，其中 } s \text{ 爲正整數} \\ \dfrac{n^2+9n-54}{4} \le M\left(P_n\right), & \text{當 } n=4s+1 \text{ 或 } 4s+2\text{，其中 } s \text{ 爲正整數} \end{cases}$$

經統整後即得：$\dfrac{n^2+9n-\frac{217}{4}+r_n^2}{4} \le M\left(P_n\right)$，當 $n=4s+\dfrac{3}{2}+r_n$，其中 $-\dfrac{3}{2} \le r_n \le \dfrac{3}{2}$。

□

定理 1.3. 設 $M(p_n)=an^2+bn+c$，則 $a \le \dfrac{1}{4}$。

證明.

假設我們找到了最佳著色法，長度爲 n，數字總和爲 $M(p_n)=an^2+bn+c$。假設在這個著色法中，總和大於等於 $kM(p_n)$ 的最小長度子圖爲 $H(0 \le k \le 1)$，並設其長度爲 $\dfrac{n}{r}$。再設子圖 H 左邊剩下的子圖爲 J，右邊爲 K，長度分別爲 $\dfrac{n}{p}$，$\dfrac{n}{q}$。

首先，由子圖 H 的假設，可以知道所有大於等於 $kM(p_n)$ 的數所對應的子圖長度必須大於等於 $\dfrac{n}{r}$，故所有長度大於等於 $\dfrac{n}{r}$ 的子圖數目必須大於等於 $kM(p_n)$。由此，我們得到：

$$\frac{(n+2-\frac{n}{r})(n+1-\frac{n}{r})}{2} \ge (1-k)M(p_n)$$

對照其二次項係數，可以得到：

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)^2 \ge 2(1-k)a$$

故

$$r \ge \frac{1+\sqrt{2(1-k)a}}{1-2(1-k)a} \tag{1}$$

再者，由於 J，K 的子圖的數字和都小於等於 $(1-k)M(p_n)$，所以在這些子圖中，重複的數字數至少爲：

$$\frac{\frac{n}{p}(\frac{n}{p}+1)}{2}+\frac{\frac{n}{q}(\frac{n}{q}+1)}{2}-(1-k)\frac{M(p_n)}{2}$$

故

$$M\left(p_n\right) \le \frac{n\left(n+1\right)}{2}-\left(\frac{\frac{n}{p}(\frac{n}{p}+1)}{2}+\frac{\frac{n}{q}(\frac{n}{q}+1)}{2}-(1-k)\frac{M(p_n)}{2}\right)$$

得

$$M\left(p_n\right) \le \frac{1}{k}\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}-\frac{\frac{n}{p}\left(\frac{n}{p}+1\right)}{2}-\frac{\frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}+1\right)}{2}\right)$$

對照其二次項係數，可以得到：

$$\frac{1-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}}{2k} \ge a \tag{2}$$

由 (1) 可做以下假設：

$$\frac{1}{r}=1-\sqrt{2(1-k)a}-t，\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\sqrt{2(1-k)a}+t，t\geq 0$$

那麼：

$$\frac{1-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}}{2k}\leq\frac{1-\frac{\left(\sqrt{2(1-k)a}+t\right)^2}{2}}{2k}\leq\frac{1-(1-k)a}{2k}$$

代入 (2)，便可得到：

$$\frac{1-(1-k)a}{2k}\geq a$$

移項整理後得到：

$$\frac{1}{3k+1}\geq a$$

由於 $0\leq k\leq 1$，所以

$$\frac{1}{4}\geq a$$

命題得證。 □

2.2 環形圖 C_n

我們把重心放在下界的改進，並從簡單的情形一步一步探討。

定理 2.1. $\frac{n^2+2n-2+r_n^2}{2}\leq M(C_n)$，當 $n=2s+r_n$，其中 $0\leq r_n\leq 1$

證明.

取圖 C_n，任取一格爲第一格，順時鐘填入數字如下：(1 個 $\{1\}$，$(k-1)$ 個 $\{2\}$，$(n-k)$ 個 $\{2k\}$。則 $f_s(C_n)=2k(n-k)+2k-1$。

1. 說明圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數 x：

   (a) $1\leq x\leq 2k-1$：
   對 $x=2r-1$，其中 $1\leq r\leq k$，取子圖 $H_{1,r}$
   對 $x=2r$，其中 $1\leq r\leq k-1$，取子圖 $H_{2,r+1}$

   (b) 2k$\leq x\leq 2k(n-k)+2k-1$：
   對 $x=2ks+2r$，其中 $0\leq r\leq k-1$，$1\leq s\leq n-k$，取子圖 $H_{k+1-r,k+s}$
   對 $x=2ks+2r-1$，其中 $1\leq r\leq k$，$1\leq s\leq n-k$，取子圖 $H'_{1+r,n-s}$

   故圖 C_n 能夠生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數 x。

2. 求 $f_s(C_n)$ 的最大值：

$$f_s(C_n)=2k(n-k)+2k-1=-2\left(k-\frac{n+1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-1\leq\frac{n^2+2n-1}{2}$$

   上式等號成立於 $k=\frac{n+1}{2}$ 時，k，n 爲正整數。但 $\frac{n+1}{2}$ 不一定是正整數，所以 k 值需取最接近 $\frac{n+1}{2}$ 的整數：

   (a) $n=2s$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n}{2}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+2n-2}{2}$

(b) $n=2s+1$，s 為正整數：取 $k=\dfrac{n+1}{2}$，則 $f_s(C_n)=\dfrac{n^2+2n-1}{2}$

$$故\begin{cases}\dfrac{n^2+2n-2}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=2s\text{，其中 } s \text{ 為正整數}\\ \dfrac{n^2+2n-1}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=2s+1\text{，其中 } s \text{ 為正整數}\end{cases}$$

經統整後即得：$\dfrac{n^2+2n-2+r_n^2}{2}\le M(C_n)$，當 $n=2s+r_n$，其中 $0\le r_n\le 1$。

□

定理 2.2. $\dfrac{n^2+3n-\frac{33}{4}+r_n^2}{2}\le M(C_n)$，當 $n=4s+\dfrac{3}{2}+r_n$，其中 $-\dfrac{3}{2}\le r_n\le\dfrac{3}{2}$

證明之前，先證明一個引理。

引理 2.1. 若是圖 C_n 能生成所有小於等於 $\dfrac{f_s(C_n)}{2}$ 的正整數，則圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數。

證明.

