Menger Sponge 的組合與拓樸性質

臺北市立第一女子高級中學 陳宜君
指導老師：楊宗穎

Abstract

Given a cube, and take the following steps in order : (1) Divide every face of the cube into 9 squares, and this will sub-divide the cube into 27 smaller cubes. (2) Remove the smaller cube in the middle of each face, and remove the smaller cube in the very center of the larger cube. (3) Repeat steps (1) and (2) for each of the remaining smaller cubes. Repeat the above-mentioned steps. If we take these steps by n times, then the remaining form of shape was called a "**level-n Menger sponge**" which is written as M_n. This study will take the level-n Menger sponge as a geometric form which consists of vertices, edges, and faces. I use the way of permutation and combination that I learned in senior high school to count the vertices, edges, and faces of M_n and to explore the related coloring problems.

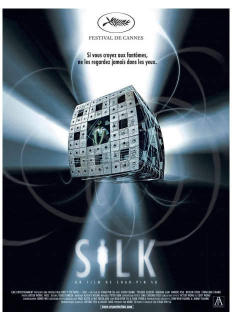
中文摘要

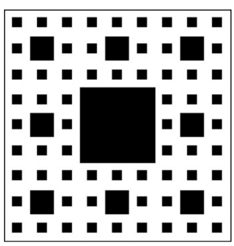
給定一個正立方體，依序執行以下動作：（1）把正立方體的每一個面分割爲 9 個正方形，則可以將此正立方體分割爲 27 個小正立方體；（2）把每一面的中間的小正立方體刪除掉，亦將最中心的小立方體刪除掉；（3）把遺留下來的小正立方體都依序重複步驟（1）、（2）。把以上步驟重複操作，若操作n回後，則將所得的殘存形體稱爲第 n 階的 「**門格海綿Menger sponge**」，並記爲 M_n。本文將第 n 階的門格海綿 M_n 視爲由 「點、線、面」所組合而成的幾何形體，利用高中排列組合的計數方法來刻畫 M_n 的點、線、面的數量，探討相關的著色以及拓樸學中虧格數的問題。

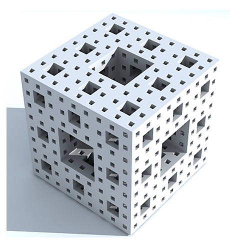
1 簡介

1.1 研究動機

在數列與級數的單元中，曾經遇過以下問題：「一單位長的正方形，第一次將其平分成 9 塊（九宮格形），然後挖去中間一塊。第二次再將剩餘各小正方形各平分成 9 塊，分別去掉中間各一塊，之後依此類推（如中下圖所示）。試求執行 n 次後，所刪去掉的面積總量爲何？」對於這個圖形，我覺得它呈現一種特別的數學之美，因此我好奇，像這樣的利用遞迴手法建構出來的平面圖形，能否將類似的概念擴展到三度空間的形體？上網搜尋資料後，我得知此問題的三度空間版本稱爲**門格海綿**（如右下圖所示），英文爲 **Menger sponge**，是一個可以擁有無限表面積，但體積趨近於 0 的形體。在收集資料的過程中，亦得知門格海綿曾經出現在 2006 年台灣科幻驚悚電影 「詭絲」的劇情中（左下圖爲電影海報），讓門格海綿更具有某種神秘感，這更添加了我對於門格海綿的研究興趣。因此我利用 3D 列印，製作了一個第 3 階門格海綿的模型，進一步觀察其結構。







有關門格海綿的表面積、體積與邊長等度量指標，皆已有完整的研究。因此我改以拓樸的角度來看待門格海綿，在不計較長度、體積、表面積的情況下，進行點、邊、面的數量研究。同時我也在組合學中尋找相關的議題，以著色問題的角度切入，對門格海綿進行非典型的研究。

1.2 研究目的

令 M_n 爲第 n 階的門格海綿，$V(M_n)$ 爲 M_n 的點所形成的集合，$E(M_n)$ 爲 M_n 的邊所形成的集合，$F(M_n)$ 爲 M_n 的面所形成的集合。以下爲我的研究目的：

1. 刻畫點集合的元素數量 $|V(M_n)|$；
2. 刻畫邊集合的元素數量 $|E(M_n)|$；
3. 刻畫面集合的元素數量 $|F(M_n)|$；
4. 將門格海綿視爲鑲嵌在一個封閉曲面上的平面圖，考慮點、面、邊著色以及全著色等問題，則在不同的著色議題上，最少需要多少個不同的顏色，方能將 M_n 完成相對的著色問題。

1.3 名詞定義

1.3.1 Menger Sponge 的原始定義

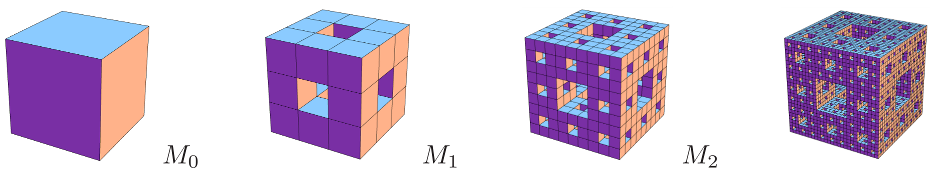
給定一個正立方體，依序執行下列步驟：

（步驟 1）： 把正立方體平均分割爲 27 個小正立方體（此時正立方體的每一個面被平均分割爲 9 個正方形）。

（步驟 2）： 把每一面的中間的小正立方體刪除掉，亦將最中心的小正立方體刪除掉。

（步驟 3）： 把遺留下來的小正立方體都依序重複步驟 1、步驟 2。

每當執行完步驟 1、步驟 2 時，此時可以選擇停止，或繼續執行步驟 3。把以上步驟重複操作，若操作 回後，則將所得的殘存形體稱爲第 n 階的 **「門格海綿 Menger sponge」**，並記爲 「M_n」。特別地，我將原始的正立方體視爲第 0 階的門格海綿。由上述的構造方法可知，門格海綿是由一個正立方體透過幾個固定的步驟，遞迴式方法所建構出來的三度空間形體。下圖即爲第 0 階到第 3 階的門格海綿示意圖：



M_0 M_1 M_2 M_3

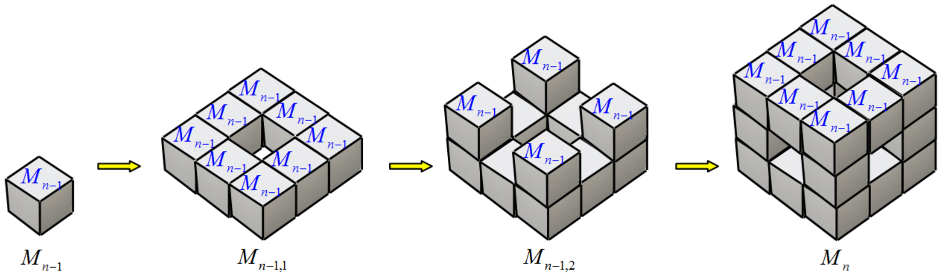
1.3.2 重新建構後 Menger Sponge 的定義

由上述的建構過程可知，越高階的門格海綿將被分割成更多且更細緻的小正立方體，而高階的門格海綿，都是透過前一階的門格海綿所建構出來的。換句話說，對任意自然數 n 而言，M_n 是由 M_{n-1} 所分割出來的。在不計較長度、體積、表面積的情況下，我將門格海綿「**遞迴式分割**」的過程轉換爲 「**遞迴式堆疊**」的建構方法。以下我將利用遞迴式堆疊的方式來重新定義門格海綿，定義如下：

1. 令正立方體爲第 0 階門格海綿，並記爲 M_0；
2. 將 8 個 M_{n-1} 圍成一個正方形，其中每邊恰用 3 個 M_{n-1}。將所得的形體記爲 $M_{n-1,1}$；
3. 再將 4 個 M_{n-1} 堆放在 $M_{n-1,1}$ 角落的 M_{n-1} 上方。將所得形體記爲 $M_{n-1,2}$；

4. 再將另一個 $M_{n-1,1}$ 放置在 $M_{n-1,2}$ 的上方；

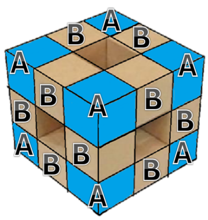
5. 透過 2、3、4 步驟所得的形體記為 M_n，即為第 n 階的門格海綿。



1.3.3 Menger Sponge 的 A、B 方塊

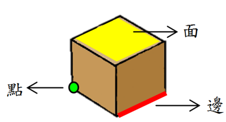
透過上述堆疊的概念可知，對任意自然數 n，M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊出來的。因為 M_0 是一個正立方體，所以 M_n 的結構中即包含 20^n 個 M_0。

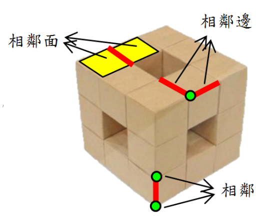
每個 M_n 的門格海綿是由 20 個 M_{n-1} 的門格海綿所組成的。為了方便後面說明，我將門格海綿 M_n 的組成依所在的位置，區分成兩種方塊，一是位在角落上面的方塊，我稱作為 M_n 的「A **方塊**」（如圖藍色方塊所示）；二是非角落上面的方塊，我稱作為 M_n 的「B **方塊**」（如圖褐色方塊所示）。而門格海綿 M_n 的 A 或 B 方塊均是以 M_{n-1} 做為一個基本單位，其中 M_n 共有 8 個 A 方塊及 12 個 B 方塊。

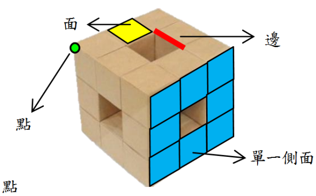


1.3.4 Menger Sponge 中的點、邊、面

使用遞迴式堆疊的方式來瞭解門格海綿 M_n 的結構後，接著要從拓樸的角度來分析 M_n。對於正立方體 M_0，我將 M_0 視為一個由 8 個點、12 條邊、6 個面的形體（如左下圖所示）。由於 M_n 是透過眾多的 M_0 所組合而成，故亦可將點、邊、面等概念套用至 M_n 上。若兩個點之間有邊相連，則稱此「**兩點相鄰**」；若兩個邊交會在一個點，則稱此「**兩邊相鄰**」；若兩個面之間交會於一條邊，則稱此「**兩面相鄰**」（如右側中間圖所示）。此外，給定 M_n，$V(M_n)$ 代表 M_n 的所有點形成的集合；$E(M_n)$ 代表 M_n 的所有邊形成的集合；$F(M_n)$ 代表 M_n 的所有面形成的集合。另外我特別定義「單一側面」是指：在圖形最外側，且在同一平面上所有面所形成的面集合（如右下圖所示）。







1.4 主要結果

對任意自然數 n，令 M_n 爲第 n 階的門格海綿，$V(M_n)$ 爲 M_n 的點所形成的集合，$E(M_n)$ 爲 M_n 的邊所形成的集合，$F(M_n)$ 爲 M_n 的面所形成的集合。以下爲我的研究結果：

1. 點集合的元素數量 $|V(M_n)| = \frac{32}{19}\times 20^n + \frac{24}{7}\times 8^n + \frac{384}{133}$。
2. 邊集合的元素數量 $|E(M_n)| = 4\times 20^n + 8^{n+1}$。
3. 面集合的元素數量 $|F(M_n)| = 2\times 20^n + 4\times 8^n$。
4. 在點著色方面，M_n 恆爲 2−vertex-colorable 且 $\chi(M_n) = 2$。
5. 在面著色方面，M_n 恆爲 3−face-colorable 且 $\chi_{face}(M_n) = 3$。
6. 在邊著色方面，M_n 恆爲 6−edge-colorable 且 $\chi'(M_n) = 6$。
7. 在邊著色方面，M_n 恆爲 6−edge-colorable 且 $\chi'(M_n) = 6$。
8. $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$M_n$ 的虧格數 $\gamma(M_n) = \frac{3}{19}\times 20^n + \frac{2}{7}\times 8^n - \frac{59}{133}$。
9. $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$\chi(S_{\gamma(M_n)}) = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{1+48\left(\frac{3}{19}\times 20^n+\frac{2}{7}\times 8^n-\frac{59}{133}\right)}\right)\right\rfloor$。

