從 2D 投影建構 3D 立體策略之探討

臺中市立臺中第一高級中等學校 黃維坪
指導老師：包宏信

Abstract

2D to 3D conversion is an important problem in both theory and applications. Its main purpose is to reconstruct 3D models from their 2D projections. Typically, traditional methods often involve coordinate transformations. However, in this research, we try to use 2D projections at different angles of an unknown 3D model to reconstruct the 3D model directly. More precisely, we discuss the strategy for choosing projection directions to make the reconstruction possible. We choose convex polyhedron, especially prism and pyramid as the research target and analyze different situations. The results contain the conditions of a perfect conversion, the best strategy for converting 2D into prisms or pyramids under the best or worth circumstance, and a strategy for converting convex polyhedron. Although optimal strategies are not obtained for all kinds of convex polyhedron, good partial results are established toward better strategies for more complex situations in the future.

中文摘要

2D 影像與 3D 模型間的轉換一直以來都是重要的科學問題，其中從平面投影建構 3D 模型的方法及策略是其主要的研究方向。本研究嘗試從立體在不同角度下的投影形狀，來重新建構該立體，並且討論重新建構過程中，選擇投影方向的策略。本文選擇了凸多面體，尤其是角柱、角錐體，作爲研究對象，並對各種情況進行分析。在研究中得到了完全還原立體所需之條件，以及還原角柱、角錐體下的最佳與最差狀況的最佳還原策略，最後制定一個還原凸多面體的策略。儘管並沒有找出解決所有情況的最佳策略，但本文中已導出一部分的結論，希望未來能夠研究更複雜情況下的最佳還原策略。

1 簡介

近幾年以來科技不斷在尋求能快速且精準地以我們所看到的 2D 投影重新建構 3D 模型的方法，上網查詢資料後發現大多的運算皆是以數學的座標轉換配合電腦的高速運算及一些演算法去還原。本文想以投影的方式作爲研究方法，對未知立體選取不同角度去投影並以此去找出立體的形狀，探討不同情況下選取投影角度的最佳策略，盡可能使得總選取次數最少。綜合來說，本文有下列兩個研究目的。

1. 以水平投影還原角柱體、角錐體之策略的相關探討。
2. 以投影還原凸多面體的策略的相關探討。

2 以水平投影還原角柱體、角錐體之策略的相關探討

2.1 建立表達方法及基礎性質

所謂水平投影即選擇的投影方向是水平的的投影（$z = 0$）。在還原角柱體跟角錐體時，投影的高都是相同的，於是投影只給予底面寬度的資訊。又角柱之投影必爲長方形，角錐則爲三角形，頂點（角錐）或者頂面（角柱）皆易找出，所以整個過程的重點爲還原底面。我使用下列作圖法表達投影狀況（參見圖 1），其中灰色區域即代表底面圖形被限制的範圍。

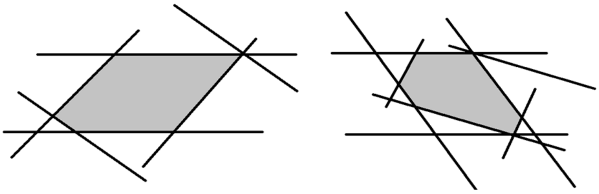


圖 1

因爲對未知的底面圖形而言，每次的水平投影相當給予其兩條平行投影線的限制，所以底面圖形將會被限制於多組平行線所圍成的灰色區域內，圖 1 即爲觀察者俯視整個過程時所見的情況。

定理 1.（點佔線原理） 可能區域（灰色區域）的每一條邊至少通過底面的某一頂點。

證明. 考慮影子產生的原理即知。 □

定理 2.（三線共點） 三投影線共點則該點必爲頂點。

證明. L_1 與 L_2 交於點 X，將平面分成四個區域 I, II, III, IV，如圖 2 所示。

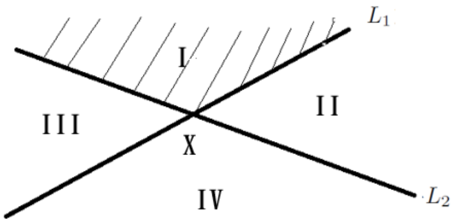


圖 2

不妨假設 I 爲灰色區域，若 L_3 只過 II 和 III，由點佔線原理知道 X 必須爲頂點；若只過 I 和 IV，則有下列兩種可能。

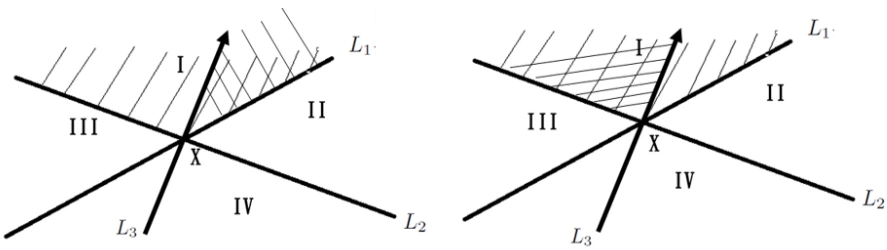


圖 3

在左圖裡灰色區域變成剩下右邊，對 L_2 用點佔線原理知道 X 爲頂點；同理，在右圖裡對 L_1 用點佔線原理知道 X 爲頂點。故無論如何 X 皆爲頂點。 □

除此之外還有表達圖的基本性質。每次投影產生兩條投影線，而每條投影線與灰色區域的互動可能有四種結果：僅交於一點（參見虛線 A）、與灰色區域的邊交兩點（參見虛線 B）、通過灰色區域兩頂點（參見虛線 C），以及交兩點且其中一點爲頂點（參見虛線 D）。參見圖 4。