設圖 C_n 的子圖 H 滿足 $f_s(H)=x$，則 $f_s(H')=f_s(C_n)-x$。所以若是圖 C_n 能生成 $1,2,\cdots\dfrac{f_s(C_n)}{2}$，則圖 C_n 也能生成 $f_s(C_n)-1,f_s(C_n)-2,\cdots,\dfrac{f_s(C_n)}{2}$ 等數，也就是圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數，證畢。 □

現在證明 **定理** 2.2。

證明.

現取圖 C_n，任取一格為第一格，順時鐘填入數字如下：(1) 個 $\{1\}$，$(k-1)$ 個 $\{4\}$，(1) 個 $\{3\}$，$(\dfrac{n-2k-1}{2})$ 個 $\{4k+1\}$，$(k-1)$ 個 $\{4\}$，(1) 個 $\{2\}$，$(\dfrac{n-2k-1}{2})$ 個 $\{4k+1\}$。則 $f_s(C_n)=(4k+1)(n-2k-1)+8k-2$。

1. 說明圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數 x：

   根據 **引理** 2.1，只需要證明圖 C_n 能生成所有小於等於 $\dfrac{f_s(C_n)}{2}$ 的正整數即可，亦即證明圖 C_n 能生成所有小於等於 $\dfrac{(4k+1)(n-2k-1)}{2}+4k-1$ 的正整數。

   (a) $1\le x\le 4k$：
   對 $x=4r$，其中 $1\le r\le k-1$，取子圖 $H_{\frac{n+3}{2},\frac{n+1}{2}+r}$
   對 $x=4r+1$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{1,r+1}$
   對 $x=4r+2$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{\frac{n+1}{2}+k-r,\frac{n+1}{2}+k}$
   對 $x=4r+3$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{k+1-r,k+1}$
   對 $x=4k$，取子圖 $H_{1,k+1}$

   (b) $4k+1\le x\le\dfrac{(4k+1)(n-2k-1)}{2}+4k-1$：
   對 $x=(4k+1)s+4r$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le\dfrac{n-2k-1}{2}$，取子圖 $H_{\frac{n+3}{2}-s,\frac{n+1}{2}+r}$
   對 $x=(4k+1)s+4r+1$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le\dfrac{n-2k-1}{2}$，取子圖 $H'_{2+r,n-s}$
   對 $x=(4k+1)s+4r+2$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le\dfrac{n-2k-1}{2}$，取子圖

$$H_{\frac{n+1}{2}+k-r,\frac{n+1}{2}+k+s}$$

對 $x=(4k+1)s+4r+3$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le\dfrac{n-2k-1}{2}$，取子圖

$$H_{k+1-r,k+1+s}$$

故圖 C_n 能生成所有小於等於 $\dfrac{f_s(C_n)}{2}$ 的正整數，即圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數。

2. 求 $f_s(C_n)$ 的最大值：

$$\begin{aligned}f_s(C_n)&=(4k+1)(n-2k-1)+8k-2\\&=-2\left(2k-\frac{2n+1}{4}\right)^2+2\left(\frac{2n+1}{4}\right)^2+n-3\le\frac{4n^2+12n-23}{8}\end{aligned}$$

上式等號成立的條件爲 $k=\dfrac{2n+1}{8}$，k，n 皆爲正整數。但 $\dfrac{2n+1}{8}$ 不爲正整數，所以 k 值需取離 $\dfrac{2n+1}{8}$ 最近的整數：

(a) $n=4s$，s 爲正整數：取 $k=\dfrac{n}{4}$，則 $f_s(C_n)=\dfrac{n^2+3n-6}{2}$

(b) $n=4s+1$，s 爲正整數：取 $k=\dfrac{n-1}{4}$，則 $f_s(C_n)=\dfrac{n^2+3n-8}{2}$

(c) $n=4s+2$，s 爲正整數：取 $k=\dfrac{n+2}{4}$，則 $f_s(C_n)=\dfrac{n^2+3n-8}{2}$

(d) $n=4s+3$，s 爲正整數：取 $k=\dfrac{n+1}{4}$，則 $f_s(C_n)=\dfrac{n^2+3n-6}{2}$

故 $\begin{cases}\dfrac{n^2+3n-6}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=4s \text{ 或 } 4s+3,\ \text{其中 } s \text{ 爲正整數}\\ \dfrac{n^2+3n-8}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=4s+1 \text{ 或 } 4s+2,\ \text{其中 } s \text{ 爲正整數}\end{cases}$

經統整後即得：$\dfrac{n^2+3n-\frac{33}{4}+r_n^2}{2}\le M(C_n),n=4s+\dfrac{3}{2}+r_n,-\dfrac{3}{2}\le r_n\le\dfrac{3}{2}$

□

定理 2.3. $\dfrac{n^2+4n-14-r_n^2}{2}\le M(C_n)$，當 $n=6s+r_n$，其中 $-2\le r_n\le 3$。

證明.

現取圖 C_n，任取一格爲第一格，順時鐘填入數字如下：(1) 個 $\{4\}$，$(k-1)$ 個 $\{6\}$，(1) 個 $\{3\}$，(m) 個 $\{6k+2\}$，$(k-1)$ 個 $\{6\}$，(1) 個 $\{2\}$，(m) 個 $\{6k+2\}$，(1) 個 $\{1\}$，$(k-1)$ 個 $\{6\}$，(1) 個 $\{5\}$，(m) 個 $\{6k+2\}$，其中 $3m+3k+2=n$。則$f_s(C_n)=(3m+3)(6k+2)-9$。

1. 說明圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數 x： 根據 **引理** 2.1，只需要證明圖 C_n 能生成所有小於等於 $\dfrac{f_s(C_n)}{2}$ 的正整數即可，亦即證明圖 C_n 能生成所有小於等於 $(3m+3)(3k+1)-5$ 的正整數。

   (a) $1\le x\le 6k+1$：
   對 $x=6r$，其中 $1\le r\le k-1$，取子圖 $H_{k+2+m,k+1+m+r}$
   對 $4x=6r+1$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{2k+2+2m,2k+2+2m+r}$
   對 $x=6r+2$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{2k+m+1-r,2k+m+1}$
   對 $x=6r+3$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{k+1,k+1-r}$

對 $x=6r+4$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{1,1+r}$
對 $x=6r+5$，其中 $0\le r\le k-1$，取子圖 $H_{3k+2m+2-r,3k+2m+2}$
對 $x=6k$，取子圖 $H_{2k+2m+2,3k+2m+2}$
對 $x=6k+1$，取子圖 $H_{1,k+1}$