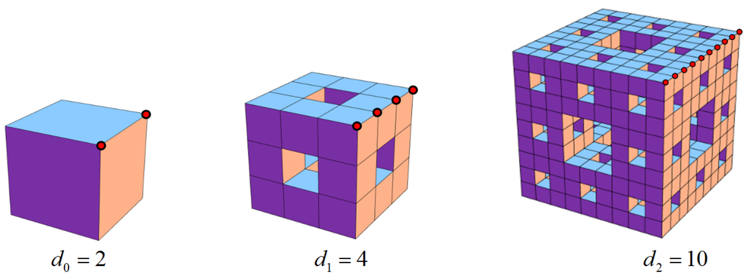
2 研究內容

2.1 Menger Sponge 點、邊、面的計算

已知第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20^n 個 M_0 所組成，因爲 M_0 共有 8 個點、12 條邊、6 個面，而在堆疊的過程當中，許多點、邊、面將會重疊在一起，而 M_n 即爲一個龐大但又富有規律的形體，所以我將建立遞迴關係式，並運用排列組合的概念來計算 M_n 的點、邊、面的個數。爲了方便起見，對於非負整數 n，我將 $|V(M_n)|$、$|E(M_n)|$、$|F(M_n)|$ 分別以符號記爲 v_n、e_n、f_n。

2.1.1 M_n 稜線上的點數

首先我考慮 M_n 上一條稜線上的點數量，定義 d_n 爲第 n 階門格海綿 M_n 單一稜線上的點數。

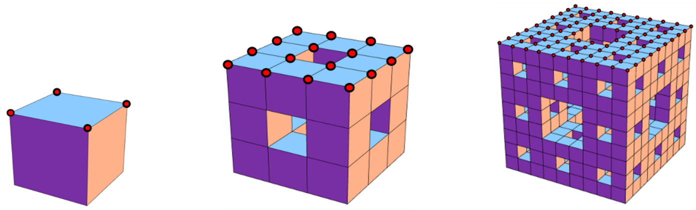


透過簡單的觀察可得知 $d_0 = 2$、$d_1 = 4$、$d_2 = 10$（如上圖所示）。今考慮 M_n 稜線上的點 d_n，根據遞迴堆疊的過程中可知，M_n 的稜線是由 3 個 M_{n-1} 的稜線所連結而成，其中共有 2 個點爲稜線的連結點，故 $d_n = 3d_{n-1} - 2$。由此可建立遞迴關係 $\begin{cases} d_n = 3d_{n-1} - 2 & ,n\geq 1 \\ d_0 = 2 \end{cases}$，故可得數列 $< d_n >$ 的一般式爲 $d_n = 3^n + 1$。

M_n **稜線上的點數**：$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 中單一稜線上的點數為 $d_n = 3^n + 1$。

2.1.2 M_n 單側面上的點數

對任意非負整數 n，定義 a_n 為 M_n 單一側面上的點數。可知 $a_0 = 4$、$a_1 = 16$、$a_2 = 96$。



$a_0 = 4$　　$a_1 = 16$　　$a_2 = 96$

由於 M_n 的單一側面是由 8 個 M_{n-1} 的單一側面所組合而成，然而相鄰兩個 M_{n-1} 交會於單一稜線，其中共有 8 條稜線上的點將會被重複計算，所以 $a_n = 8a_{n-1} - 8d_{n-1}$，因為 M_{n-1} 單一稜線上的點數為 $d_{n-1} = 3^{n-1} + 1$，故可建立遞迴關係

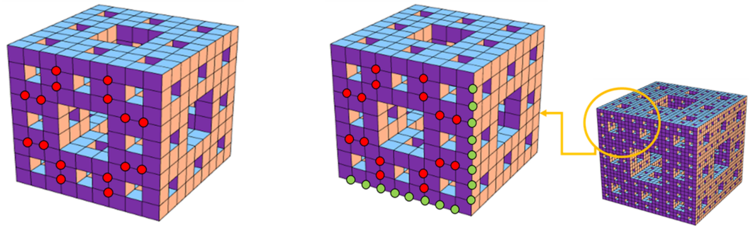
$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} - 8\left(3^{n-1} + 1\right) & , n \geq 1 \\ a_0 = 4 \end{cases}$$

而得數列 $< a_n >$ 的一般式為 $a_n = \frac{44}{35} \times 8^n + \frac{8}{5} \times 3^n + \frac{8}{7}$。

M_n **單側面上的點數**：
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 中單一側面上的點數為 $a_n = \frac{44}{35} \times 8^n + \frac{8}{5} \times 3^n + \frac{8}{7}$。

2.1.3 M_n 中被完全覆蓋的點數

由於 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，而 2 個 M_{n-1} 的交會是一個單一側面，在重合的單一側面上，有些點會被完全的覆蓋，因此在計算 M_n 的點數時，必須要排除這些會被完全覆蓋的點。而這些會被完全覆蓋的點，在 M_{n-1} 的單一側面上必恰與 4 個面相鄰。對任意非負整數 n，定義 r_n 為兩個 M_n 連接側面上被完全覆蓋的點數。可知 $r_0 = 0$、$r_1 = 0$、$r_2 = 16$。



$M_2 \to M_3 \ (r_2)$　　$M_3 \to M_4 \ (r_3)$

因為 M_n 的單一側面是由 8 個 M_{n-1} 所組成，相鄰兩個 M_{n-1} 的稜線上將會有 $d_{n-1} - 2$ 個點會與 4 個面相鄰。由於 M_n 的單一側面中共有 8 條 M_{n-1} 交會的稜線，這意味著 $r_n = 8r_{n-1} + 8\left(d_{n-1} - 2\right)$。因為 M_{n-1} 單一稜線上的點數為 $d_{n-1} = 3^{n-1} + 1$，故可建立遞迴關係

$$\begin{cases} r_n = 8r_{n-1} + 8\left(3^{n-1} - 1\right) & , n \geq 1 \\ r_0 = 0 \end{cases}$$

而得數列 $<r_n>$ 的一般式爲 $r_n = \frac{16}{35} \times 8^n - \frac{8}{5} \times 3^n + \frac{8}{7}$。

> **M_n單側面上將被覆蓋的點數：**
> $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，兩個 M_n 的連接側面中會被完全覆蓋的點數爲 $r_n = \frac{16}{35} \times 8^n - \frac{8}{5} \times 3^n + \frac{8}{7}$。

2.1.4 M_n 的點數量 $|V(M_n)|$

第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在堆疊的過程中，兩個相鄰的 M_{n-1} 在其連接側面上將會有重複的點 a_{n-1}，而連接側面上亦會有完全被覆蓋的點 r_{n-1}。堆疊 20 個 M_{n-1} 的過程中，共有 24 個連接側面，這意味著 $v_n = 20v_{n-1} - 24a_{n-1} - 24r_{n-1}$，其中 $n \geq 1$，$v_0 = 8$。

因爲 M_{n-1} 單一側面上的點數爲 $a_{n-1} = \frac{44}{35} \times 8^{n-1} + \frac{8}{5} \times 3^{n-1} + \frac{8}{7}$；兩個 M_{n-1} 的連接側面中會被完全覆蓋的點數爲 $r_{n-1} = \frac{16}{35} \times 8^{n-1} - \frac{8}{5} \times 3^{n-1} + \frac{8}{7}$。故可建立遞迴關係如下：

$$\begin{cases} v_n = 20v_{n-1} - 24\left(\frac{44}{35} \times 8^{n-1} + \frac{8}{5} \times 3^{n-1} + \frac{8}{7}\right) - 24\left(\frac{16}{35} \times 8^{n-1} - \frac{8}{5} \times 3^{n-1} + \frac{8}{7}\right) & , n \geq 1 \\ v_0 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = 20v_{n-1} - \frac{288}{7} \times 8^{n-1} - \frac{384}{7} & , n \geq 1 \\ v_0 = 8 \end{cases}$$

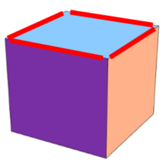
而可得數列 $<v_n>$ 的一般式爲 $v_n = \frac{32}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}$。

> **M_n的點數量：**$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 的點數爲 $v_n = \frac{32}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}$。

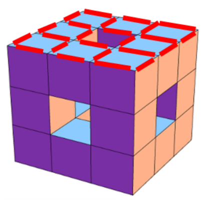
接著討論第 n 階的門格海綿 M_n 的總邊數 $|E(M_n)|$，透過 M_{n-1} 堆疊到 M_n 的過程中，有些邊會被完全覆蓋而不必計算，而有些邊會被重複計算必須排除，爲了要精準的計算第 n 階的門格海綿的總邊數，我將進行適當的分類討論。

2.1.5 M_n 單側面上的邊數量

對任意非負整數 n，定義 b_n 爲 M_n 單一側面上的邊數。可知 $b_0 = 4$、$b_1 = 24$、$b_2 = 168$。



$b_0 = 4$



$b_1 = 24$

由於 M_n 的單一側面是由 8 個 M_{n-1} 的單一側面所組合而成，不難得知 M_n 的單一稜線上共有 3^n 條邊，然而相鄰兩個 M_{n-1} 交會於單一稜線，其中共有 8 條稜線上的邊將會被重複計算，所以 $b_n = 8b_{n-1} - 8 \times 3^{n-1}$，故可建立遞迴關係

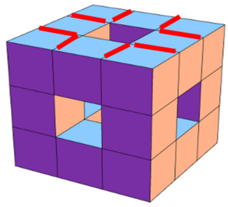
$$\begin{cases} b_n = 8b_{n-1} - 8 \times 3^{n-1} & , n \geq 1 \\ b_0 = 4 \end{cases}$$

而得數列 $< b_n >$ 的一般式爲 $b_n = \frac{12}{5} \times 8^n + \frac{8}{5} \times 3^n$。

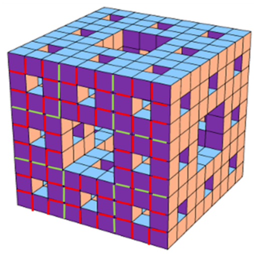
M_n **單側面上的邊數：**$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 中單一側面上的邊數爲 $b_n = \frac{12}{5} \times 8^n + \frac{8}{5} \times 3^n$。

2.1.6 M_n 中被完全覆蓋的邊數

由於 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，而 2 個 M_{n-1} 的交會處即是一個 M_{n-1} 的單一側面，在重合的單一側面上，有些邊會被完全的覆蓋，因此在計算 M_n 的邊數時，必須要排除這些會被完全覆蓋的邊。而這些會被完全覆蓋的邊，在 M_{n-1} 的單一側面上必恰與 2 個面相鄰。對任意非負整數 n，定義 s_n 爲兩個 M_n 連接側面上被完全覆蓋的邊數。可知 $s_0 = 0$、$s_1 = 8$、$s_2 = 88$。



$M_1 \to M_2 \ (s_1)$



$M_2 \to M_3 \ (s_2)$

因爲 M_n 的單一側面是由 8 個 M_{n-1} 所組成，相鄰兩個 M_{n-1} 的稜線上將會有 3^{n-1} 條邊會與 2 個面相鄰。由於 M_n 的單一側面中共有 8 條 M_{n-1} 交會的稜線，這意味著 $s_n = 8s_{n-1} + 8 \times 3^{n-1}$，故可建立遞迴關係

$$\begin{cases} s_n = 8s_{n-1} + 8 \times 3^{n-1} & ,n \geq 1 \\ s_0 = 0 \end{cases}$$

而得數列 $< s_n >$ 的一般式爲 $s_n = \frac{1}{5} \times 8^{n+1} - \frac{8}{5} \times 3^n$。

M_n **單側面上將被覆蓋的邊數：**
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，兩個 M_n 的連接側面中會被完全覆蓋的邊數爲 $s_n = \frac{1}{5} \times 8^{n+1} - \frac{8}{5} \times 3^n$。

2.1.7 M_n 的邊數量 $|E(M_n)|$

第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在堆疊的過程中，兩個相鄰的 M_{n-1} 在其連接側面上將會有重複的邊 b_{n-1}，而連接側面上亦會有完全被覆蓋的邊 s_{n-1}。堆疊 20 個 M_{n-1} 的過程中，共有 24 個連接側面，這意味著 $e_n = 20e_{n-1} - 24b_{n-1} - 24s_{n-1}$，其中 $n \geq 1$，$e_0 = 12$。