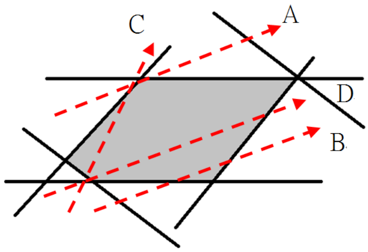


圖 4

2.2　水平投影還原三角柱（錐）

不論先投影任兩個方向皆可得到可能區域爲一平行四邊形。此時取對角線方向作第三次投影，可以把可能的情況分成五類，討論如下。

1. **兩投影線交平行四邊形於四點，且無三線共點**

   可能區域爲一六邊形，且每個頂點最多被兩條邊通過，但根據點佔線原理每條邊至少通過一頂點，而圖中有六條邊卻只有三個頂點，故三個頂點必爲下列兩種可能：三角形 ACE 或三角形 BDF，欲判別只需再取另一條對角線的方向的投影，共四次。參見圖 5。

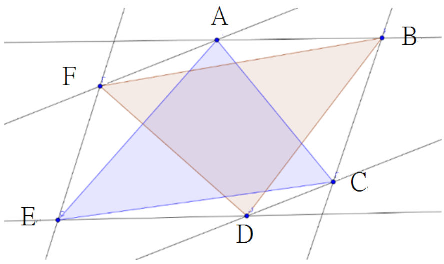


圖 5．欲分辨此兩種狀況，只需再取另一條對角線的方向的投影即可。

2. **兩投影線交平行四邊形於四點，且可能區域爲梯形**

   兩個三線共點，確認 AD 兩點，由點佔線知道最後一個點位於 BC 邊上，再取 AC 方向投影即可得知該點在線上的確切位置，共四次。參見圖 6。

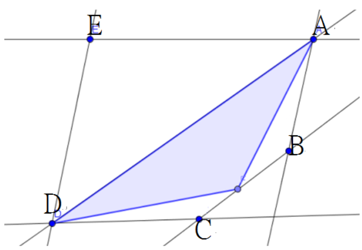


圖 6

3. **兩投影線交平行四邊形於三點，且可能區域爲三角形**

   直接出現三個三線共點（三角形 ABC），共三次。參見圖 7。

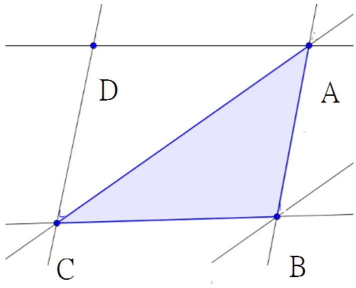


圖 7

4. **兩投影線交平行四邊形於三點，且可能區域爲五邊形**

出現一個三線共點，由點佔線知道 B 與 C 至少其中一個爲頂點，此時只要再取另一條對角線方向的投影便可得到另兩個點，總共四次。參見圖 8。

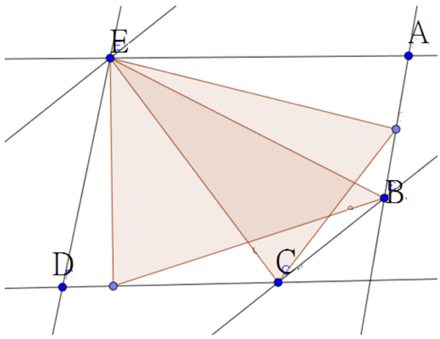


圖 8

5. **兩投影線交平行四邊形於二點，可能區域仍爲平行四邊形**

確認兩點，但卻會使剩下那個點完全無線索可循，策略爲先取另一條對角線方向投影使得該點被限制在某條線上，再以一次投影確認其在線上的位置（類似 2. 的作法），共五次。而四次是不可能的，因爲最後那個點在三次投影後沒有任何線限制，至少還需要兩條不同的投影線限制，所以至少還需兩次投影，故五次爲最少。參見圖 9。

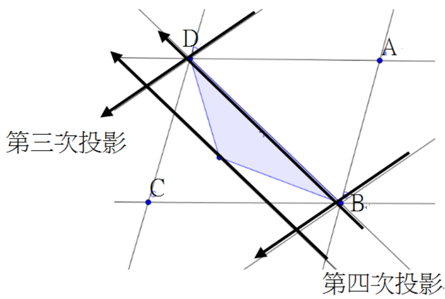


圖 9．第四次和第五次投影用來找出 F 的確切位置（兩投影線交點）。

從這裡得到一套策略一定可以在五次以內還原三角柱（錐），現說明這是最佳策略，也就是不可能只用四次投影就保證完全還原三角柱（錐）。不論取任意前三次投影後都可能產生 5.

情況，由上述討論過程便可知在該情況下至少還需要兩次投影，於是該情況下至少要 5 次才能還原底面三角形，故得到下面的結論。

結果 1. 水平投影下最少五次可以保證完全還原三角柱（錐）。

明顯的，在上面的研究過程中變數極多，四邊形的情況變得非常複雜，而由上述探討可以發現兩個主要問題：

- 最少可能只要幾次投影就能完全還原 s 角柱（錐）？（最佳狀況）
- 最少需要幾次投影才能保證完全還原 s 角柱（錐）？（最差狀況）

2.3 水平投影下還原 s 角柱（錐）的最佳狀況

用一次投影不可能就確定還原出該未知底面圖形，於是必存在一最小值，使得至少要用超過這個次數的水平投影才可能還原出該底面圖形，換句話說，即考慮最佳狀況下還原該底面圖形所需的投影次數。如果完全還原了一個s邊形底面，那麼我們必定確認了它s個頂點的位置，但是一個頂點要被確認，必須有投影線限制它，於是從投影線數量來分析。

定理 3. 水平投影下最少 s 次才可能完全還原 s 角柱（錐）。（最佳狀況）

證明.