(b) 6k+2$\le x\le(6k+2)(m+1)-1$：
對 $x=(6k+2)s+6r$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le m$，取子圖 $H_{k+m+2-s,k+m+1+r}$
對 $x=(6k+2)s+6r+1$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le m$，取子圖 $H_{2k+2m+2-s,2k+2m+2+r}$
對 $x=(6k+2)s+6r+2$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le m$，取子圖 $H_{2k+m+1-r,2k+m+1+s}$
對 $x=(6k+2)s+6r+3$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le m$，取子圖 $H_{k+1-r,k+1+s}$
對 $x=(6k+2)s+6r+4$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le m$，取子圖 $H'_{2+r,n-s}$
對 $x=(6k+2)s+6r+5$，其中 $0\le r\le k-1$，$1\le s\le m$，取子圖 $H_{3k+2m+2-r,3k+2m+2+s}$
對 $x=(6k+2)s+6k$，其中 $1\le s\le m$，取子圖 $H_{2k+2m+2-s,3k+2m+2}$
對 $x=(6k+2)s+6k+1$，其中 $1\le s\le m$，取子圖 $H_{1,k+1+s}$

(c) $(6k+2)(m+1)\le x\le(2m+1)(6k+2)-1$：
對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6r$，其中 $0\le r\le k-1$，$0\le s\le m-1$，取子圖

$$H_{2k+m+1-r,3k+2m+2+s}$$

對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6r+1$，其中 $-1\le r\le k-2$，$0\le s\le m-1$，取子圖

$$H_{k+m+2-s,2k+m+3+r}$$

對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6r+2$，其中 $0\le r\le k-1$，$0\le s\le m-1$，取子圖

$$H'_{2+r,2k+2m+1-s}$$

對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6r+3$，其中 $0\le r\le k-1$，$0\le s\le m-1$，取子圖

$$H_{k-r,2k+1+m+s}$$

對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6r+4$，其中 $0\le r\le k-1$，$0\le s\le m-1$，取子圖

$$H'_{k+1+s,3k+2m+2-r}$$

對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6r+5$，其中 $0\le r\le k-2$，$0\le s\le m-1$，取子圖

$$H'_{k+m+3+r,n-s}$$

對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6k-5$，其中 $0\le s\le m-1$，取子圖 $H_{1,2k+m+1+s}$
對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6k-1$，其中 $0\le s\le m-1$，取子圖 $H'_{k+2+s,2k+2m+1}$
對 $x=(6k+2)(m+s+1)+6k$，其中 $0\le s\le m-1$，取子圖 $H_{2k+m+2,3k+2m+3+s}$
對 $x=(6k+2)(m+s+1)$，其中 $0\le s\le m-1$，取子圖 $H_{2k+m+1,3k+2m+2+s}$

故圖 C_n 能生成所有小於 $(6k+2)(m+1)$ 的正整數，而

$$(6k+2)(2m+1)-1>(3m+3)(3k+1)-5=\frac{f_s(C_n)}{2}$$

故圖 C_n 能生成所有小於等於 $f_s(C_n)$ 的正整數。

2. 求 $f_s(C_n)$ 的最大值： 因爲 $3m+3k+2=n$，故 $m=\dfrac{n-3k-2}{3}$。

$$\begin{aligned}f_s(C_n)&=(3m+3)(6k+2)-9=(n-3k+1)(6k+2)-9\\&=-18k^2+6nk+2n-7=-2(3k-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2+4n-14}{2}\le\frac{n^2+4n-14}{2}\end{aligned}$$

上式等號成立的條件爲 $k=\dfrac{n}{6}$，k，n 皆爲正整數。但 $\dfrac{n}{6}$ 並不一定是正整數，所以 k 值需取最接近 $\dfrac{n}{6}$ 的整數：

(a) $n=6s$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n}{6}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+4n-14}{2}$

(b) $n=6s+1$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n-1}{6}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+4n-15}{2}$

(c) $n=6s+2$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n-2}{6}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+4n-18}{2}$

(d) $n=6s+3$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n-3}{6}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+4n-23}{2}$

(e) $n=6s+4$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n+2}{6}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+4n-18}{2}$

(f) $n=6s+5$，s 爲正整數：取 $k=\frac{n+1}{6}$，則 $f_s(C_n)=\frac{n^2+4n-15}{2}$

$$\text{故}\begin{cases}\frac{n^2+4n-14}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=6s,\ \text{其中 其中 } s \text{ 爲正整數}\\ \frac{n^2+4n-15}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=6s+1 \text{ 或 } 6s+5,\ \text{其中 } s \text{ 爲正整數}\\ \frac{n^2+4n-18}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=6s+2 \text{ 或 } 6s+4,\ \text{其中 } s \text{ 爲正整數}\\ \frac{n^2+4n-23}{2}\le M(C_n),\text{當 } n=6s+3,\ \text{其中 } s \text{ 爲正整數}\end{cases}$$

經統整即得：$\frac{n^2+4n-14-r_n^2}{2}\le M(C_n), n=6s+r_n, -2\le r_n\le 3$

□

定理 2.4. $\frac{n^2+7n-\frac{241}{4}+r_n^2}{2}\le M(C_n)$，當 $n=4s+\frac{3}{2}+r_n$，其中 $-\frac{3}{2}\le r_n\le\frac{3}{2}$。

證明.

我們只須證明 $M(C_n)\ge 2M(P_{n-1})+1$ 即可。我們在 P_{n-1} 的尾端加上一個 $M(P_{n-1})+1$，並將之頭尾相接連成一個 C_n。因爲 P_{n-1} 能生成所有小於等於 $M(P_{n-1})$ 的正整數，再加上 C_n 中有一個 $M(P_{n-1})+1$，故 C_n 能生成所有小於等於 $M(P_{n-1})+1$ 的正整數。而 $M(P_{n-1})+1>\frac{2M(P_{n-1})+1}{2}=\frac{f_s(C_n)}{2}$，由 **引理** 2.1，知此填數字法爲一 IC 著色，故 $M(C_n)\ge 2M(P_{n-1})+1$，將 **定理** 1.2 之結果帶入上式即得原命題。 □

2.3 輪形圖

前人的研究中，最好的成果爲：$2^n+10\le M(W_n)\le 2^n+n(n-1)+1$，以下我們先證明前人的結果，並改進給出更好的結果：

定理 3.1. $2^n+10\le M(W_n)$

證明.