因爲 M_{n-1} 單一側面上的邊數爲 $b_{n-1} = \frac{12}{5} \times 8^{n-1} + \frac{8}{5} \times 3^{n-1}$；兩個 M_{n-1} 的連接側面中會被完全覆蓋的邊數爲 $s_{n-1} = \frac{1}{5} \times 8^n - \frac{8}{5} \times 3^{n-1}$。故可建立遞迴關係如下：

$$\begin{cases} e_n = 20e_{n-1} - 24\left(\frac{12}{5} \times 8^{n-1} + \frac{8}{5} \times 3^{n-1}\right) - 24\left(\frac{1}{5} \times 8^n - \frac{8}{5} \times 3^{n-1}\right) & ,n \geq 1 \\ e_0 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_n = 20e_{n-1} - 96 \times 8^{n-1} & ,n \geq 1 \\ e_0 = 12 \end{cases}$$

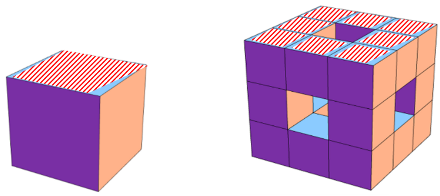
而可得數列 $< e_n >$ 的一般式爲 $e_n = 4 \times 20^n + 8^{n+1}$。

M_n **的邊數量：**$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 的邊數爲 $e_n = 4 \times 20^n + 8^{n+1}$。

接著我討論第 n 階的門格海綿 M_n 的總面數 $|F(M_n)|$，每一個面皆爲最小單位的正方形（M_0 的面），透過 M_{n-1} 堆疊到 M_n 的過程中，有些面會被完全覆蓋而不必計算，爲了要精準的計算第 n 階門格海綿的總面數，我首先討論 M_n 單側上的面數。

2.1.8 M_n 單側的面數量 $|F(M_n)|$

對任意非負整數 n，定義 c_n 爲 M_n 單側上的面數。可知 $c_0 = 1$、$c_1 = 8$、$c_2 = 64$。

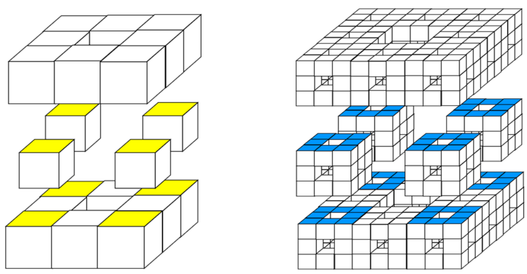


$c_0 = 1$ $c_1 = 8$

由於 M_n 的單一側面是由 8 個 M_{n-1} 的單一側面所組合而成，不難得知 M_n 的單側上共有 8^n 個面，再藉由 $c_n = 8c_{n-1}$，建立遞迴關係 $\begin{cases} c_n = 8c_{n-1} & , n \geq 1 \\ c_0 = 1 & \end{cases}$，而得知 $c_n = 8^n$。

2.1.9 M_n 的面數量 $|F(M_n)|$

第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在堆疊的過程中，兩個相鄰的 M_{n-1} 在其連接側面上會有重複的面 c_{n-1}，且兩個相鄰的 M_{n-1} 在其連接側面上將會有完全被覆蓋的面，而這些會完全被覆蓋的面正好就是會被重複計算的面，也就是 c_{n-1}。堆疊 20 個 M_{n-1} 的過程中，共有 24 個連接側面，這意味著 $f_n = 20f_{n-1} - 2 \times 24 \times c_{n-1} = 20f_{n-1} - 48c_{n-1}$，其中 $n \geq 1$，$f_0 = 6$。



因爲 M_{n-1} 單一側面上的面數爲 $c_{n-1} = 8^{n-1}$；兩個 M_{n-1} 的連接側面中會被完全覆蓋的面數即爲 $c_{n-1} = 8^{n-1}$。故可建立遞迴關係

$$\begin{cases} f_n = 20f_{n-1} - 48c_{n-1} & , n \geq 1 \\ f_0 = 6 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_n = 20f_{n-1} - 48 \times 8^{n-1} & , n \geq 1 \\ f_0 = 6 & \end{cases}$$

而得數列 $< f_n >$ 的一般式爲 $f_n = 2 \times 20^n + 4 \times 8^n$。

M_n **的面數量：**$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 的面數爲 $f_n = 2 \times 20^n + 4 \times 8^n$。

綜合以上的結果，對於第 n 階門格海綿 M_n 的點、邊、面結構，我有以下定理：

定理 1. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，令 $|V(M_n)|$、$|E(M_n)|$、$|F(M_n)|$ 分別爲第 n 階門格海綿 M_n 的點、邊、面的數量，則

1. $|V(M_n)| = \frac{32}{19} \times 20^n + \frac{24}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}$；

2. $|E(M_n)| = 4 \times 20^n + 8^{n+1}$；

3. $|F(M_n)| = 2 \times 20^n + 4 \times 8^n$。

2.2 Menger Sponge 點、邊、面的著色及全著色

在討論完門格海綿 M_n 的點邊面數量後，我將組合學中的著色問題應用在門格海綿上。我所要探討的著色問題有「點著色 vertex-coloring」、「邊著色 edge-coloring」、「面著色 face-coloring」與「全著色 total-coloring」，以下將針對不同類型的著色問題進行研究討論。

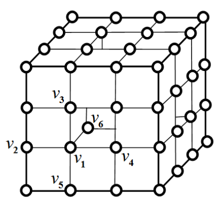
著色問題是一種資源分配的研究議題，顏色就是一種資源的概念。若兩物件有衝突的因素，則資源不能共享，因此被要求不能使用一樣的顏色，而我希望所使用的顏色種類數量越小越好。在數學上我們習慣以各個自然數來代表不同顏色，而一種著色方法則視爲一個對應到自然數的函數 f。

2.2.1 點著色 vertex-coloring 的定義

給定圖 G，其頂點集合爲 $V(G)$，邊集合爲 $E(G)$，給定函數 $f : V(G) \to \mathbb{N}$。令 $u, v \in V(G)$ 爲圖 G 中的兩頂點，若 u 與 v 有邊相連，則將其相連的邊記爲 uv。若對任意的邊 $uv \in E(G)$，函數 f 皆滿足 $f(u) \neq f(v)$，則稱函數 f 爲 G 的一個「點著色函數（vertex-coloring）」。若存在函數 $f : V(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 爲圖 G 的點著色函數，則稱 G 爲「**可 k 點著色**」或「**k−vertex-colorable**」，同時稱函數 f 爲「**k 點著色函數（k−vertex-coloring）**」。不難得知，若圖 G 是 k−vertex-colorable，則 G 必然也爲 $(k+1)$−vertex-colorable。對任意的圖 G，可知 G 必然爲 $|V(G)|$−vertex-colorable。因此對於圖形的點著色問題，我好奇的是：能使得 G 是可 k 點著色的最小自然數 k 爲何？若 k 爲最小自然數能使得圖 G 是可 k 點著色，則稱 k 爲 G 的「**點著色數（chromatic number）**」，並以符號記爲「$\chi(G)$」。意即，$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是可 } k \text{ 點著色 }\}$。

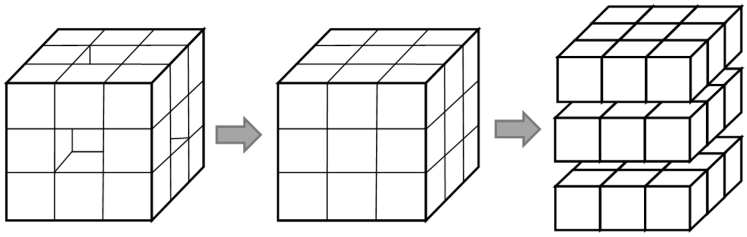
2.2.2 M_n 的點著色

接下來我試著在 M_n 上的每一點著色，顏色可以重複使用，但兩個有邊相連的點不可著同色，想知道最少可以幾種顏色塗完整個 M_n。以 M_1 爲例（如下圖所示），v_1 的顏色必須與相鄰的 v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 不同色。我發現對於任意門格海綿 M_n，皆可以一層一層的使用 2 個顏色來完成點著色。

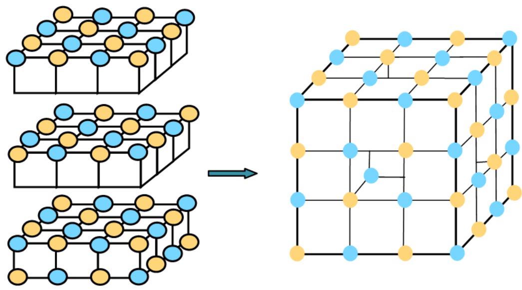


若我先將 M_n 被去掉的正立方體都補回來（即 M_1 會變爲由 27 個正立方體組成，M_2 會變爲由 729 個正立方體組成），將 3^{3n} 個正立方體堆疊成邊長爲 3^n 的大正立方體 Q_n，我將

正立方體的每個面都視爲透明，並把內部看不到的點都算進去，將重疊的點一樣只算一個點，則可將 M_n 的點結構視爲 Q_n 的部分圖形。下圖用 M_1 與 Q_1 作例子說明。

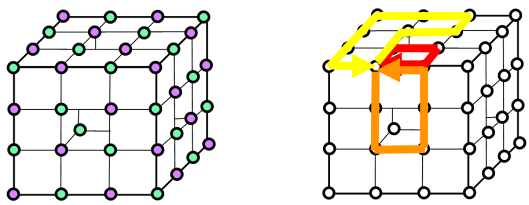


將圖形 Q_1 的點著上顏色，每一層使用兩個顏色交錯上色，只要每一層的顏色相反，即可成功以兩種顏色塗完 Q_1（如下圖）。



可以很輕易的看出 Q_n 的圖形必定可以用兩個顏色完成點的著色。事實上，$V(M_n)$爲$V(Q_n)$的子集合，$E(M_n)$ 亦爲 $E(Q_n)$ 的子集合。因此一般的門格海綿 M_n 皆可視爲 Q_n 的子圖，故保留 Q_n 的點著色方式，即可得知 M_n 必然爲可 2 點著色，意即 $\chi(M_n) \leq 2$。又因爲一條邊的兩端點必然要使用不同的顏色，所以 $\chi(M_n) \geq 2$。故 $\chi(M_n) = 2$。

另一個觀點，若我將 M_n 的點著色，並交錯放置（如左下圖所示），從任意顏色的點繞一圈回到自己，必會經過偶數條邊。故 M_n 的結構中不包含奇數圈（如右下圖所示）。由於 M_n 不包含奇數圈，故 M_n 必爲二部圖（bipartite graph）。在著色問題中，任意連通的二部圖必可 2 點著色，故 $\chi(M_n) = 2$。



M_n **的點著色：**$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 必爲 2−vertex-colorable，且 $\chi(M_n) = 2$。

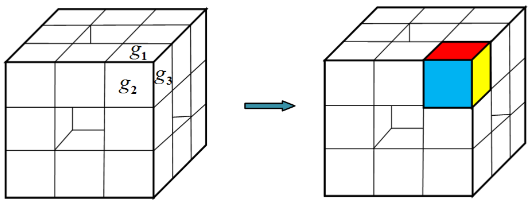
2.2.3 面著色 face-coloring 的定義

給定圖 G，將其鑲嵌在一個立體的封閉曲面 S 上，使其邊不相交。假設有若干條邊在曲面 S 上圍成一個封閉區域且此封閉區域內不再有任何點與邊，則將此封閉區域稱作爲圖 G 在曲面 S 上的面。若兩個面 g, g' 的周圍具有共同的邊，則稱面 g 與面 g'「**相鄰**」。考慮圖 G 所有的面，令所有的面所形成的集合爲 $F(G)$，給定函數 $f : F(G) \to \mathbb{N}$，若對任意相鄰的兩個面 $g, g' \in F(G)$，函數 f 皆滿足 $f(g) \neq f(g')$，則稱函數 f 爲 G 的一個「**面著色函數（face-coloring）**」。若存在函數 $f : F(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 爲圖 G 的面著色函數，則稱 G 爲「**可 k 面著色**」或「**k−face-colorable**」，同時稱函數 f 爲「k