被確認的 s 個點可依被確認的方式分成兩類。頂點被確認要失去兩個自由度，也就是至少被兩條線通過。令第一類爲恰好被兩條線通過然後確認，第二類則是因三條線以上通過而確認。參見圖圖 10、11。

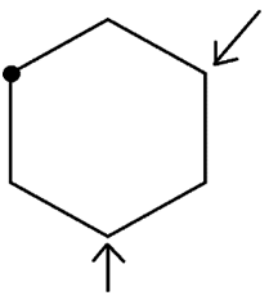


圖 10．第一類：例如已知底面爲三角形，且已經確認一個頂點的所在，則根據點占線原理（**定理** 1）知道另兩頂點在箭頭處上。則這兩個被確認的頂點屬於第一類。

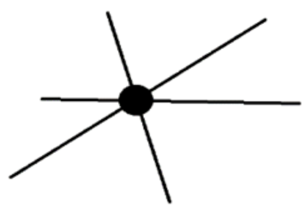


圖 11．三線（或以上）共點。（**定理** 2）

現在來分析整張圖上所有線的數量，假設 s 個頂點都被確定時，有 k 個頂點屬於第二類，$s-k$ 個屬於第一類，計算圖中投影線的數量 L。第一類的頂點由於點占線原理，會對應到通過它的兩條投影線且這兩條投影線不會被重複計算，不然便無法使用點占線原理；第二類的頂點則是對應到通過它的線（至少三條），且可以與相鄰的第二類頂點至多共用一條投影線。

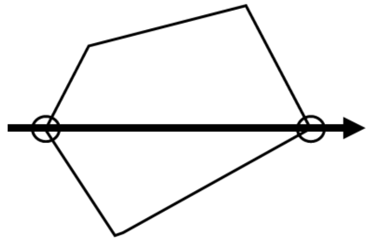


圖 12．若兩個圈起來的未知圖形的頂點共用了投影線，則該投影線通過此兩點，直接穿過了該未知圖形，違反投影的原理。故非相鄰的第二類頂點間不能共用投影線。

$k < s$ 時：至多共用 $k-1$ 條投影線，計算線的數量可得

$$L \geq 3k - (k-1) + 2(s-k) = 2s+1。$$

$k = s$ 時：至多共用 k 條投影線，計算線的數量可得

$$L \geq 3k - k = 2k = 2s。$$

由於每次投影產生兩條投影線，不難知道上述兩種狀況皆至少需要 s 次投影。現在構造 s 次投影便可完全還原的例子，即未知底面圖形正 s 邊形，然後取 s 次投影使得每個頂點都恰好被三線通過，參見圖 13。故得證。

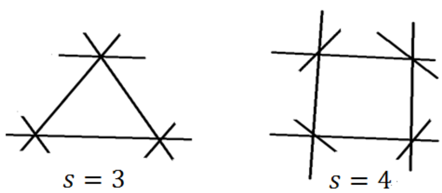


圖 13

□

2.4 水平投影下還原 s 角柱（錐）的最差狀況

2.4.1 名詞定義與解釋

- 情況圖：一種更進階的表達方法，產生方法為：先將原本的表達方法中與可行解區域無關（沒有用）的線去掉，並把已確認（三線共點）的頂點標出，然後若有多個已確認頂點則將其凸包畫出。參見圖 14。

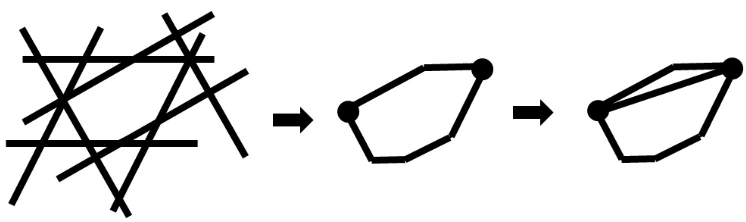


圖 14

而對於每一張情況圖 G，定義 $f(G)$ 為在此情況下保證完全還原至少所需投影次數，即最糟狀況下所需要的投影次數。

- 情況圖 G 的基本資訊包含：已確認點個數 K，未確認點個數 k，區域數 n，各區域邊數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，易知欲確認的底面爲 $K+k$ 邊形。區域數不包含已知頂點所形成的凸包的區域，例如圖 14 情況圖的區域數爲 2，而一個區域的邊數則定義爲該區域的總邊數扣除兩端點都是已知頂點的邊。參見圖 15。

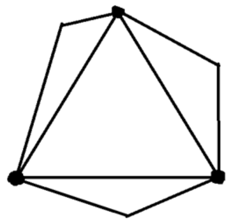


圖 15．區域數 $n = 3$，已確認頂點個數 $K = 3$，區域邊數：$2, 2, 2$。

- $min(G)$：情況圖 G 邊界上至少存在的頂點個數（可用點佔線算出）。參見圖 16。

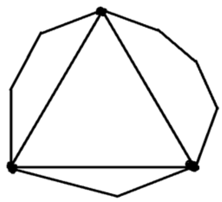


圖 16

$min(G) = 5$，因爲右上的區域邊界上至少還有一個頂點，而左上的區域邊界上至少還有一個頂點，加上原本就已確認的三個頂點，共五個。

- 標準狀態：若 $min(G) = K + k$，稱 G 爲標準狀態。
- 唯一狀態：若情況圖 G 滿足：在任意角度的投影下所產生的兩條新投影線中，都必定有一條投影線僅交 G 於一已知頂點，稱 G 爲唯一狀態。參見圖 17、18。