令形成環的 n 個點分別爲 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，而和這 n 個點都有連結的點爲 a_{n+1}。設 $a_1=11, a_2=4, a_3=2, a_i=2^{i-1}\,(4\le i\le n), a_{n+1}=1$，則 $f_s(W_n)=2^n+10$。以下說明此填數字法能夠生成所有小於等於 2^n+10 的正整數。

我們先證明：若是將 a_1 和 a_n 的連線去除，並用一樣的填數字法，則此圖（以下簡稱W_n-e）能夠生成 1 到 2^n 的所有正整數。我們採用數學歸納法：

1. $n=4$：$a_2,a_3,a_4,a_5=1$ 可生成 1 到 11, 13, 14, 15 的整數，而 $a_1+a_5=12$，$a_1+a_2+a_5=16$，故 $n=4$ 時成立。

2. 設 $n = k$ 時命題成立，即 $W_k - e$ 能生成 1 到 2^k 的所有正整數。那麼當 $n = k + 1$ 時，$W_{k+1} - e$ 較 $W_k - e$ 多增加了一個 2^k。因爲包含 a_{k+2} 的連通子圖可以連續的生成 11，12，13，⋯，2^k，故只須證明 $W_{k+1} - e$ 能生成 $2^k + 1$到 $2^k + 10$ 的所有正整數即可。

$$
\begin{aligned}
2^k + 1 &= a_{k+1} + a_{k+2} \\
2^k + 2 &= f_s\left(W_k - e\right) - a_4 \\
2^k + 3 &= a_{k+1} + a_{k+2} + a_3 \\
2^k + 4 &= f_s\left(W_k - e\right) - a_2 - a_3 \\
2^k + 5 &= a_{k+1} + a_{k+2} + a_2 \\
2^k + 6 &= f_s\left(W_k - e\right) - a_2 \\
2^k + 7 &= a_{k+1} + a_{k+2} + a_2 + a_3 \\
2^k + 8 &= f_s\left(W_k - e\right) - a_3 \\
2^k + 9 &= a_{k+1} + a_{k+2} + a_4 \\
2^k + 10 &= f_s\left(W_k - e\right)
\end{aligned}
$$

故當 $n = k$ 成立時，$n = k + 1$ 也會成立。由數學歸納法得 $W_n - e$ 能夠生成 1 到 2^n 的所有正整數。

由於 $W_n - e$ 是 W_n 的子圖，所以 W_n 也能生成 1 到 2^n 的所有正整數。接下來只需要說明 W_n 能生成 $2^n + 1$ 到 $2^n + 10$ 的所有正整數即可。

$$
\begin{aligned}
2^n + 1 &= f_s\left(W_n\right) - a_4 - a_{n+1} \\
2^n + 2 &= f_s\left(W_n\right) - a_4 \\
2^n + 3 &= f_s\left(W_n\right) - a_2 - a_3 - a_{n+1} \\
2^n + 4 &= f_s\left(W_n\right) - a_2 - a_3 \\
2^n + 5 &= f_s\left(W_n\right) - a_2 - a_{n+1} \\
2^n + 6 &= f_s\left(W_n\right) - a_2 \\
2^n + 7 &= f_s\left(W_n\right) - a_3 - a_{n+1} \\
2^n + 8 &= f_s\left(W_n\right) - a_3 \\
2^n + 9 &= f_s\left(W_n\right) - a_{n+1} \\
2^n + 10 &= f_s\left(W_n\right)
\end{aligned}
$$

故 W_n 能生成 1 到 $2^n + 10$ 的所有正整數，所以 $2^n + 10 \le M\left(W_n\right)$。 □

定理 3.2. $2^n + 12 \le M\left(W_n\right)$

證明.

令形成環的 n 個點分別爲 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，而和這 n 個點都有連結的點爲 a_{n+1}。設 $a_1 = 11, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 8, a_5 = 2^{n-1} + 2, a_i = 2^{i-2}\left(6 \le i \le n\right), a_{n+1} = 1$，則 $f_s\left(W_n\right) = 2^n + 12$。以下說明此填數字法能夠生成所有小於等於 $2^n + 10$ 的正整數。

此圖相當於將 **定理** 3.1 的填數字法中 8 和 16 拆開，再塞入一個 $2^{n-1} + 2$。依照 **定理** 3.1 的證明，理論上這格應該只能填 2^{n-1}，但把 8 和 16 拆開後，除了 a_5 之外的所有點形成的子圖便能夠連續生成 1 到 $2^{n-1} + 2$ 的所有正整數，故我們取 $a_5 = 2^{n-1} + 2$。而包含 a_{n+1} 的連通子圖能夠連續的生成 11 到 $2^{n-1} + 10$ 的數，所以只需證明此填數字法能夠生成 $2^{n-1} + 3$ 到

$2^{n-1}+12$ 的所有正整數即可。

$$
\begin{aligned}
2^{n-1}+3 &= a_5+a_{n+1} \\
2^{n-1}+4 &= f_s(W_n)-a_5-a_2-a_3 \\
2^{n-1}+5 &= a_5+a_{n+1}+a_3 \\
2^{n-1}+6 &= f_s(W_n)-a_5-a_2 \\
2^{n-1}+7 &= a_5+a_{n+1}+a_2 \\
2^{n-1}+8 &= f_s(W_n)-a_5-a_3 \\
2^{n-1}+9 &= a_5+a_{n+1}+a_2+a_3 \\
2^{n-1}+10 &= f_s(W_n)-a_5 \\
2^{n-1}+11 &= a_5+a_{n+1}+a_4 \\
2^{n-1}+12 &= a_5+a_3+a_4
\end{aligned}
$$

故 W_n 能生成 1 到 2^n+12 的所有正整數，所以 $2^n+12\le M(W_n)$。須注意的是，因爲此定理已經假設 $a_1=11, a_2=4, a_3=2, a_4=8, a_5=2^{n-1}+2$，故只有當 $n\ge 5$ 時此定理成立。 □

2.4 雙線圖

雙線圖的靈感來自學校園遊會時使用的園遊券。學校園遊券一張 100 元，分成兩排，每排有五格，依序分別是 5 元，5 元，10 元，10 元，20 元。有一次，我想要從中撕下連續的 55 元，找了一段時間才發現可以撕 4 張 10 元和 1 張 5 元。這個問題恰好就是 IC 著色，遂著手研究。

2.4.1 雙線圖之上界

對於一個圖來說，其連通子圖數顯然爲其 IC 指數的上界。所以我們先求出雙線圖的連通子圖數以得其上界。

定理 4.1. $M(D_n)\le \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+3}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+3}}{4}-2n-\dfrac{7}{2}$

證明.