面著色函數（k–face-coloring）」。對於圖形的面著色問題，我好奇的是：能使得 G 是可 k 面著色的最小自然數 k 爲何？若 k 爲最小自然數能使得圖 G 是可 k 面著色，則稱 k 爲 G 的「**面著色數（face chromatic number）**」，並以符號記爲「$\chi_{face}(G)$」。意即，$\chi_{face}(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G$ 是可 k 面著色 $\}$。

2.2.4 M_n 的面著色

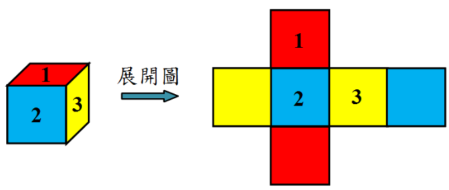
將門格海綿 M_n 視爲鑲嵌在一個立體封閉曲面 S_n 上，則 M_n 在曲面 S_n 上即有點、邊、面等概念。因此我將 M_n 視爲在曲面 S_n 上的一個平面圖。由於 M_n 的角落必有三個彼此相鄰的面 g_1, g_2, g_3（如下圖所示），若 $f : F(G) \to \mathbb{N}$ 爲一個面著色函數，則 $f(g_1), f(g_2), f(g_3)$ 必全相異。換句話說，若要將門格海綿 M_n 的面完成著色，則所需的顏色數必然不小於 3。意即，$\chi_{face}(G) \geq 3$。



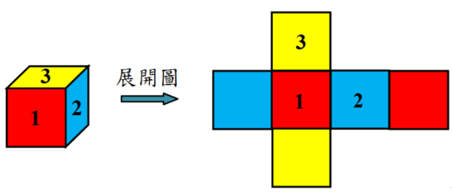
由於第 n 階的門格海綿 M_n 是由 20 個 M_{n-1} 所堆疊而成，在面著色的策略上，我試圖利用已完成面著色的 20 個 M_{n-1}，透過堆疊的規律，進一步完成 M_n 的面著色。若要說明面著色的合理性，除了要說明最外側的面沒有顏色上的衝突外，對於內側的面，仍舊要保證相鄰的面著不同色。這讓塗色的過程變得十分麻煩，但由於 M_n 是有規律性的立體圖形，我設想應存在規律性的面著色方法，所以我制定了許多面著色的原則，盡量讓著色具備規律性。

首先考慮單位正立方體 M_0，我使用紅、藍、黃三種顏色來完成 M_0 的面著色（若將面著色視爲函數 f，則將紅、藍、黃三色分別用自然數 1、2、3 來表示）。**不考慮轉動**，我固定 M_0 的方向性，完成了下列兩種類型的面著色，我分別將面著色函數記爲 f_0^A 與 f_0^B，其中每一種面著色的方法，恰使用三種顏色，同時相對應的面著相同的顏色。以下爲 f_0^A 與 f_0^B 的著色法與其展開圖（如下圖所示）：

$f_0^A : F(M_0) \to \{1,2,3\}$

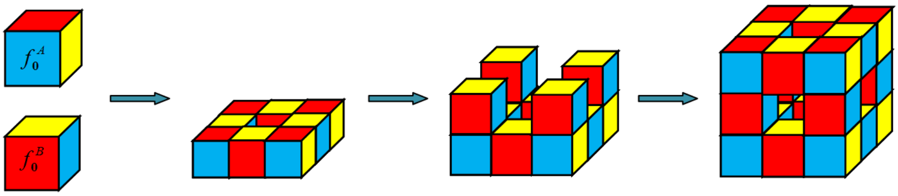


$f_0^B : F(M_0) \to \{1,2,3\}$



觀察 f_0^A 與 f_0^B 的面著色關連性，可看出將 f_0^A 的顏色經過轉換後，即可得 f_0^B。意即 f_0^B 的面著色法可透過 f_0^A 來定義，意即 $f_0^B(g) = \begin{cases} 1 & ,\text{若 } f_0^A(g) = 2 \\ 2 & ,\text{若 } f_0^A(g) = 3 \\ 3 & ,\text{若 } f_0^A(g) = 1 \end{cases}$。我稱 f_0^B 是由 f_0^A 透過「**顏色平移**」後所得的面著色函數。此外，顏色平移也可視爲將 f_0^A 的著色結果，透過旋轉後所得的新著色法。

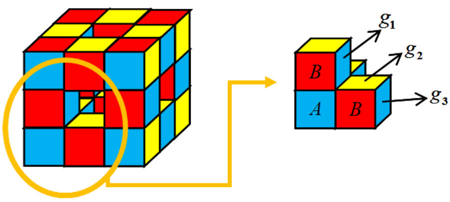
以下我將利用 f_0^A 與 f_0^B 這兩種 M_0 的面著色方式來完成 M_1 的面著色。因爲 M_1 是由 20 個 M_0 所堆疊而成，而透過堆疊的位置共可區分爲 8 個 A 方塊及 12 個 B 方塊，我將 8 個 A 方塊使用 f_0^A 的面著色法，而將 12 個 B 方塊使用 f_0^B 的面著色法，再將已上色的 A, B 方塊堆疊成 M_1（如下圖所示）：



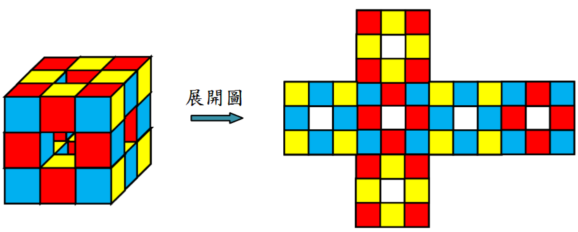
根據上述利用 A, B 方塊固定的面著色，逐漸堆疊成 M_1 的面著色，很顯然的 M_1 外側所有相鄰的面，顏色都不衝突，只要能夠說明 M_1 內側的面也不會有衝突的顏色，則可得知上述即爲 M_1 的一種面著色，意即 M_1 中任意相鄰的兩個面，顏色皆相異。我將此透過 f_0^A 與 f_0^B 結合而成的面著色函數記爲 $f_1^A : F(M_1) \to \{1, 2, 3\}$，其中

$$f_1^A(g) = \begin{cases} f_0^A(g) & ,\text{若 } g \text{ 爲 } M_1 \text{ 中 } A \text{ 方塊的面} \\ f_0^B(g) & ,\text{若 } g \text{ 爲 } M_1 \text{ 中 } B \text{ 方塊的面} \end{cases} \quad 。$$

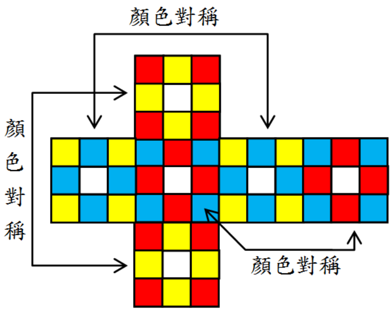
讓我看 M_1 內側相鄰的兩個面 g_1, g_2，由於 g_1, g_2 皆屬於 M_1 的 B 方塊上的面，且 M_1 中任意 B 方塊的面著色皆爲 f_0^B 的面著色法，故 $f_1^A(g_1) = f_0^B(g_1) = f_0^B(g_3)$，但已知 f_0^B 的面著色法中 $f_0^B(g_2) \neq f_0^B(g_3)$，因此 $f_0^B(g_1) \neq f_0^B(g_2)$，所以 $f_1^A(g_1) \neq f_1^A(g_2)$。事實上，$M_1$ 內側中任意相鄰兩個面皆可由此得知使用的顏色相異，故 $f_1^A : F(M_1) \to \{1, 2, 3\}$ 確實爲 M_1 的一個面著色函數。



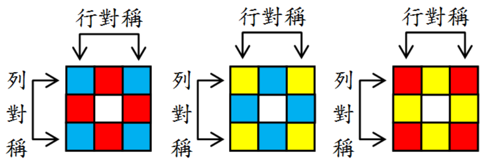
此外，由於 f_0^A 與 f_0^B 對 M_0 的面著色方式皆具有對稱性（上下兩面顏色相同、前後兩面顏色相同、左右兩面顏色相同），且 A, B 方塊的堆疊亦有對稱性，因此不難看出 f_1^A 對 M_1 的面著色方式，不論是「**外圍六個側面**」，或是「**單一的外側面**」皆具有顏色的對稱性。對於這種面著色的對稱現象，我稱爲「**顏色對稱性**」。



考慮 f_1^A 在 M_1 上的面著色，上圖即爲 M_1 著色後的展開圖，可以觀察出上下兩個側面、左右兩個側面以及前後兩個側面的顏色是具有對稱性的。若僅觀察單一外側面，亦可觀察出在單一外側面上的顏色也是呈現每一行的顏色上下對稱、每一列的顏色左右對稱。



（外圍六個側面顏色對稱）

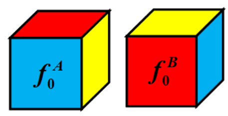


（單一外側面顏色對稱）

考慮一般 n 階門格海綿 M_n，令 f 爲 M_n 的面著色函數，若 f 使得 M_n 的「外圍六個側面」顏色皆對稱且「單一外側面」顏色亦對稱，則我稱面著色函數 f 具有「**顏色對稱性**」。

引理 1. 已知 f_0^A，f_0^B 爲 M_0 的兩種面著色（如下圖）。定義

$$f_1^A(g) = \begin{cases} f_0^A(g) & \text{,若 } g \text{ 爲 } M_1 \text{ 中 } A \text{ 方塊的面} \\ \\ f_0^B(g) & \text{,若 } g \text{ 爲 } M_1 \text{ 中 } B \text{ 方塊的面} \end{cases}$$



則 $f_1^A : F(M_1) \to \{1,2,3\}$ 必滿足：

1. f_1^A 爲 M_1 的一個面著色函數；

2. f_1^A 在 M_1 上具有顏色對稱性。

對於顏色平移，面著色函數必定具有下列特性：

引理 2. 已知 $f : F(G) \to \{1,2,3\}$ 爲圖 G 的一個面著色函數。

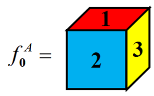
定義 $f'(g) = \begin{cases} 1 & , f(g) = 2 \\ 2 & , f(g) = 3 \\ 3 & , f(g) = 1 \end{cases}$ ，則 $f' : F(G) \to \{1,2,3\}$ 必爲圖 G 的一個面著色函數。

證明.

令 $f : F(G) \to \{1,2,3\}$ 爲圖 G 的一個面著色函數。考慮 G 中兩個相鄰的面 $g_1, g_2 \in F(G)$。因爲 $f(g_1) \neq f(g_2)$，不失一般性，假設 $f(g_1) = 2$、$f(g_2) = 3$。根據 f' 的定義，可知 $f'(g_1) = 1$ 且 $f'(g_2) = 2$。由此可知經過顏色平移的函數 $f' : F(G) \to \{1,2,3\}$ 仍爲圖 G 的一個面著色函數。 □

有了上述從 M_0 的兩種面著色 f_0^A 與 f_0^B，進一步透過堆疊的方式建立 M_1 的面著色函數 f_1^A。以下我將利用相同的手法，對任意自然數 n，依序建構出 M_n 的面著色函數。以下爲我的研究結果，我將利用數學歸納法證明第二個主要定理：

定理 2. 已知 $f_0^A : F(M_0) \to \{1,2,3\}$ 為 M_0 的面著色函數。定義



$$f_n^B(g) = \begin{cases} 1 & ,\text{若 } f_n^A(g) = 2 \\ 2 & ,\text{若 } f_n^A(g) = 3 \\ 3 & ,\text{若 } f_n^A(g) = 1 \end{cases} \text{，對任意非負整數 } n \geq 0\text{；}$$

$$f_n^A(g) = \begin{cases} f_{n-1}^A(g) & ,\text{若 } g \text{ 為 } M_n \text{ 中 } A \text{ 方塊的面} \\ f_{n-1}^B(g) & ,\text{若 } g \text{ 為 } M_n \text{ 中 } B \text{ 方塊的面} \end{cases} \text{，對任意自然數 } n \geq 1\text{，}$$

則

1. $f_n^A : F(M_n) \to \{1,2,3\}$、$f_n^B : F(M_n) \to \{1,2,3\}$ 必皆為 M_n 的面著色函數。
2. f_n^A 與 f_n^B 在 M_n 上皆具有顏色對稱性。

證明.