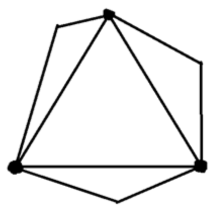


圖 17．$n = 3$，$K = 3$，$min(G) = 3$，G 爲唯一狀態，區域邊數：$2, 2, 2$。

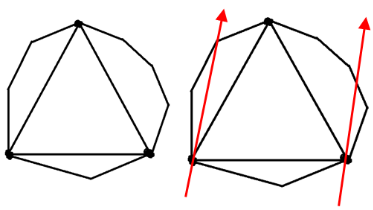


圖 18．$n = 3$，$K = 3$，$min(G) = 5$，G 非爲唯一狀態，區域邊數：$2, 3, 4$。

圖 18 不是唯一狀態，因爲紅線方向的投影可能產生不滿足唯一狀態定義的結果。

- 唯一狀態實質上代表每一次投影可視爲只有一條投影線，因爲另一條投影線根據定義僅交 G 於一已知頂點，對情況圖不會有任何影響；而標準狀態實質上代表所有頂點都已經位於圖 G 的邊界上，意即所有點都至少已被一條線限制，自由度小等於 1。
- 令情況圖 G 經投影 v（角度 θ）後可能變成的情況圖集合爲 $\{G'\}$，記爲

$$v_\theta(G) = \{G'\}$$

- 定義將所有的投影方向分成兩類：規則和不規則。若投影方向滿足下面條件則稱該投影方向爲規則的，其餘方向則爲不規則的，參見圖 19。

存在一區域在標號其頂點後，有下標 i 使得 $\overline{V_iV_{i+2}}$ 與投影方向平行。

幫區域標號頂點的方法則如圖 20 所示。

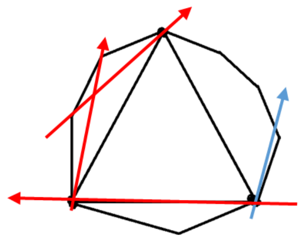


圖 19．紅箭頭方向爲規則的。藍箭頭方向爲不規則的。

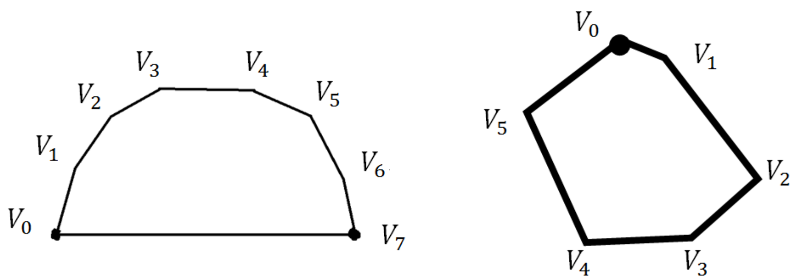


圖 20．依照順序標點，一個區域可能有 0 到 2 個已知頂點，若有則以已知頂點開始標號並以已知頂點結束標號，若爲 0 個已知頂點則隨意取起點開始。

2.4.2 是否給定底面 s 邊形下的還原

定理 4. 最糟情況下，若給定底面爲 s 邊形，則可保證以水平投影在有限多次內完全還原，反之若沒給定，則無法保證以水平投影在有限次內完全還原。

證明.

假設每一次的投影都產生下面的情況：兩條投影線與可能區域的邊交於四點，可能區域會從原本的 m 條邊變成 $m+2$ 條邊，不斷增加而無法確認任何頂點，故需要無限多次。但是在給定 s 邊形的情況下，若不確認任何頂點，則根據點佔線原理，可能區域的邊數有上界，至多爲 $2s$，故有限次內必定會出現三線共點的情況（確認一頂點），類似的過程再經過有限次後又會出現三線共點，於是最終便會確認所有點。故得證。 □

故接下來的討論給定底面爲 s 邊形的條件。

2.4.3 遞迴形式

可以想像這是一個使用遞迴的問題，每一次投影將情況圖 G 轉成很多種可能的新情況圖的集合 $\{G'\}$，而最佳的策略使用貪心法。先找出不同角度的投影方向下所產生的最糟情況，再找出這些最糟狀況裡所需最少次數（最好）的，然後選擇那個角度進行下一次投影。可以寫成遞迴形式，其狀態轉移方程式爲

$$f(G) = \min\{\max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \leq \theta \leq 2\pi\} + 1。$$

max 代表每個角度的投影可能產生的最糟狀況所需的投影次數，然後 min 表示每個角度對應的 max 裡面最小的那一個（最好），最後加 1 爲此次投影。

定理 5. 分析最糟情況時可以用遞迴，其狀態轉移方程式爲

$$f(G) = \min\{\max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\}|0 \leq \theta \leq 2\pi\} + 1。$$

2.4.4 G 爲 $K \geq 2$，標準且唯一

定理 6. 對於 $K \geq 2$，G 爲標準且唯一狀態，$f(G)$ 的通式爲

$$f(G) = \sum_{i=1}^{n} f_1(a_i), \quad f_1(a_i) = \begin{cases} [\log_2(a_i - 1)] & ,2 \nmid a_i \\ 0 & ,2 \mid a_i \end{cases} 。$$

證明.

因爲情況圖 G 爲標準且唯一狀態，所有頂點都已經在邊界上且每次投影只需考慮一條線，爲最基礎的情況。此情況下由於每一條線只會影響單一區域，且區域內所存在的頂點的數量可被算出（又因爲標準狀態，取決於該區域的邊數），因此每個區域是互相獨立的。於是分別算出還原每個區域的所需保證次數，即 f_1，再累加即爲 $f(G)$。我將證明 f_1 的取值方式就如命題所述一樣。

令該區域的邊數爲 e。e 爲偶數時由點佔線原理即知 f_1 的值爲 0，參見圖 21。於是接下來只探討 e 爲奇數的情況。注意到若區內未知頂點個數爲 k，根據條件會知道 e 爲 $2k+1$ 或 $2k+2$，故若只討論 e 爲奇數，相當於討論 k 爲任意數。使用強數學歸納法，對 k進行歸納，$k = 1$（即 $e = 3$）的時候由圖 22 知命題成立，假設 $k \leq p-1$ 的時候命題皆成立，考量 $k = p$（即 $e = 2p+1$）的情況。