設 D_n 的連通子圖數爲 a_n，其中包含 $(n,1)$ 的所有連通子圖數爲 b_n，包含 $(n,1)$ 及 $(n,2)$ 的所有連通子圖數爲 c_n。我們可以列出以下等式：

$$a_{n+1}=3+a_n+4b_n-c_n \tag{1}$$
$$b_{n+1}=2+3b_n-c_n \tag{2}$$
$$c_{n+1}=1+2b_n-c_n \tag{3}$$

故 $c_n=2+3b_n-b_{n+1}$。將之代入 (3)，得 $b_{n+2}-2b_{n+1}-b_n-3=0$，即

$$\left(b_{n+2}+\frac{3}{2}\right)-2\left(b_{n+1}+\frac{3}{2}\right)-\left(b_n+\frac{3}{2}\right)=0$$

解此遞迴式，可得：

$$b_n=\frac{(1+\sqrt{2})^{n+2}+(1-\sqrt{2})^{n+2}}{4}-\frac{3}{2}$$

將之代回(2)，可得：

$$c_n = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)(1+\sqrt{2})^{n+2} + (2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n+2}}{4} - 1$$

將之代回(1)，即得：

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)(1+\sqrt{2})^{n+2} + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n+2}}{4} - 2 \\
a_n - a_{n-1} &= \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)(1+\sqrt{2})^{n+1} + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n+1}}{4} - 2 \\
&\vdots \\
a_2 - a_1 &= \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)(1+\sqrt{2})^{3} + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{3}}{4} - 2
\end{aligned}$$

全部相加，經化簡後可得：

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+3} + (1-\sqrt{2})^{n+3}}{4} - 2n - \frac{7}{2}$$

此即 D_n 的連通子圖數，故 $M(D_n) \le \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+3} + (1-\sqrt{2})^{n+3}}{4} - 2n - \dfrac{7}{2}$。 □

2.4.2 雙線圖之下界

定理 4.2. $M(D_n) \ge 6 \cdot 2^n - 7 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1$

證明.

設 $T = 3 \cdot \left(2^k - 1\right) + 1$。令 $(i,1) = (i,2) = 3 \cdot 2^{k-1-i}\,(1 \le i \le k-1)$，$(k,1) = 1$，$(k,2) = 2$，$(j,1) = (j,2) = 2^{j-k-1} \cdot T(k+1 \le i \le n)$。則 $f_s(D_n) = 2^{n-k+1} \cdot T - 1$。以下說明此填數字法能夠生成所有小於等於 $f_s(D_n)$ 的正整數，並求出其最大值。

1. 首先說明 $(i,1)$fi$(i,2)\,(1 \le i \le k)$ 所形成的子圖能夠生成 1 到 $T-1$ 的所有正整數。我們使用數學歸納法：

   (a) $k = 2$：即 $(1,1) = (1,2) = 3$，$(2,1) = 1$，$(2,2) = 2$。顯見其能夠生成 1 到 9 的所有正整數，故 $k = 2$ 時命題成立。

   (b) 設 $k = n$ 時命題成立。那麼當 $k = n+1$ 時，只須證明此圖能夠生成 $3 \cdot (2^n - 1) + 1$ 到 $3 \cdot \left(2^{n+1} - 1\right)$的所有正整數即可。而 $\sum_{m=1}^{n+1} (m,1)$ =$3 \cdot (2^n - 1) + 1$。對於所有的 $h \in \left[3 \cdot (2^n - 1) + 2, 3 \cdot \left(2^{n+1} - 1\right)\right]$，我們都能將 h 寫做 $3 \cdot (2^n - 1) + 1 + s$，其中 $s \ge 1$。而 s 必定可以唯一的寫做 $3v + r_0, 0 \le r_0 \le 2$。設 $v = \sum t_p \cdot 2^p$ 爲 v 的二進位表示式 ($t_p = 0$ 或 1)，那麼 h 可以由以下方法生成：

   - $r_0 = 1$：取 $(i,1)($ $1 \le i \le n+1)$ 和 $(n-p,2)$ (其中 $t_p = 1$) 所形成的子圖
   - $r_0 = 2$：取 $(i,2)($ $1 \le i \le n+1)$ 和 $(n-p,1)$ (其中 $t_p = 1$) 所形成的子圖

   故當 $k = n$ 成立時，$k = n+1$ 亦成立。

   綜合以上，由數學歸納法知 $(i,1)$，$(i,2)$ $(1 \le i \le k)$ 所形成的子圖能夠生成 1 到 $T-1$ 的所有正整數。

2. 透過和 1. 類似的方法，我們也可以證明加上 $(j,1) = (j,2) = 2^{j-k-1} \cdot T(k+1 \le i \le n)$ 後，此圖能夠生成所有小於等於 $f_s(D_n)$ 的正整數，在此不多做贅述。

3. 接著，我們要求出 $f_s(D_n) = 2^{n-k+1} \cdot T - 1$ 的最大値。 將 $T = 3 \cdot \left(2^k - 1\right) + 1$ 代入後，可得：
$$f_s(D_n) = 6 \cdot 2^n - 2^{n-k+2} - 3 \cdot 2^k + 1$$
欲使 $f_s(D_n)$ 達最大値，就須使 $2^{n-k+2} + 3 \cdot 2^k$ 達最小值。
令 $f(k) = 2^{n-k+2} + 3 \cdot 2^k$：
解 $f(k) \le f(k+1)$，可得 $k \ge \frac{n}{2}$
解 $f(k) \ge f(k+1)$，可得 $k \le \frac{n}{2}$
故 $k = \frac{n}{2}$ 時，$f_s(D_n)$ 有最大値，爲 $6 \cdot 2^n - 7 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1$。

□

2.5 接近完全圖

前人有關 IC 著色的研究中，許多部分著重於接近完全圖的研究。在研究的過程中，我們對於完全圖扣除任意多條連續的邊所形成的圖 ($K_n - P_r$) 和扣除 $K_{1,m}$ 的圖 ($K_n - K_{1,m}$) 特別感興趣。特別需要說明的是，$K_n - P_r$ 中所扣除的連續邊並不會形成環。

以下針對這兩種圖的 IC 指數上下界來討論：

定理 5.1. $M(K_n - P_r) \le 2^n - 2r + 2$

證明.

我們將被扣除的邊上所包含的 r 個點依照順序標示爲 $a_1, a_2, \cdots, a_r$。其中，a_i 和 a_{i+1} 所形成的子圖並不連續（對 $1 \le i \le r-1$），a_i、a_{i+1} 和 a_{i+2} 所形成的子圖也不連續（對 $1 \le i \le r-2$），所以圖 $K_n - P_r$ 的連通子圖數爲 $2^n - 1 - 2r + 3 = 2^n - 2r + 2$，故$M(K_n - P_r) \le 2^n - 2r + 2$。 □

定理 5.2. $M(K_n - P_3) \le 2^n - 5$

證明.