已知 f_0^A 為 M_0 的面著色函數。因為 $f_0^B : F(M_0) \to \{1,2,3\}$ 是 f_0^A 經過顏色平移所得的函數，故 f_0^B 亦為 M_0 的面著色函數。 對任意自然數 $n \geq 0$，因為 f_n^B 是 f_n^A 經過顏色平移後所得的函數，根據 **引理** 2 可知「f_n^A 為 M_n 的面著色函數」為「f_n^B 為 M_n 的面著色函數」的充分條件。因此我只需證明 f_n^A 確實為 M_n 的面著色函數即可。以下我將利用數學歸納法證明此結論。

當 $n = 1$ 時，根據 **引理** 1 可知 f_1^A 為 M_1 的面著色函數。

假設 $n = k-1$ 時（$k \geq 2$），定理的命題成立。意即 f_{k-1}^A 與 f_{k-1}^B 皆為 M_{n-1} 的面著色函數，且 f_{k-1}^A 與 f_{k-1}^B 在 M_{n-1} 上皆具有顏色對稱性。

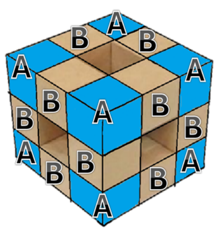
當 $n = k$ 時，考慮函數 $f_k^A : F(M_k) \to \{1,2,3\}$，其中

$$f_k^A(g) = \begin{cases} f_{k-1}^A(g) & ,\text{若 } g \text{ 為 } M_k \text{ 中 } A \text{ 方塊的面} \\ f_{k-1}^B(g) & ,\text{若 } g \text{ 為 } M_k \text{ 中 } B \text{ 方塊的面} \end{cases} \text{。}$$

因為 M_k 是由 20 個 M_{k-1} 所堆疊而成，其中包含 8 個 A 方塊與 12 個 B 方塊。

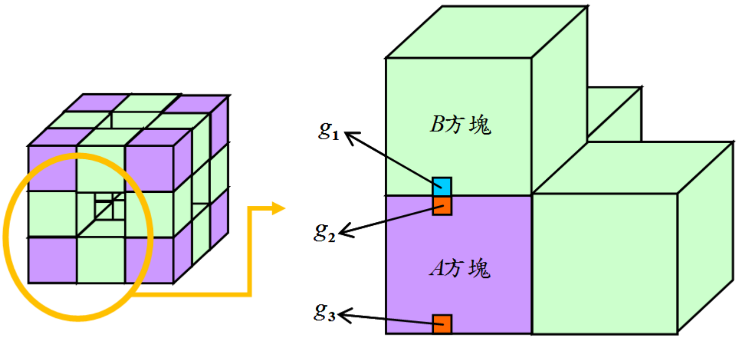
由於 f_{k-1}^A 與 f_{k-1}^B 皆為 M_{k-1} 的面著色函數，根據 f_k^A 的定義，若欲說明 f_k^A 確實為 M_k 的面著色函數，則必須保證在 M_k 中，兩個 M_{k-1} 所相鄰的面是否皆被 f_k^A 對應到不同的顏色。

因為 M_k 的 A, B 方塊皆為 M_{k-1}，f_{k-1}^A 與 f_{k-1}^B 在 M_{k-1} 上皆具有顏色對稱性，且 A, B 方塊堆疊為 M_k 時亦具有對稱性，所以我僅需考慮 M_k 中「A 方塊與 B 方塊的相鄰面」與「相異 B 方塊的相鄰面」。

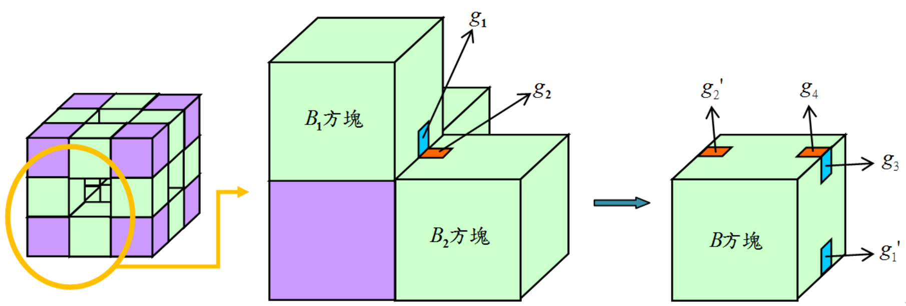


① **A 方塊與 B 方塊的相鄰面** 不失一般性，在 M_k 中，假設 B 方塊堆疊在 A 方塊上方。
令 g_1 為 B 方塊的面，g_2 為 A 方塊的面，且 g_1 與 g_2 在 M_k 中為相鄰的兩面。 令

g_3 爲 A 方塊與 g_2 同側且與 g_2 對稱的面。 根據 f_{k-1}^A 在 A 方塊上的顏色對稱性，可知 $f_{k-1}^A(g_3) = f_{k-1}^A(g_2)$。 因爲 A, B 方塊皆爲 M_{k-1}，可知 g_1 與 g_3 在 M_{k-1} 中屬於相同位置的面。 由於 f_{k-1}^B 是 f_{k-1}^A 的顏色平移，所以 $f_{k-1}^B(g_1) \neq f_{k-1}^A(g_3)$，故 $f_{k-1}^B(g_1) \neq f_{k-1}^A(g_2)$。 由此可知，$A$ 方塊與 B 方塊的相鄰面，其相鄰兩面所著的顏色必相異。



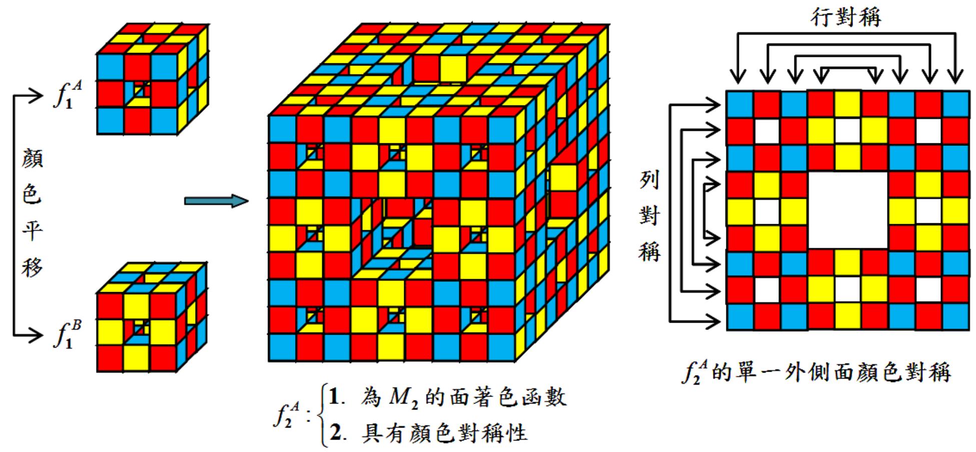
② **相異 B 方塊的相鄰面** 將兩個有相鄰面的 B 方塊分別稱爲 B_1 方塊與 B_2 方塊。 不失一般性，在 M_k 中，假設 B_1 方塊在 B_2 方塊的左上方。 令 g_1 爲 B_1 方塊的面，g_2 爲 B_2 方塊的面，且 g_1 與 g_2 在 M_k 中爲相鄰的兩面。 因爲 M_k 中，任意 B 方塊的面著色函數皆爲 f_{k-1}^B，所以 g_1 與 g_2 的顏色可視爲在同一個 B 方塊中相對應位置的顏色。 考慮 M_k 中一個 B 方塊，令 g_1 與 g_2 分別爲 g_1 與 g_2 在同一個 B 方塊上相同位置的面。 可知 $f_{k-1}^B(g_1) = f_{k-1}^B(g_1)$ 且 $f_{k-1}^B(g_2) = f_{k-1}^B(g_2)$。 令 g_3 爲 B 方塊上與 g_1 同側且與 g_1 對稱的面；令 g_4 爲 B 方塊上與 g_2 同側且與 g_2 對稱的面。 可知 g_3 與 g_4 爲在同一 B 方塊上相鄰的兩面，故 $f_{k-1}^B(g_3) \neq f_{k-1}^B(g_4)$。 因爲 f_{k-1}^B 具有顏色對稱性，所以 $f_{k-1}^B(g_1) = f_{k-1}^B(g_3)$且$f_{k-1}^B(g_2) = f_{k-1}^B(g_4)$。 由此可得 $f_{k-1}^B(g_1) = f_{k-1}^B(g_1) = f_{k-1}^B(g_3) \neq f_{k-1}^B(g_4) = f_{k-1}^B(g_2) = f_{k-1}^B(g_2)$，意即 $f_{k-1}^B(g_1) \neq f_{k-1}^B(g_2)$。 可知，兩個 B 方塊的相鄰面，其相鄰兩面所著的顏色必相異。



由上述推論可知 f_k^A 確實爲 M_k 的一個面著色函數。 此外，因爲 f_{k-1}^A 與 f_{k-1}^B 在 M_{k-1} 上皆具有顏色對稱性，且 A, B 方塊堆疊爲 M_k 時亦具有對稱性，因此不難得知 f_k^A 與 f_k^B 在 M_k 上亦具有顏色對稱性。

根據數學歸納法得知，原命題對任意自然數 $n \in \mathbb{N}$ 皆成立。 □

以下我將呈現 f_1^A、f_1^B 與 M_2 的面著色函數 $f_2^A : F(M_2) \to \{1, 2, 3\}$：



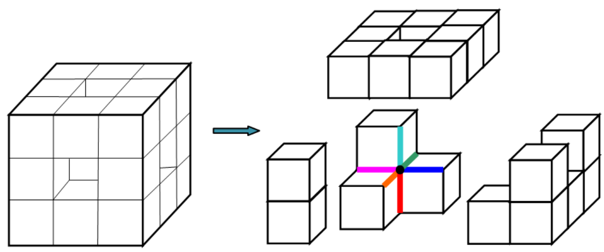
> M_n **的面著色**：$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 必爲 3–face-colorable，且 $\chi_{face}(M_n) = 3$。

2.2.5 邊著色 $edge - coloring$ 的定義

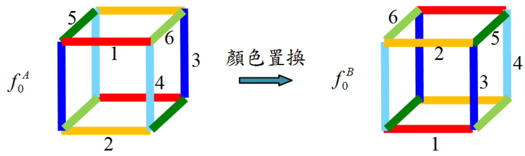
給定圖 G，其邊集合爲 $E(G)$，給定函數 $f : E(G) \to \mathbb{N}$，若對任意相鄰的兩個邊 $e, e' \in E(G)$，函數 f 皆滿足 $f(e) \neq f(e')$，則稱函數 f 爲 G 的一個「**邊著色函數**（**edge-coloring**）」。若存在函數 $f : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 爲圖 G 的邊著色函數，則稱 G 爲「**可 k 邊著色**」或「k–**edge-colorable**」，同時稱函數 f 爲「k **邊著色函數**（k–**edge-coloring**）」。對於圖形的邊著色問題，我好奇的是：能使得 G 是 可k 邊著色的最小自然數 k 爲何？若 k 爲最小自然數能使得圖 G 是可 k 邊著色，則稱 k 爲 G 的「**邊著色數**（**edge chromatic number**）」，並以符號記爲「$\chi'(G)$」。意即，$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G$ 是可 k 邊著色$\}$。