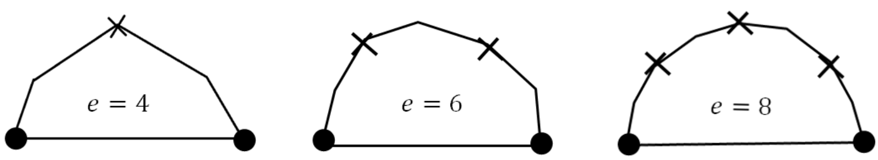


圖 21

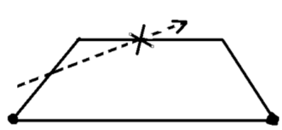


圖 22．取對角線方向投影即可得該未知點位置，故 f_1 值爲 1 符合命題。

若投影方向是規則的，有三種情況：確認兩頂點、區域邊數 +1、確認一頂點。如果是區域邊數 +1 則區域邊數成爲偶數，由點佔線即知道所有頂點位置，故其 f_1 值爲 1。其餘兩種情況皆有確認頂點，注意到一張標準且唯一的情況圖在任意投影後所產生的情況圖仍然是標準且唯一，於是至少確認一頂點將原本的區域分割成小區域後，便可以套用歸納假設。參見圖 23。

假設該方向平行 $\overline{V_iV_{i+2}}$，且確認一頂點 V_{i+1}，需要次數爲

$$f_1(i+1)+f_1(e-i-1)。$$

假設該方向平行 $\overline{V_iV_{i+2}}$，且確認兩頂點 V_i, V_{i+2}，需要次數爲

$$f_1(i)+f_1(e-i-2)。$$

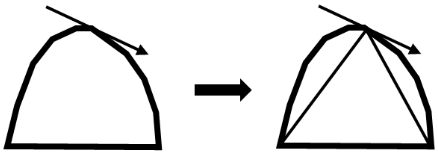


圖 23

由於對稱性不妨假設 $i \le p-1$，則 i 爲偶數時後者將需要次數較大，奇數時前者較大。

若投影方向是不規則的，有兩種情況：區域邊數 $+1$ 和確認一頂點。注意到確認一頂點有兩種可能，但兩種可能必相鄰，也就是確認的頂點爲 V_i 或者 V_{i+1}，由對稱性不妨假設 $i \le p$，不難知道標號爲偶數的那一點其值較大。然而確認一偶數標號點的狀況，與取 $\overline{V_iV_{i+2}}$ 方向（i 爲奇數）所產生的確認一頂點情況相同，根據前面討論知道此狀況是 $\overline{V_iV_{i+2}}$方向下的最糟狀況，因此不規則方向投影的最糟狀況恆與某一規則方向的最糟狀況一樣。此結論意即使用 **定理** 5 時只需考慮規則方向，因爲不規則方向會同時被考量進去。於是有

$$f_1(e)=\min\{\max\{f_1(i)+f_1(e-i-2), f_1(i+1)+f_1(e-i-1)\}|0\le i\le e-2\}+1，$$

$$即 \quad f_1(e)=\log_2[e-1]。$$

從上述知道 $e=2p+1$ 時原命題仍然成立，故 $k=p$ 時成立，由數學歸納法得證。 □

2.4.5 G 爲 $K \ge 2$，唯一且非標準狀態

定理 7. 對於 $K \ge 2$, G 爲唯一且非標準狀態，$f(G)=f_2(k,n)$ 的通式爲

$$f_2(k,n)=n+3k-2-\sum_{i=1}^{n}(a_i-2)=3n+3k-2-\sum_{i=1}^{n}a_i。$$

證明. 先證明三個引理。 □

引理 7.1. 若 $k>1$，則任意投影方向下皆有可能使得唯一且非標準的情況圖投影後仍爲唯一且非標準。

證明.

若該投影方向可以交區域於兩邊，區域邊數加一，而不形成標準狀態則滿足原命題，故只需考慮投影方向所影響的區域邊數爲偶數，且 $min(G)=K+k-1$ 的情況，此時若區域邊數加一會導致 $min(G)=K+k$，成爲標準狀態。若不是區域邊數加一的情況，則可能爲該投影消除一個區域（圖 24）或者該投影有確認頂點。

若爲消除一個區域的情況，並不影響 $min(G)$ 故投影後仍爲唯一且非標準。

若是有確認頂點的情況，對於規則方向 $\overline{V_iV_{i+2}}$（由對稱性不妨假設 $i<e/2$），若 i 爲偶數則確認兩頂點會滿足投影後仍然是唯一且非標準，若 i 爲奇數則確認一頂點的情況可以滿足；如果是不規則方向則確認的頂點的可能是相鄰的兩點，必有一點爲偶數點，則確認偶數標號頂點的狀況與 i 爲奇數時確認一頂點的情況相同。

綜上所述，不論如何投影後的情況圖仍有可能是唯一且非標準，故得證。 □

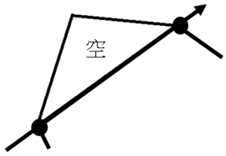


圖 24．可能一次少一整個區域，因爲該區內無點。

引理 7.2. 若原命題在 $k \le p-1$ 皆成立，則數對 $(p,1)$ 滿足原命題。

證明.

由 **定理** 1 知道區域邊數總和至多爲 $2p$。在區域邊數爲 $2p$ 時，由 **引理** 7.1 知道任意投影方向都可能產生唯一且非標準的情況，由於不能增加邊數（會產生標準狀態），必至少確認一頂點變成 $k \le p-1$ 的情況，根據引理的假設可以用原命題計算次數。接下來分析各種可能的情況。

- 不規則方向投影

  根據 **引理** 7.1 的結論投影後可能成爲唯一且非標準，利用對稱性，不妨假設爲確認一個偶數標號頂點，參見圖 25。由於區域數變成 2，且確認一點使得 $k = p-1$，且投影前後區域邊數總和不變，用歸納假設可以得到總共所需次數爲

  $$1+6+3(p-1)-2-\sum_{i=1}^{2} a_i' = 2+3p-a \text{。}$$

  其中 a 爲原本的區域邊數總和（在此同時爲 $2p$）。從這裡可以看出任意不規則方向投影下的最糟狀況次數必大等於 $2+3p-a$。

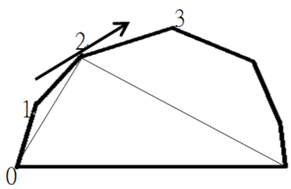
  

  圖 25

  也就是對任意不規則方向（角度 θ），有

  $$1+\max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} \ge 2+3p-a \text{。} \tag{1}$$