設被扣除的連續邊上包含的三個點依序爲 a_1, a_2, a_3。取 $a_1 = 1$，$a_2 = 2^{n-1} - 4$，$a_3 = 2$，剩下的點 a_i 填入 $2^{i-2} (4 \le i \le n)$，則 $f_s(K_n - P_3) = 2^n - 5$。

1. 說明此塡數字法能生成所有小於等於 $2^n - 5$ 的數：

   (a) $1 \le x \le 2^{n-1} - 1$：
   若是我們不看 a_2 和所有與 a_2 聯結的邊，則剩下的圖恰好是 K_{n-1}，且填入的數字是 1，2，4，8，⋯ 2^{n-2}。由於所有小於 2^{n-1} 的正整數都能唯一的表示成若干 2 的冪次的和，且每個冪次最多用到一次，故 K_{n-1} 能生成所有小於 2^{n-1} 的數。

   (b) $2^{n-1} \le x \le 2^n - 5$：
   由於 a_2 和 1，2 均不相連，故和 a_2 有所連結的連通子圖只能生成 4，5，6，⋯$2^{n-1} - 1$。所以我們取 $a_2 = 2^{n-1} - 4$，如此便能生成 2^{n-1} 到 $2^n - 5$ 的所有整數。

2. 說明 $M(K_n - P_3) \le 2^n - 5$：

   如果 $M(K_n - P_3) > 2^n - 5$，則因爲 $K_n - P_3$ 的連通子圖數爲 $2^n - 1 - 3 = 2^n - 4$，故 $M(K_n - P_3) \le 2^n - 4$，因此 $M(K_n - P_3) = 2^n - 4$。

   在 $n = 1, 2$ 時，此圖並不存在；$n = 3$ 時，此圖被切成了兩個不互相連結的部分，所以不可能存在 IC 著色。 $n = 4$ 時，經手算可以發現 $M(K_n - P_3) = 11$ 。故以下的討論皆假設 $n \ge 5$ 。

   根據 1 填入的位置不同，我們分三種情況討論：

(a) $1 = a_2$：
設 b_n 為 a_n 的重新排列，使得 $b_i \le b_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$。
若 $1 = a_2$，則 2 不能填入 a_1 或 a_3，否則 $b_3 = 3$。由於$1+2+3 = 6$，故 $b_4 \le 7$，$b_5 \le 14$，⋯，$b_k \le 7 \cdot 2^{k-4}$，⋯，$b_k \le 7 \cdot 2^{n-4}$，那麼 $\sum_{k=1}^{n} b_k \le 7 \cdot 2^{n-3} - 1 \le 2^n - 5$ (當 $n \ge 5$ 時)。
故 $2 \in \{a_4, a_5, \cdots, a_n\}$，且 $2 = b_2$。由於 $1 + 2 = 3$，且不能有總和相同的相異子圖(否則 $f_s(K_n - P_3) \le 2^n - 5$)，所以 $b_3 = 4$，依此類推得 $b_k = 2^{k-1}$。設 $b_r = a_1 = 2^{r-1}$，那麼此圖無法生成 $2^{r-1} + 1$，故 $2^{r-1} = b_r \le b_{r+1} \le +1$。又 $b_{r+1} \ne 2^{r-1}$ $(\because b_r = 2^{r-1})$，故 $b_{r+1} = 2^{r-1} + 1$。以下分兩種情況討論：

i. 若 $b_{r+1} \in \{a_4, a_5, \cdots, a_n\}$：$b_{r+1} + b_1 = b_2 + b_r$
ii. 若 $b_{r+1} = a_2$：$b_{r+1} + b_2 = b_1 + b_2 + b_r$

皆導致有總和相同的相異子圖，故 $M(K_n - P_3) \le 2^n - 5$。

(b) $1 \in \{a_4, a_5, \cdots, a_n\}$：
設 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subseteq \{a_4, a_5, \cdots, a_n\}$，其中 $b_i = 2^{i-1}$。以下分三種情況討論：

i. $a_m = 2^{m-4}(4 \le m \le j)$，$a_1 = 2^{j-3}$，$a_t = 2^{t-3}(j+1 \le t \le i+3)$，$a_2 = 2^{i+1}$：
由於無法生成 $2^{i+1}+2^{j-3}$，故必有某個 $a_x = 2^{i+1}+2^{j-3}$。那麼 $b_1+a_x = a_1+a_2$。
ii. $a_m = 2^{m-4}(4 \le m \le j)$，$a_2 = 2^{j-3}$，$a_t = 2^{t-3}(j+1 \le t \le i+3)$，$a_1 = 2^{i+1}$：
證明和 i. 類似，在此不多做贅述。
iii. $a_m = 2^{m-4}(4 \le m \le j)$，$a_1 = 2^{j-3}$，$a_t = 2^{t-3}(j+1 \le t \le r)$，$a_3 = 2^{r-2}$，$a_s = 2^{s-2}(r+1 \le t \le i+2)$，$a_2 = 2^{i+1}$：
證明和 i. 類似，在此不多做贅述。

(c) $1 = a_1$：
設$a_i = 2^{i-3}(4 \le i \le j)$。以下分兩種情況討論：

i. $a_2 = 2^{j-2}$：由於無法生成 $2^{j-2} + 1$，故 $b_j = 2^{j-2} + 1$。那麼就會回到 1.(a)(b) 的情況，導致存在總和相同的相異子集。
ii. $a_3 = 2^{j-2}$，$a_k = 2^{k-2}(j+1 \le i \le s)$，$a_1 = 2^{s-1}$：和 i. 的情況相同，在此不多做贅述。

故 $M(K_n - P_3)$ 不能是 $2^n - 4$，所以 $n \ge 5$ 時 $M(K_n - P_3) = 2^n - 5$。

□

依照 **定理** 5.2 的做法，我們將其推廣到 $K_n - P_r$ 的情況，得到 **定理** 5.3：

定理 5.3. $M(K_n - P_r) \ge 2^n - 9 \cdot 2^{r-4} + 1 (r \ge 1)$

證明.
設被扣除的連續邊上包含的點依序為 $a_1, a_2, \cdots, a_r$，剩下的點則為 $a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$。令$a_1 = 1, a_r = 2, a_2 = 2^{n-r+3} - 5, a_{r-1} = 2^{n-r+2} - 3, a_i = 2^{n-r+i+1} - 2^i (3 \le i \le r-3), a_{r-2} = 2^{n-1} - 2^{r-2} + 1$，$a_j = 2^{j-r+1}$ $(r+1 \le j \le n)$。則 $f_s(K_n - P_r) = 2^n - 9 \cdot 2^{r-4} + 1$。以下說明此填數字法能夠生成所有小於等於 $2^n - 9 \cdot 2^{r-4} + 1$ 的正整數。