2.2.6 M_n 的邊著色

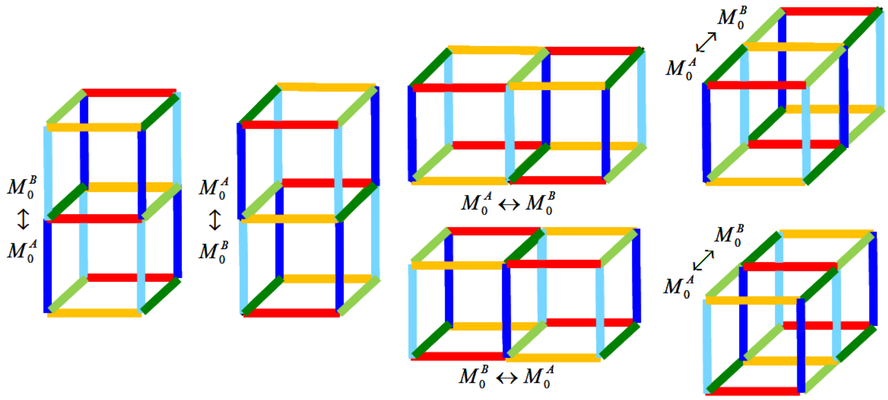
對於邊著色的議題中，倘若圖形 G 中有一個點 v 與 k 條邊相連，則此 k 條邊必須著上不同的顏色，故該圖形的邊著色數必然不小於 k，意即 $\chi'(G) \geq k$。對於門格海綿的邊著色，我首先考慮 M_1，在 M_1 中存在一個點恰與 6 條邊相鄰（如下圖所示），可知 $\chi'(M_1) \geq 6$。由於 M_1 爲 M_n 的子結構，所以對於第 n 階門格海綿 M_n 恆有 $\chi'(M_n) \geq \chi'(M_1) \geq 6$。



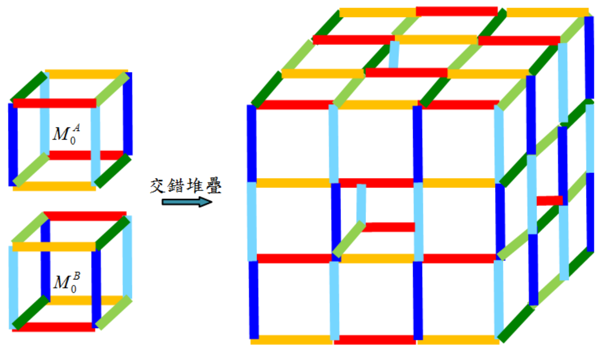
對於任意非負整數 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，以下我將使用 6 種顏色，以自然數 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 表示顏色，對 M_n 設計一個邊著色函數。考慮基本正立方體 M_0，因爲 M_0 共有 12 條邊，我利用 6 種顏色將 M_0 中處於對角線的一對邊著相同顏色，設計邊著色函數 $f_0^A : E(M_0) \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。若將 f_0^A 的顏色經過適當的置換（$1 \leftrightarrow 2$、$3 \leftrightarrow 4$，$5 \leftrightarrow 6$），則可得邊著色函數 $f_0^B : E(M_0) \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。有關 f_0^A與f_0^B 的著色結果如下圖所示：



由於 f_0^A 與 f_0^B 對 M_0 的邊著色具有對稱性，令其邊著色的結果分別為 M_0^A 與 M_0^B，因此 M_0^A 與 M_0^B 從各方向結合後，不論上下、左右、前後，各邊的顏色並不會造成任何衝突，六種狀況如下圖所示：



令 Q_n 為 3^{3n} 個小正立方體 M_0 堆疊而成，組合出邊長為 3^n 的大正立方體。因為 M_0^A 與 M_0^B 以任何方向連結後並不會造成邊上顏色的衝突，所以我可以用 M_0^A 與 M_0^B 交錯堆疊成邊長為 3^n 的大正立方體，沿用 M_0^A 與 M_0^B 邊上的顏色即可得 Q_n 的一種邊著色。不難得知第 n 階的門格海綿 M_n 實為 Q_n 的部分子結構，在刪除 Q_n 中多餘的邊後，即可得 M_n 的一個邊著色函數。換句話說，透過 M_0^A 與 M_0^B 的交錯堆疊，對於任意自然數 n，始終能夠設計出 M_n 的邊著色函數。下圖是由 M_0^A 與 M_0^B 堆疊而成的 M_1 邊著色：



M_n 的邊著色：

$\forall n \in \mathbb{N}$，M_n 必為 6–edge-colorable，且 $\chi'(M_n) = 6$。特別地 $\chi'(M_0) = 3$。

2.2.7 全著色 total-coloring 的定義

給定圖 G，其頂點集合為 $V(G)$，邊集合為 $E(G)$，給定函數 $f : V(G) \cup E(G) \to \mathbb{N}$。若函數 f 具備下列條件：

1. 對任意的邊 $uv \in E(G)$，函數 f 皆滿足 $f(u) \neq f(v)$；
2. 對任意相鄰的兩個邊 $uv, vw \in E(G)$，函數 f 皆滿足 $f(uv) \neq f(vw)$；
3. 對任意邊 $uv \in E(G)$，函數 f 皆滿足 $f(u) \neq f(uv)$ 且 $f(v) \neq f(uv)$；

則稱函數 f 為 G 的一個「**全著色函數（total-coloring）**」。

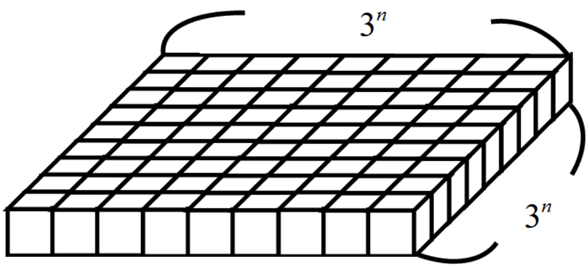
若存在函數 $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 為圖 G 的全著色函數，則稱 G 為「**可 k 全著色**」或「**k–total-colorable**」，同時稱函數 f 為「**k 全著色函數（k–total-coloring）**」。對於圖形的全著色問題，我好奇的是：能使得 G 是可 k 全著色的最小自然數 k 為何？若 k 為最小自然數能使得圖 G 是可 k 全著色，則稱 k 為 G 的「**全著色數（total chromatic number）**」，並以符號記為「$\chi''(G)$」。意即，$\chi''(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是可 } k \text{ 全著色}\}$。

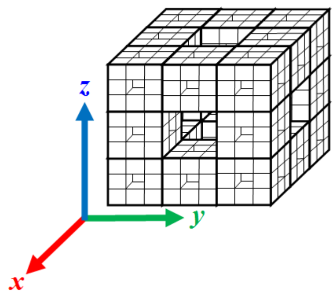
2.2.8 M_n 的全著色

對於全著色的議題，倘若圖形 G 中有一點 v，與 k 條邊相連，則此 k 條邊必須著上不同的顏色，且此 k 條邊的顏色皆不可與點 v 之顏色相同，故圖形的全著色數必然不小於 $k+1$，意即 $\chi''(G) \geq k+1$。對於門格海綿的全著色，我首先考慮 M_1，在討論邊著色時已提過在 M_1 中存在一個點恰與 6 條邊相鄰，可知 $\chi''(M_1) \geq 7$。由於 M_1為M_n 的子結構，所以對於第 n 階門格海綿 M_n 恆有 $\chi''(M_n) \geq \chi''(M_1) \geq 7$。

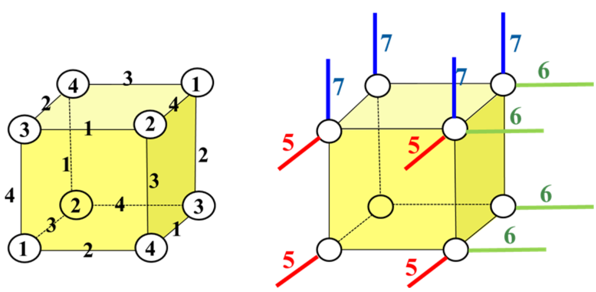
基於點著色數為 2，邊著色數為 6，可以輕易得知用 8 種顏色必可以完成 M_n 的全著色。因此我想知道的是，可否只用邊著色數另加 1 種顏色，也就是使用 7 種顏色就完成 M_n 的全著色？

首先考慮由 3^{3n} 個小正立方體 M_0 堆疊而成的 Q_n，將所有正立方體的每個面都視為透明，並把內部看不到的點都算進去。依照水平高度將 Q_n 分為 3^n 層堆疊的結構，每一層皆為 $3^n \times 3^n$ 個 M_0 在同一水平面上組合而成的形體。





對於小正立方體 M_0，我已完成 M_0 的全著色（如左下圖所示）。令 Z_1 為 Q_n 中第一層的結構，將已完成全著色（使用顏色 $\{1,2,3,4\}$）的 M_0，透過適當的旋轉（以 z 軸為轉軸旋轉 $180°$），將已著色的 M_0 間隔放置，考慮 Z_1 中與 x 軸平行的邊，若此邊尚未著色，則以顏色 5（紅色）將此邊著色；考慮 Z_1 中與 y 軸平行的邊，若此邊尚未著色，則以顏色 6（綠色）將此邊著色。由此可知 Z_1 可使用 6 種顏色 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 完成全著色。



令 Q_n 中第 i 層的結構爲 Z_i，若 i 爲奇數，則將 Z_1 的全著色方法套用在 Z_i 的點與邊上。考慮 Q_n 中與 z 軸平行的邊，若此邊尚未著色，則以顏色 7（藍色）將此邊著色。如此一來，我設計了以 7 種顏色 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 完成 Q_n 的全著色，故 $\chi''(Q_n) \leq 7$。因爲第 n 階門格海綿 M_n 爲 Q_n 的子結構，所以不難得知 $\chi''(M_n) \leq \chi''(Q_n) \leq 7$。

綜合以上討論，因爲 $7 \leq \chi''(M_1) \leq \chi''(M_n) \leq \chi''(Q_n) \leq 7$，可知 M_n 的全著色數 $\chi''(M_n) = 7$。

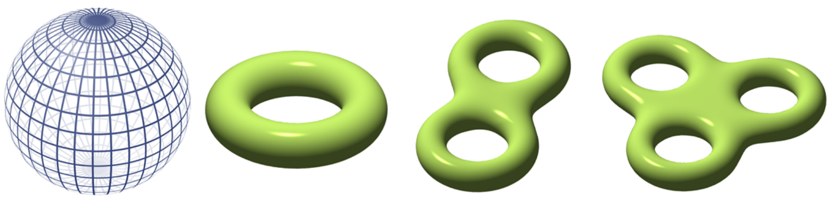
> **M_n 的全著色：**
> $\forall n \geq 1$，M_n 必爲 7–total-colorable，且 $\chi''(M_n) = 7$。特別地 $\chi''(M_0) = 4$。

2.3 Menger Sponge 的曲面虧格數與 Heawood's Number

在計算出第 n 階門格海綿 M_n 的點、邊、面的數量，以及探討了不同的著色議題之後，我將 M_n 視爲是鑲嵌在封閉曲面上平面化的圖形，意即 M_n 可畫在曲面上使得邊不相交。進一步討論該曲面的「虧格數」與「著色」相關性質。

2.3.1 曲面的虧格數

在拓樸學中，對於一個封閉曲面 S，在曲面 S 上，若最多存在 k 條不同的封閉曲線能使曲面 S 不被分開，則稱此曲面 S 的「**虧格數 genus**」爲 k。若一個曲面的虧格數爲 k，則將此曲面記爲「S_k」。給定一個圖 G，若 G 可以畫在曲面 S 上使得邊不相交，則稱圖 G 可以「**鑲嵌**」在曲面 S 上，意即圖 G 是在曲面 S 上的平面圖（一般圖論中的平面圖指的是在球面 S_0 上的平面圖）。若 k 爲最小的整數能使得圖 G 可以鑲嵌在曲面 S_k 上，則稱 k 爲 G 的虧格數，並記爲「$\gamma(G) = k$」。意即 $\gamma(G) = \min\{k :$ 圖 G 可以鑲嵌在曲面 S_k 上$\}$。



曲面S_0　曲面S_1　曲面S_2　曲面S_3

2.3.2 M_n 的 *genus*

一般科普書籍中都會介紹球面上平面圖的點、邊、面具有下列關係式：

> **歐拉定理：**
>
> 對於任意曲面 S_0 上的連通平面圖 G，$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ 恆成立。

上述的歐拉定理述說著球面 S_0 的拓樸表徵，事實上，曲面的虧格數將會決定曲面 S_k 上平面圖的點、邊、面的定量關係，而歐拉定理的結論可以推廣至任意曲面 S_k 上，定理敘述如下：

> **廣義歐拉定理：**
>
> 令連通圖 G 的虧格數爲 k，$|V(G)|$、$|E(G)|$、$|F(G)|$ 分別爲圖 G 鑲嵌在曲面 S_k 上的點、邊、面的數量，則 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2k$ 恆成立。