- 規則方向投影

  根據 **引理** 7.1 的結論投影後可能成爲唯一且非標準，可分爲確認一偶數點與確認兩個偶數點的情況，若爲前者則爲 $2+3p-a$，若爲後者則又可分爲兩種情況：其中一點爲標號 0 的點（被重複確認）和其他情況。參見圖 26。

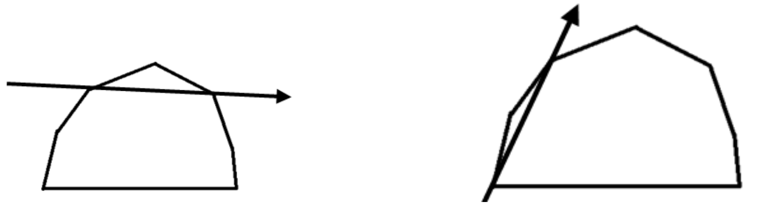
  於是對於任意規則方向（角度 θ），有

  $$1+\max\{f(P)|P \in v_\theta(G)\} \ge 1+3p-a \text{。} \tag{2}$$

  現在特別查看規則方向 $\overline{V_0V_2}$，以此方向投影可能有三種情況。參見圖 27。

  最多次應是 $1+3p-a$，因爲 a 爲偶數且大等於 2，下面不等式顯然成立

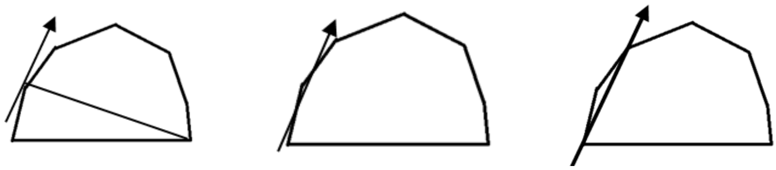
  $$[\log_2(a)] \le 1+3p-a = 1+\frac{a}{2} \text{。}$$



(a) $1+6+3(p-2)-2-\sum_{i=1}^{2}a'_i$
$=-1+3p-(a-2)=1+3p-a$。

(b) $1+3+3(p-2)-2-\sum_{i=1}^{2}a'_i$
$=-1+3p-(a-2)=1+3p-a$。

圖 26



(a) $[\log_2(a-2)]$ (b) $[\log_2(a)]$ (c) $1+3p-a$

圖 27 (a)、(b)皆產生標準狀態，使用 **定理** 6，(c) 圖 26 已討論

於是對 $\overline{V_0V_2}$ 方向（角度 θ）有

$$1+\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}=1+3p-a。\tag{3}$$

(1) (2) (3) 三式不難知道應用 **定理** 5 後的結果

$$1+\min\{\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}|0\le\theta\le 2\pi\}=1+3p-a。$$

於是當 $(k,n)=(p,1)$，且區域邊數總和為 $2p$ 時滿足原命題。

對區域邊數歸納，假設區域邊數 $\ge r+1$ 時成立，則區域邊數為 r 的狀況根據 **引理** 7.1 在投影後可能變成唯一且非標準，即沒確認任何點，變成區域邊數 $r+1$ 的情況，根據歸納假設還需要 $1+3p-(r+1)$ 次投影，對任意投影方向（角度 θ）有

$$1+\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}\ge 1+3p-r。$$

同樣特別查看規則方向 $\overline{V_0V_2}$，有三種可能狀況，且皆為唯一且非標準，分別列出次數後為 $1+3p-r$、$1+3p-r$、$3p-r$。在 $\overline{V_0V_2}$ 方向（角度 θ）有

$$1+\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}=1+3p-r。\tag{4}$$

綜合 (4) 再根據 **定理** 5 有

$$1+\min\{\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}|0\le\theta\le 2\pi\}=1+3p-r。$$

於是仍然滿足原命題，根據數學歸納法，**引理** 7.2 得證。

□

引理 7.3. 若原命題在數對 (p,n)，$n\le q-1$ 時皆成立，則數對 (p,q) 滿足原命題。

證明.

由 **定理** 1 知道區域邊數總和至多爲 $2p+2q-2$。在區域邊數爲 $2p+2q-2$ 時，由**引理** 7.1 知道任意投影方向可能產生唯一且非標準的情況，由於不能增加邊數（會產生標準狀態），必至少確認一頂點變成 $k \le p-1$ 或者是消除一個區域（圖 24）使得 $n \le q-1$，根據引理的假設不論何者皆可用原命題計算次數。接下來分析各種可能的情況。

- 不規則方向投影

  唯一且非標準的狀況爲確認一偶數標號頂點，並把區域數加一的狀況，次數爲 $1+3(q+1)+3(p-1)-2-(2p+2q-2)=q+p+1$ 次。

- 規則方向投影

  唯一且非標準的狀況爲確認一頂點，或確認兩頂點，或者直接消除一個區域的狀況，其中確認兩頂點的狀況又可分成兩種，與證明**引理** 7.2 時類似。

  – 確認一偶數標號頂點（與不規則方向相同）：

  $$q+p+1。$$

  – 確認兩偶數標號頂點（兩新頂點）：

  $$1+3(q+1)+3(p-2)-2-(2p+2q-4)=q+p。$$

  – 確認兩偶數標號頂點（一新頂點）：

  $$1+3q+3(p-1)-2-(2p+2q-4)=q+p。$$

  – 直接消除一個區域（無確認點）：

  $$1+3(q-1)+3p-2-(2p+2q-4)=q+p。$$

  於是對任意投影方向（角度 θ）皆有

  $$1+max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}\ge q+p。$$

  選擇任一區域，同樣觀察規則方向 $\overline{V_0V_2}$ 的三種可能，最後要證明的式子是

  $$[\log_2(a)]\le q+p。$$

  其中 a 爲該區域的區域邊數，於是 $a\le 2p+2q-2$（總區域邊數），於是有

  $$[\log_2(a)]\le 1+\frac{a}{2}\le q+p。$$

  $a\ge 0$ 且爲偶數故此式成立，於是對於規則方向 $\overline{V_0V_2}$（角度 θ）有

  $$1+\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}=q+p。$$

  由 **定理** 5 有

  $$1+\min\{\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}|0\le\theta\le 2\pi\}=q+p。$$