1. 對於 1 到 $2^{n-r+2} - 1$ 的所有正整數，因為由 $a_1, a_r, a_{r+1}, \cdots, a_n$ 所形成的連通子圖 (以下簡稱此圖為 K_p) 為完全圖，故 1 到 $2^{n-r+2} - 1$ 的所有正整數皆可生成。

2. 對於 2^{n-r+2} 到 $2^{n-r+3} - 4$ 的所有正整數，因為 a_{r-1} 和 2 不相連，所以和 a_{r-1} 相連的連通子圖只能連續的生成 3，4，5，⋯，$2^{n-r+2} - 1$，故取 $a_{r-1} = 2^{n-r+2} - 3$，如此便能生成到 2^{n-r+2} 到 $2^{n-r+3} - 4$ 的所有正整數。

3. 對於 $2^{n-r+3} - 3$ 到 $2^{n-r+4} - 9$ 的所有正整數，因為 a_2 和 1 不相連，所以和 a_2 相連的連通子圖只能連續的生成 2，3，4，⋯，$2^{n-r+3} - 4$，故取 $a_2 = 2^{n-r+3} - 5$，如此便能生成 $2^{n-r+3} - 3$ 到 $2^{n-r+4} - 9$ 的所有正整數。

4. 對於 $2^{n-r+4}-8$ 到 $2^{n-r+5}-18$ 的所有正整數，雖然和 a_3 相連的連通子圖能連續的生成 1，2，3，4，⋯，$2^{n-r+4}-9$，但若取 $a_3=2^{n-r+4}-8$，則 a_4 會因爲和 a_3 不相連而導致和 a_4 相連的連通子圖無法生成 $2^{n-r+4}-8$，進而導致 a_5 必須要等於 $a_3+a_4<2^{n-r+6}-32$，這樣將會造成 a_5 之後的所有數都比原來 **定理** 5.3 所給出的數還要小，那麼其數字總和就會比 **定理** 5.3 給出的和還小。所以我們取 $a_3=2^{n-r+4}-9$ 以避免掉這樣的問題。

5. 以下都和 4. 一樣繼續類推。而我們能取 $a_{r-2}=2^{n-1}-2^{r-2}+1$ 的原因，是因爲它是我們填入的最後一項，不會發生 4. 中所提的問題(因爲沒有更後面的項了)。故 $M(K_n-P_r)\geq 2^n-9\cdot 2^{r-4}+1(r\geq 1)$。

□

定理 5.4. $M(K_n-K_{1,m})=2^n-2^m-1$

證明.

設被扣除的 $K_{1,m}$ 中，中間的點爲 a_1，剩下 m 個點分別爲 a_2，a_3，⋯，a_{m+1}。剩下完全不受影響的點則分別爲 a_{m+2}，a_{m+3}，⋯，a_n。令$a_1=2^{n-1}-2^m$，$a_i=2^{i-2}(2\leq i\leq n)$。則 $f_s(K_n-K_{1,m})=2^n-2^m-1$。以下說明此填數字法能生成 1 到 $f_s(K_n-K_{1,m})$ 的所有正整數。

1. $1\leq x\leq 2^m-1$æ 由於 a_2，a_3，⋯，a_{m+1} 形成一個完全圖 K_m，故所有小於等於 2^m-1 的正整數皆可生成。

2. $2^m\leq x\leq 2^n-2^m-1$：令 $x=2^{n-1}-2^m+s$，其中 $2^m\leq s\leq 2^{n-1}-1$。設 $s=\sum t_p\cdots 2^p$ 爲 s 的二進位表示式($t_p=0$ 或 1)，則取 a_1，$a_{p+2}(t_p=1)$ 所形成的連通子圖即可。

故$M(K_n-K_{1,m})\geq 2^n-2^m-1$。

接著說明 $M(K_n-K_{1,m})\leq 2^n-2^m-1$。設 $M(K_n-K_{1,m})>2^n-2^m-1$，則由於 $K_n-K_{1,m}$ 的連通子圖數爲 $2^n-1-(2^m-1)=2^n-2^m$，故 $M(K_n-K_{1,m})=2^n-2^m$。這意味著存在一種填數字法使得 $K_n-K_{1,m}$ 中沒有總和相同的相異連通子圖。

以下分三種狀況討論：

1. $a_1=1$：
   (a) $2\in\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$：
   因爲 2 和 1 不相連，故必有某個 $a_i=3$；若是 $3\in\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，則必有某個 $a_j=4$。以下分三種情況討論：
      i. $\{2,3,4,8,\cdots,2^k\}\subseteq\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，$2^{k+1}\in\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，那麼 $2^{k+1}+2=2+3+4+8+\cdots+2^k$，不合。
      ii. $\{2,3\}\subseteq\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$， $4\in\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，那麼 $4+1=2+3$，不合
      iii. $2\in\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，$3\in\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，那麼必有某個 $a_k=7$。如果 $7\in\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，則必有某個 $a_s=8$，而 $8+2=7+3$，不合；如果 $7\in\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，則 $7+1+2=7+3$，不合。
   (b) $2\in\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$：
   設 $\{2,4,8,\cdots,2^k\}\subseteq\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，$2^{k+1}\in\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，那麼必有某個 $a_j=2^{k+1}+1$，而 $(2^{k+1}+1)+2=\left(2^{k+1}\right)+1+2$，不合。

2. $1\in\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$：
   (a) $\{1,2,4,\cdots,2^k\}\subseteq\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，$2^{k+1}\in\{a_{m+2},\cdots,a_n\}$：
   由於不能有總和相同的相異連通子圖，所以 $a_1=2^i(i\geq k+2)$。那麼因爲 a_1 和 1 不相連，故必有某個 $a_j=2^i+1,(2^i)+\left(2^{k+1}\right)=(2^i+1)+1+2+4+\cdots+2^k$，不合。

(b) $\{1,2,4,\cdots,2^k\} \subseteq \{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$，$a_1 = 2^{k+1}$：
因不能有總和相同的相異連通子圖，故必有某個 $a_j = 2^r \in \{a_{m+2},\cdots,a_n\}$ $(r \geq k+2)$，且 $\{2^{k+2},2^{k+3},\cdots,2^r\} \subseteq \{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$。又因爲 a_1 和 1 不相連，故必有某個 $a_s = 2^{k+1}+1$，那麼 $(2^{k+1}+1)+2^{r-1}+2^{r-2}+\cdots+1 = \left(2^{k+1}\right)+(2^r)$，不合。