將第 n 階門格海綿 M_n 視爲鑲嵌在曲面上的平面圖，透過 M_n 的點、邊、面數量，利用廣義的歐拉定理我可以求得 M_n 的虧格數 $\gamma(M_n)$。 由本文的 **定理** 1 可知，

$$\begin{cases} |V(M_n)| = \dfrac{32}{19}\times 20^n + \dfrac{24}{7}\times 8^n + \dfrac{384}{133} \\ |E(M_n)| = 4\times 20^n + 8^{n+1} \\ |F(M_n)| = 2\times 20^n + 4\times 8^n \end{cases}。$$

假設 M_n 的虧格數 $\gamma(M_n)=k$，根據廣義的歐拉定理可知：

$$\begin{aligned} |V(G)|-|E(G)|+|F(G)| &= \left(\frac{32}{19}\times 20^n + \frac{24}{7}\times 8^n + \frac{384}{133}\right) - \left(4\times 20^n + 8^{n+1}\right) + \left(2\times 20^n + 4\times 8^n\right) \\ &= \frac{-6}{19}\times 20^n - \frac{4}{7}\times 8^n + \frac{384}{133} = 2-2k \end{aligned}$$

由此可知虧格數 $k=\gamma(M_n)=\dfrac{3}{19}\times 20^n + \dfrac{2}{7}\times 8^n - \dfrac{59}{133}$。

> M_n **的虧格數**：$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$M_n$ 的虧格數 $\gamma(M_n)=\dfrac{3}{19}\times 20^n + \dfrac{2}{7}\times 8^n - \dfrac{59}{133}$。
>
> （經計算可得 $\gamma(M_0)=0$，$\gamma(M_1)=5$，$\gamma(M_2)=81$）

2.3.3 曲面 $S_{\gamma(M_n)}$ 的 Heawood's number

對於所有虧格數爲 k 的曲面 S_k，令 h 爲最小的自然數，使得任意能鑲嵌到曲面 S_k 上的圖 G 皆爲可 h 點著色，則 h 稱爲曲面 S_k 的「Heawood's number」，並記爲「$\chi(S_k)$」。換句話說，$\chi(S_k)=\min\{h:$ 可鑲嵌到 S_k 上的圖 G，$\chi(G)\le h\}$。對於曲面 S_k 上圖形的著色數，1968年，Ringel 與 Youngs 完成了「Heawood Map Coloring Theorem」的最後一塊拼圖，定理敘述如下：

> **Heawood Map Coloring Theorem**：$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$\chi(S_k)=\left\lfloor \dfrac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor$。

因爲 M_n 的虧格數 $\gamma(M_n)=\dfrac{3}{19}\times 20^n + \dfrac{2}{7}\times 8^n - \dfrac{59}{133}$，考慮 M_n 所決定的曲面 $S_{\gamma(M_n)}$，透過上述定理即可知，存在一個可鑲嵌在曲面 $S_{\gamma(M_n)}$ 上的圖 G，其點著色數爲：

$$\chi(S_{\gamma(M_n)}) = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{1+48\left(\frac{3}{19}\times 20^n + \frac{2}{7}\times 8^n - \frac{59}{133}\right)}\right)\right\rfloor$$

> $S_{\gamma(M_n)}$ **的 Heawood's number**：
>
> $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$\chi(S_{\gamma(M_n)}) = \left\lfloor \dfrac{1}{2}\left(7+\sqrt{1+48\left(\dfrac{3}{19}\times 20^n + \dfrac{2}{7}\times 8^n - \dfrac{59}{133}\right)}\right)\right\rfloor$。

經過估計可得知「$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$3^{n+1}\le \chi(S_{\gamma(M_n)})\le 5^{n+1}$」。這表示 M_n 所決定的曲面 $S_{\gamma(M_n)}$，其 Heawood's number $\chi(S_{\gamma(M_n)})$ 是以指數型態在增長。由於 $\chi(M_n)=2$，M_n 可視爲鑲嵌在曲面 $S_{\gamma(M_n)}$ 上的一個二部圖。這意味著門格海綿 M_n 這類圖形，爲一種具有規律性結構，同時能鑲嵌在高虧格數曲面上的一種二部圖類型。綜合上述討論，我有下列結果：

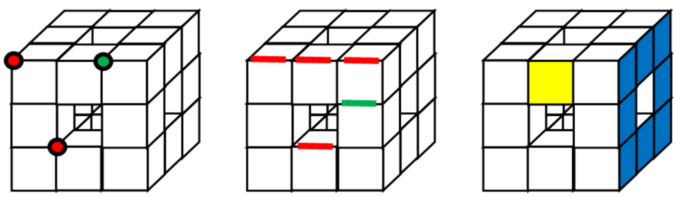
定理 3. 任意非負整數 n，M_n 的虧格數與曲面 $S_{\gamma(M_n)}$ 的 *Heawood's number* 有以下結論

1. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 的虧格數 $\gamma(M_n) = \dfrac{3}{19} \times 20^n + \dfrac{2}{7} \times 8^n - \dfrac{59}{133}$。

2. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$\chi(S_{\gamma(M_n)}) = \left\lfloor \dfrac{1}{2}\left(7 + \sqrt{1 + 48\left(\dfrac{3}{19} \times 20^n + \dfrac{2}{7} \times 8^n - \dfrac{59}{133}\right)}\right)\right\rfloor$。

3. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 爲可鑲嵌在曲面 $S_{\gamma(M_n)}$ 上的一個二部圖。

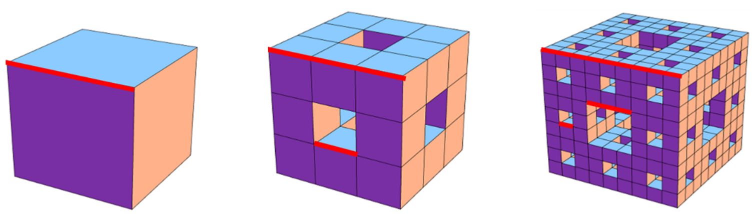
2.4 Menger Sponge 的 true vertices、true edges、true faces 數量計算、total angular defect



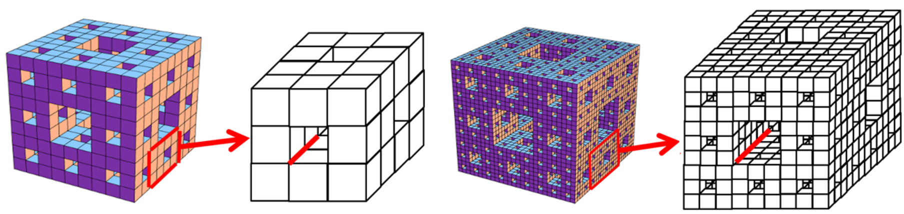
前文我都是用遞迴式堆疊的觀點在討論門格海綿的點、邊、面，如左上圖的紅色及綠色點都視爲點，中上圖的紅色和綠色線段都視爲邊，右上圖的黃色及藍色區塊都視爲面。接下來，我試著改用門格海綿最初的建構方式，也就是遞迴式分割的觀點來看待它，如此，下圖中黃色部份仍爲點、邊、面，而上圖的綠色及黃色部分則不算。這樣定義的點、邊、面，我稱爲門格海綿的 true vertices、true edges、true faces。

2.4.1 M_n 的 true edges

在門格海綿的 true edges，定義由不同條 M_0 的稜線所組成的邊爲不同長度的邊。其中除了外側的邊之外，在內側也會有不同長度的邊。



M_0 M_1 M_2



M_2 M_3

我可以知道，M_n 的 true edges 數量分別都與不同階層數的門格海綿中長度爲 1 或 2 的邊數量相同。因此就能得知，若要計算 M_n 的 true edges 數量，我眞正需要計算的爲 M_n 中長度爲 1 和 2 的邊的數量。而我有以下結果：

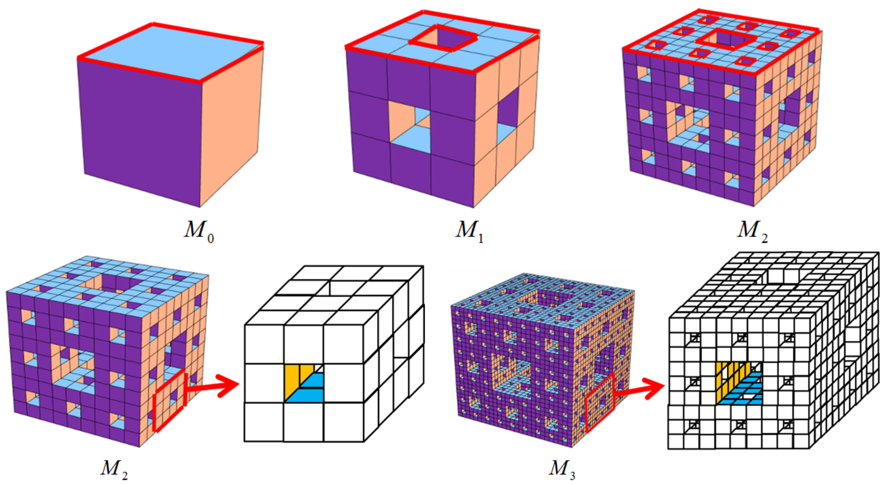
M_n 的 true edges 數：

$\{t \times 3^i : t \in \{1,2\}$ ，$i \in \{0,1,\cdots,n-2\}\} \cup \{3^{n-1} 3^n\}$ M_n 的 true edges 數爲

$$N(t \times 3^i) = \begin{cases} g_{n-i} = 28 \times 20^{n-i-1} + 4 \times 8^{n-i} t = 1 \\ j_{n-i} = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i} t = 2 \end{cases} ，N(3^{n-1}) = 60 N(3^n) = 12。$$

2.4.2 M_n 的 true faces

對於門格海綿的 true faces，定義由不同個 M_0 的單一側面所組成的面爲不同面積的面。其中除了外側的面之外，在內側也會有不同面積的面。



我可以知道，M_n 的 true faces 數量分別與不同階層數的門格海綿中面積爲 1 或 1×2 的面數量相同。因此就能得知，若要計算 M_n 的 true faces 數量，我眞正需要計算的爲 M_n 中面積爲 1 和 1×2 的面數量。

M_n 的 true faces 數：

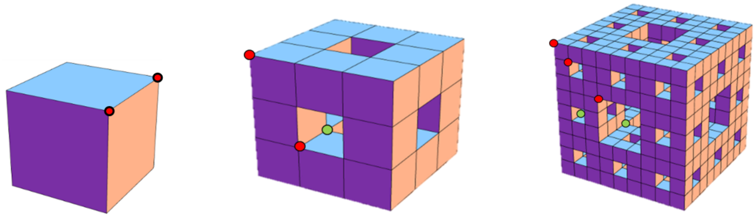
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 的 true faces 數爲

$\{$ 分割 i 次的正方形 $i \in \{0,1,\cdots,n\}\} : y_n = 8 \times 20^{n-i-1} + 2 \times 8^{n-i}$

$\{$ 分割 j 次的長方形 $j \in \{0,1,\cdots,n-2\}\} : z_n = 8 \times 20^{n-i-1} - 8^{n-i}$ 。

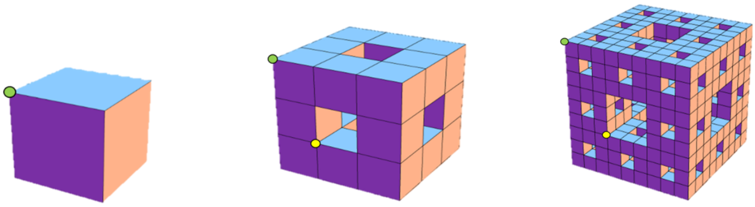
2.4.3 M_n 的 true vertices

一開始我先觀察門格海綿的點，發現對於任意階層的門格海綿 M_n 的 $\deg(v)$ 只有兩種情形，一個是 $\deg(v) = 3$ (紅色的點)，另外一種是 $\deg(v) = 6$ (綠色的點)。