  於是當 $(k,n)=(p,q)$ 時且區域邊數總和爲 $2p+2q-2$ 時原命題成立。

  對區域邊數歸納，現在假設當 $(k,n)=(p,q)$ 且區域邊數總和 $\ge r+1$ 時原命題皆成立，考慮區域總和爲 r 的情況，根據 **引理** 7.1 在投影後可能變成唯一且非標準，即產生下列狀況之一：消除一整個區域，確認一偶數頂點，確認兩偶數頂點（又分爲兩種）、把某區域邊數加一，不論何者根據引理的假設都可以計算。

– 消除一整個區域：

$$1+3(q-1)+3p-2-(r-2)=3q+3p-2-r。$$

– 確認一偶數頂點：

$$1+3(q+1)+3(p-1)-2-r=3q+3p-1-r。$$

– 確認兩偶數標號頂點（兩新頂點）：

$$1+3(q+1)+3(p-2)-2-(r-2)=3q+3p-2-r。$$

– 確認兩偶數標號頂點（一新頂點）：

$$1+3q+3(p-1)-2-(r-2)=3q+3p-2-r。$$

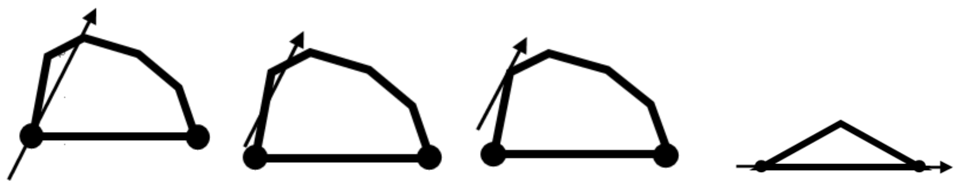
– 把某區域邊數加一：

$$1+3q+3p-2-(r+1)=3q+3p-2-r。$$

於是對任意投影方向（角度 θ）皆有

$$1+\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}\geq 3q+3p-2-r。$$

於區域邊數總和 $<2p+2q-2$，所以必可以找到一區域使得其區域邊數加一後情況圖 G 仍然爲唯一且非標準狀態，挑選該區域的規則方向 $\overline{V_0V_2}$，並分析可能的四種狀況。（圖 28 僅畫出被挑選的那個區域）



(a) 仍爲唯一且非標準狀態，$3q+3p-2-r$ 次。

(b) 仍爲唯一且非標準狀態，$3q+3p-2-r$ 次。

(c) 仍爲唯一且非標準狀態。由點佔線原理的計算不難知道，若區域邊數加一仍然爲非標準狀態，則此情況也是非標準狀態，$3q+3p-1-r$ 次。

(d) 仍爲唯一且非標準狀態，$3q+3p-2-r$ 次。

圖 28

於是對於該區域的規則方向 $\overline{V_0V_2}$（角度 θ）有

$$1+\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}=3q+3p-r-2。$$

由 **定理** 6 有

$$1+\min\{\max\{f(P)|P\in v_\theta(G)\}|0\leq\theta\leq 2\pi\}=3q+3p-2-r。$$

由數學歸納法，數對 (p,q) 滿足原命題，**引理** 7.3 得證。

□

有了上面三個引理，現在回到 **定理** 7 的證明。

證明.
使用巢狀的數學歸納法，先對 k 進行歸納，$k = 1$ 時，即 $(k,n) = (1,n)$，區域邊數必全部爲 2（因爲 G 非標準狀態），注意到由於唯一狀態，一次投影只能影響一個區域，最糟情況爲，把每個區域都用投影探查一次，然後在最後一個區域發現未知頂點，再用一次投影確認其位置，共需 $n+1$ 次。在 圖 29 中，$(1,n)$ 套入式子後得到 $n+1$ 故數對 $(1,n)$ 滿足原命題。

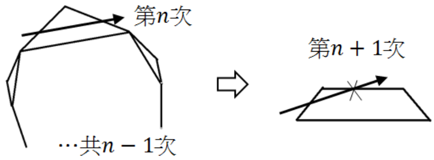


圖 29

$k=1$ 時由上述討論原命題成立，假設原命題在 $k \le p-1$ 皆成立，歸納步驟需證明 $k=p$ 時原命題成立，即數對 (p,n) 滿足原命題。此時對第二個變數 n 進行歸納，$n=1$ 時由 **引理** 7.2 知原命題成立，接下來的歸納步驟即 **引理** 7.3。於是根據歸納法（對 n 的）知道數對 (p,n) 滿足原命題。於是再根據歸納法（對 k 的）知道任意數對 (k,n) 滿足原命題。故得證。 □

2.4.6 還原 s 角柱(錐)

定理 8. 保證還原 s 角柱（錐）至少需要次數爲

$$f_3(s) = 3s-4, \forall s \ge 3, s \in \mathbb{N}。$$

證明. 先證明一個引理。 □

引理 8.1. 對於任何 $K \ge 1$ 的情況圖 G，都有

$$f(G) \le 3n+3k-2-\sum_{i=1}^{n} a_i$$

證明.
考慮以下還原策略，對於 G 非唯一狀態，直接將對唯一狀態的策略套用，可以想像每次投影皆只採用一條投影線，把它當成唯一狀態的圖操作，這樣的方法對 $K \ge 2$ 時有效，而 $K=1$ 時則想像是 $K=2$ 之退化情形，即那兩個點非常非常之靠近，於是也可套用此方法。由於此法必可還原情況圖 G，於是 $f(G)$ 必小於等於此策略所使用的操作次數，而這個數字取決於情況圖 G 是否爲標準狀態。根據 **定理** 6 與 **定理** 7，需要次數分別爲