3. $1 \in \{a_{m+2},\cdots,a_n\}$：

(a) $\{1,2,4,\cdots,2^k\} \subseteq \{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，$2^{k+1} \in \{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$：
由於不能有總和相同的相異連通子圖，所以 $a_1 = 2^i (i \geq k+2)$。那麼因爲 a_1 和 2^{k+1} 不相連，故必有某個 $a_j = 2^i + 2^{k+1}, (2^i) + \left(2^{k+1}\right) + (1) = \ (2^i + \ 2^{k+1}) + (1)$，不合。

(b) $\{1,2,4,\cdots,2^k\} \subseteq \{a_{m+2},\cdots,a_n\}$，$a_1 = 2^{k+1}$：
由於不能有總和相同的相異連通子圖，所以必有某個 $a_j = 2^r \in \{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$ $(r \geq k+2)$，那麼因爲 a_j 和 a_1 不相連，所以必有某個 $a_s = 2^{k+1}+2^r$，則 $(2^{k+1})+(2^r)+(1) = (2^{k+1} + \ 2^r)+(1)$，不合。

由以上三點得知並不存在$f_s\left(K_n - K_{1,m}\right) = 2^n - 2^m$的填數字法，故$M\left(K_n - K_{1,m}\right) = 2^n - 2^m - 1$。

□

3 研究結論

經過上述研究，本文得到的結論如下：

1. 直線圖：

$$\frac{n^2+9n-\frac{271}{4}+{r_n}^2}{4} \leq M(P_n) \quad \left(當\ n = 4s+\frac{3}{2}+r_n \geq 45，其中 -\frac{3}{2} \leq r_n \leq \frac{3}{2}\right)$$

同時，我們可以確定：$M(P_n)$ 的二次項係數是 $\frac{1}{4}$。

2. 環形圖：

$$\frac{n^2+7n-\frac{241}{4}+{r_n}^2}{2} \leq M(C_n) \quad \left(當\ n = 4s+\frac{3}{2}+r_n \geq 12，其中 -\frac{3}{2} \leq r_n \leq \frac{3}{2}\right)$$

3. 雙線圖：

$$6 \cdot 2^n - 7 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1 \leq \frac{(1+\sqrt{2})^{n+3}+(1-\sqrt{2})^{n+3}}{4} - 2n - \frac{7}{2}$$

4. 輪形圖：

$$2^n + 12 \leq M(W_n) \quad （當\ n \geq 5\ 時）$$

5. $K_n - P_r$ 以及 $K_n - K_{1,m}$：

$$2^n - 2r + 2 \geq M(K_n - P_r) \geq 2^n - 9 \cdot 2^{r-4} + 1 \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

$$M(K_n - K_{1,m}) = 2^n - 2^m - 1 \quad (n \geq m+1)$$

4 討論與未來展望

1. 對 P_n, C_n, W_n 而言，本文主要針對的是 IC 指數之下界改進，往後可嘗試改進上界，將 IC 指數的範圍再縮得更小。

2. 對 D_n 而言，除了文中所提的下界構造方法之外，我們還找到了另外一種更好的填數字法。但我們目前仍求不出這種構造方法的總數字和，故並未在文中提出。往後可繼續嘗試解出這個新方法的數字和。

3. 對 $K_n - P_r$ 而言，根據前人與本文所求出的結果，當 $r = 1$，2，3，4 時，$M(K_n - P_r) \geq 2^n - 2^{r-1} - 1$。我們猜測應該有 $M(K_n - P_r) = 2^n - 2^{r-1} - 1$，但 r 大於 4 的情況過於複雜，無法使用文中分項討論的方式證出。未來希望能找到分項討論之外的方式，能更有效率的證明 $M(K_n - P_r)$ 的 IC 指數上下界。

參考文獻

[1] 劉薇，The stamp covering problem of path，第六屆丘成桐數學獎，2014

[2] 鄭晏奇、楊翔雲、黃紹宸、李育霖，圈圈相連到天邊，中華民國第 50 屆中小學科展，2013

[3] 呂雨錚、陳映璇，圖的 IC-著色之初探，全國高級中學小論文競賽，2013

[4] 林施佐，相連圖與組合圖之 IC-著色，大同大學應用數學研究所碩士論文，2007

[5] 黃崇智、劉沛宸、許晉瑋，車輪的 IC 著色，全國高級中學小論文競賽，2017

[6] 林耀仁，圖的 IC-著色之研究，大同大學應用數學研究所碩士論文，2008

[7] Chin-Lin Shiue and Hung-Lin Fu, The IC-Indices of Complete Bipartite Graphs, Electronic Fournal of Combinatorics, 2008

[8] Stephen G. Penrice, Some New Graph Labeling Problems: a Preliminary Report, DIMACS Technical Report 95-29, 1995

作品評語

張鎮華教授
國立臺灣大學數學系

這篇文章主要在研究由郵票問題衍生出來的 IC 著色問題，也就是對於一個圖 G，將其每一個點賦與一個正整數、其總合爲 s，使得任意介於 1 和 s 之間的正整數 k. 都會有 G 的連通子圖、其所有點所被賦與的數的總合是 k。圖 G 的 IC 指數 $M(G)$ 就是滿足上述條件的最大可能的 s。一般而言，縱使是很簡單的圖，它的 IC 指數都不容易求得精確值，大部分的結果是上界及下界。這篇文章主要針對直線圖、環形圖、雙線圖、輪形圖、接近完全圖等圖類來探討其 IC 指數。

這篇文章首先探討直線圖 P_n 的 IC 指數，以前人得到的最好結果是 $\left(n^2+8n-8\right)/4 \le M(P_n) \le n(n+1)/2$。這篇文章用了精巧的計算，將下界大約增加 $n/4$，也就是 $(n^2+9n-52+t_n(t_n-3))/4 \le M(P_n)$，$n=4s+t_n$、$0 \le t_n \le 3$（這裡的 t_n 相當於文中的 $r_n+3/2$）。對於上界，經由論證更得到：如果 $M(P_n)=an^2+bn+c$ 的話，就會有 $a \le 1/4$。也就是，漸進來說，下界和眞正的答案只有 $O(n)$ 的誤差，這是一個很不錯的結果。

接下來，探討環形圖 C_n 的 IC 指數，以前人得到的最好結果是 $\left(n^2+2n-1\right)/2 \le M(P_n)$。這篇文章將下界大約增加 $5n/2$，也就是 $\left(n^2+7n-58+t_n(t_n-3)\right)/2 \le M(P_n)$，其中 $n=4s+t_n$、$0 \le t_n \le 3$（這裡的 t_n 相當於文中的 $r_n+3/2$）。其他如雙線圖、輪形圖、接近完全圖等圖類的 IC 指數，也都有比前人更好的改進。

整體來說，這篇文章得到的結論不錯，所使用的手法相當細致，是一篇優良的文章。