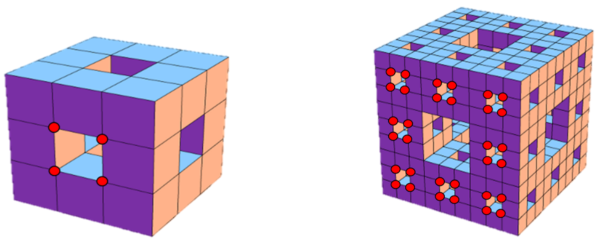


2.4.4 $\deg(v) = 3$

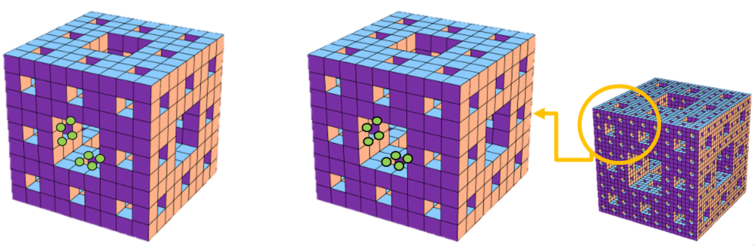
對任意非負整數 n，假設 M_n 是利用遞迴式分割所構成的，定義 t'_n 爲原本在 M_{n-1} 上 $\deg(v) = 3$ 的點，經過分割之後，在 M_n 上仍會是 $\deg(v) = 3$ 的點數量（如下圖綠點及黃點所示），故可得 $t'_n = t_{n-1}$。



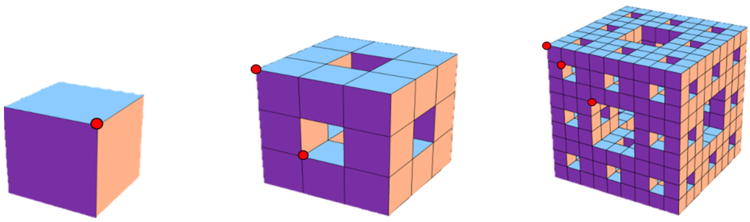
對任意非負整數 n，在 M_{n-1} 的側面上，每一個被挖去的洞在堆疊成 M_n 時都會重複 8 次（如下圖所示），定義 t''_n 爲最小洞上的點數量。而單一小洞上的點數量爲 $t_{n-1} - t_{n-2}$，故可得 $t''_n = (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8$。



由於 M_n 是利用遞迴式建構所得到的，而在組合的過程中除了在上述兩種位置會有新的 $\deg(v) = 3$ 的點出現外，在每個 M_1 變成 M_2 的時候也會有新的 $\deg(v) = 3$ 的點出現（如下圖所示）。在 M_2 上新的 $\deg(v) = 3$ 的點數量 $t'''_2 = 4 \times 4 \times 6 = 96$，故可得 M_n 上 $t'''_n = 96 \times 20^{n-2}$。



對任意非負整數 n，定義 t_n 爲 M_n 單一側面上的點數。可知 $t_0 = 8$、$t_1 = 32$、$t_2 = 320$。



$t_0 = 0$ $t_1 = 32$ $t_2 = 320$

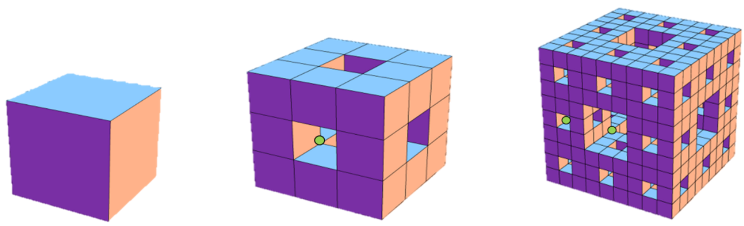
因爲 M_n 的 $\deg(v) = 3$ 的點可以分成由 M_{n-1} 經過分割、每一側面上小洞重複計算、和每次 M_1 變成 M_2 所增加的點，即可得 $t_n = t'_n + t''_n + t'''_n = t_{n-1} + (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8 + 96 \times 20^{n-2}$。故可建立遞迴關係

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + (t_{n-1} - t_{n-2}) \times 8 + 96 \times 20^{n-2} & , n \geq 2 \\ t_0 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow t_n = 8t_{n-1} + \frac{96}{19} \times 20^{n-1} - \frac{704}{19}\text{。}$$

故可得數列 $< t_n >$ 的一般式爲 $t_n = \dfrac{8}{19} \times 20^n + \dfrac{16}{7} \times 8^n + \dfrac{704}{133}$。

2.4.5 $\deg(v) = 6$

對任意非負整數 n，定義 u_n 爲 M_n 單一側面上的點數。可知 $u_0 = 0$、$u_1 = 8$、$u_2 = 168$。

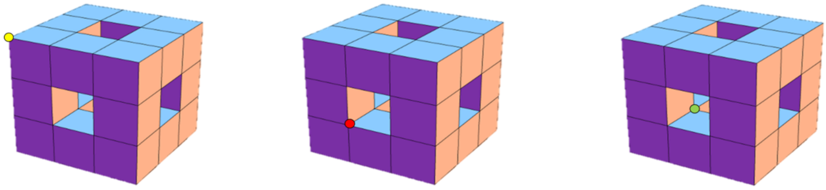


$u_0 = 0$ $u_1 = 8$ $u_2 = 168$

經由相同的推導過程可得數列 $< u_n >$ 的一般式爲 $u_n = \dfrac{160}{19} \times 20^{n-1} - \dfrac{8}{19}$。

2.4.6 M_n 的 total angular defect

定義 $AD(v)$ 定義頂點 v 的 angular defect，我將任意階層的門格海綿 M_n 的點分成三種類型，第一種是 $\deg(v) = 3$ 且此點的 $AD(v) = \dfrac{\pi}{2}$（如左下圖所示）；第二種是 $\deg(v) = 3$ 且此點的 $AD(v) = \dfrac{-\pi}{2}$（如中下圖所示）；第三種是 $\deg(v) = 6$ 且此點的 $AD(v) = -\pi$（如右下圖所示）。



$\left\{v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \dfrac{\pi}{2}\right\}$ $\left\{v : \deg(v) = 3 \text{ 且 } AD(v) = \dfrac{-\pi}{2}\right\}$ $\left\{v : \deg(v) = 6 \text{ 且 } AD(v) = -\pi\right\}$

2.4.7 M_n 中不同 angular defect 的點數量

符合 $\deg(v) = 3AD(v) = \frac{\pi}{2}$ 的點只出現在第 n 階門格海綿 M_n 最外側的 8 個點上，所以符合此條件的點數量爲 8。

符合 $\deg(v) = 3AD(v) = \frac{-\pi}{2}$ 的點會出現在第 n 階門格海綿 M_n 非最外側的點上，所以符合此條件的點數量爲 $t_n - 8$。

符合 $\deg(v) = 6AD(v) = \frac{-\pi}{2}$ 的點會出現在所有第 n 階門格海綿 $M_n \deg(v) = 6$ 的點上，所以符合此條件的點數量爲 u_n。

2.4.8 M_n Total angular defect

任一階門格海棉 M_n 的點均可被區分爲上述三種類型，定義 $\mathrm{TAD}_{(n)}$ 爲每個頂點的 total angular defect 總和，即可建立關係式 $\mathrm{TAD}_{(n)} = 8 \times \frac{\pi}{2} - (t_n - 8) \times \frac{\pi}{2} - u_n \times \pi$。

而前面我已分別求出 $t_n = \frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n + \frac{704}{133}$ 及 $u_n = \frac{160}{19} \times 20^{n-1} - \frac{8}{19}$，故可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TAD}_{(n)} &= 4\pi - (\frac{8}{19} \times 20^n + \frac{16}{7} \times 8^n - \frac{360}{133}) \times \frac{\pi}{2} - (\frac{8}{19} \times 20^n - \frac{8}{19}) \times \pi \\
&= 2\pi \times (\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}) \\
&\Rightarrow V_n - E_n + F_n = (\frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133}) \\
&\Rightarrow \frac{-6}{19} \times 20^n - \frac{4}{7} \times 8^n + \frac{384}{133} = 2 - 2k \ \Rightarrow k = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}
\end{aligned}
$$

而此結果和前面利用廣義歐拉定理及點邊面通式所計算出來的虧格數通式是相同的。

M_n **的虧格數：**$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$M_n$ 的虧格數 $\gamma(M_n) = \frac{3}{19} \times 20^n + \frac{2}{7} \times 8^n - \frac{59}{133}$。

3 結論

門格海綿在數學上大多探討其身爲碎形的特性，因此我這次用不同的角度切入，以拓樸學的角度探討其點、邊、面的數量，同時以組合學的觀點探討其點、邊、面的著色問題。門格海綿最初的定義是不斷地分割，後來我爲了方便做出模型，轉而想成是遞迴式的堆疊，後來發現此種想法也較容易被定義及理解，在計算數量以及著色時亦運用到此特性。由於門格海綿爲一立體圖形，且在堆疊的過程中會有許多被覆蓋或者是被重複計算到的點、邊、面，故在計算點、邊、面數量的過程中，我都尋求能以一種有規律的方法討論各種情形。因此我層層分析，根據門格海綿的結構，依序建立遞迴關係式，運用高中所學的數學技巧，精確的算出點、邊、面的數量。將研究拓展到著色問題時，也想方設法運用門格海綿的規律性結構，使我得以在內部複雜的結構中，仍舊能滿足著色規則。

給定一個第 n 階的門格海綿，有辦法利用公式快速得知其點、邊、面的數量，而我所研究的性質，呈現思考的過程，進而從思考中得出規律，再將得到的規律推廣到所有高階的門格海綿，而所得的通式能夠套用在所有的門格海綿，是因爲它具有極佳的規律性。門格海綿形體整齊而美麗，我努力地想抽絲剝繭，卻始終只能勾勒出些皮毛。在點、線、面個數以及著色數的探究之後，我將研究方向延伸到曲面的虧格數，得知門格海綿是在高虧格數曲面上的二部圖，門格海綿的規律性讓我在思考以及計算的過程中都能更好地找到方向，也讓我深深體會到門格海綿的神秘以及那無與倫比的吸引力，而完成著色的門格海綿，高對稱性的繽紛色彩，引人入勝。

4 未來展望

未來我想要更深入探討門格海綿的組合結構。研究門格海面在圖論上的 diameter 和 radius 爲何？若欲使門格海綿的 diameter 下降，則最少需增加幾條邊，以及該如何加邊？此外，研究門格海綿在拓樸學中的性質以及在物理上的應用，同時開發類似魔術方塊等益智玩具並分析蘊藏其中的數學原理。

參考文獻

[1] 普通高級中學數學，第一、二、三、四册，南一出版社。

[2] 張鎮華，蔡牧村，《圖論及其演算法》，台大數學系圖論課程教材。

[3] 陳伯亮(1993)，《簡介圖形著色問題》，數學傳播17卷4期。

[4] 曹亮吉(1977)，《淺談四色問題》，數學傳播1卷4期。

[5] Douglas B. West(2008), 《Introduction to Graph Theory》, 2nd, Pearson Education.

[6] Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang(2016), 《Graphs and Digraphs》, 6th, CRC Press.

[7] Ringel, G. and Youngs, J. W. T. (1968), 《Solution of the Heawood Map-Coloring Problem》, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 60, 438-445.

作品評語

莊武諺教授
國立臺灣大學數學系

門格海綿（Menger Sponge）是一個有趣的碎形物體，有關它的表面積、體積與邊長等,皆已有完整的研究。本文作者改從拓樸的觀點對門格海綿進行了點、邊、面的數量研究，並研究其著色問題。在點邊面的數量研究中作者也獲得了門格海綿虧格數，在著色問題方面也得到了完整的結論，如邊著色數為 6，全著色數為 7。

在第一階段比賽過程中評審委員們給了許多建議，例如可考慮 true vertices、true edges、true faces 的數量研究，或依不同的 degree 進行更細緻的計算，或計算其 total angular defect，並與之前所得的虧格數做比較等等。在比賽第二階段時作者對這些建議都提出了完整的結果，均已收錄於作品說明書中。作者計算能力強，對數學有高度的研究精神，數學寫作也非常用心，最後的作品可說是相當完整。作品中如 total angular defect 的部份也已稍稍觸及了大學數學的範疇。

通篇論文，我們看到作者敏銳的觀察力與嚴謹的推理能力，實屬一篇難得之作。