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(a_i),\quad f_1(a_i) = \begin{cases} \lceil \log_2(a_i-1) \rceil & ,2 \nmid a_i \\ 0 & ,2 \mid a_i \end{cases} \quad 與 \quad f_2(n,k) = 3n+3k-2-\sum_{i=1}^{n} a_i。$$

所以只要證明當 G 爲標準狀態時有

$$\sum_{1,2\nmid a_i}^{n} \lceil \log_2(a_i-1) \rceil \le 3n+3k-2-\sum_{i=1}^{n} a_i。 \tag{5}$$

令 n 個區域中有 u 個區域其區域邊數奇數，v 個爲偶數；又 G 爲標準狀態，故

$$k = \min(G) = \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{a_i-1}{2} \right\rceil$$

這式子以點占線原理可以算出。可以列出有

$$\sum_{1,2\nmid a_i}^{n} [\log_2(a_i-1)] \le \sum_{1,2\nmid a_i}^{n} \left(1+\frac{a_i-1}{2}\right) = u + \sum_{1,2\nmid a_i}^{n} \frac{a_i-1}{2}。 \tag{6}$$

$$2k - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - u - 2v - \sum_{i=1}^{n} a_i = -2n + u。 \tag{7}$$

利用 (6) (7)，於是 (5) 變成

$$\sum_{1,2\nmid a_i}^{n} \frac{a_i-1}{2} = \sum_{1,2\nmid a_i}^{n} \frac{a_i}{2} - \frac{u}{2} \le n+k-2。$$

把 $k = min(G)$ 寫成與 a_i 相關的式子並縮小：

$$k = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2} - \frac{u}{2} - v \ge \sum_{1,2\nmid a_i}^{n} \frac{a_i}{2} - \frac{u}{2} - v。$$

把此不等式代回 (7) 並移項後變成

$$v+2 \le n$$

這說明只需再分析 $v = n-1$ 與 $v = n$ 的情況也成立即可，後者由於全部都是偶數區域邊數，帶入 **定理** 6 時得到 0，明顯成立；前者代表 $u = 1$，於是要證明

$$[\log_2(a_i-1)] \le n+k-1。$$

其中 a 是一個奇數，爲該區（$u = 1$）的區域邊數。事實上有

$$[\log_2(a_i-1)] \le \left[\frac{a-1}{2}\right] \le k。$$

因爲 $a \ge 3$ 且爲奇數，又 $n \ge 1$，此情況也成立，**引理** 8.1 得證。 □

回到 **定理** 8 的證明。

證明. 在投影過程中一次最多確認四個點（兩條投影線，每條一次最多確認兩個），可以將情況分爲三種並分別幫三種情況制定一套策略：

- 過程中皆無確認點直到最後一步

  無確認點即無三線共點（**定理** 2），於是灰色區域（可能解區域）在每一次投影後邊數必增加2，且根據 **定理** 1（點佔線）可能區域至多爲 $2s$ 邊形。經過 s 次投影形成 $2s$ 邊形，此時再投影一次，由於邊數不能再增加，必確認至少一點，再由原本的 $2s$ 邊形配合點占線原理找出剩下所有頂點的位置。於是此狀況下總共需要 $s+1$ 步。

- 過程中有一步確認一點形成 $K = 1$ 的情況

  過程中在一步後確認一點形成 $K = 1$ 之後套入針對唯一狀態的策略可以保證完全還原。假設在第 $r+1$ 步確認一點，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲 $K = 1, k = s-1, n = 1$，區域邊數 $2r+1$。注意到 $r \ge 2$，因爲前兩步不會發生此情況。由 **引理** 8.1 知道

  $$f_3(s) \le r+1+f_2(s-1,1) = 3s-r-2 \le 3s-4。$$

- 過程中有一步確認兩點以上形成 $K \ge 2$ 的情況，其中有一條投影線確認兩頂點

  此次投影只取確認兩點的一條投影線，確認的兩頂點在新情況圖裡必相鄰，假設在第 $r+1$ 步發生，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲 $K = 2, k = s-2, n = 1$，區域邊數 $2r-1$。由 **引理** 8.1 知道

  $$f_3(s) \le r+1+f_2(s-2,1) = 3s-r-3 \le 3s-5。$$

- 過程中有一步確認兩點形成 $K = 2$ 的情況，兩條投影線各確認一頂點

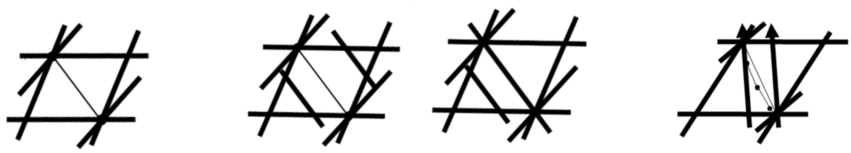
  若兩確認點在情況圖裡不相鄰，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲：$K = 2, k = s-2, n = 2$，區域邊數總和 $2r$。由 **引理** 8.1 知道

  $$f_3(s) \leq r + 1 + f_2(s-2, 2) = 3s - r - 1 \leq 3s - 3。$$

  若兩確認點在情況圖裡相鄰，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲：$K = 2, k = s-2, n = 1$，區域邊數 $2r-1$。由 **引理** 8.1 知道

  $$f_3(s) \leq r + 1 + f_2(s-2, 1) = 3s - r - 3 \leq 3s - 5。$$

  特別考慮達到 $3s-3$ 的情況應在三步後如圖 30(a) 所示。



(a) (b) (c)

圖 30

爲了改進其估計，此時作對角線方向（兩確認點連線方向）的投影，有兩種可能，再對這兩種可能進行估計，參見圖 30(b)。做完此第四次投影後再使用 **引理** 8.1 可以得到所需次數皆爲 $3s-4$ 次，於是 $3s-3$ 的次數被優化了。

綜上討論，有

$$f_3(s) \leq 3s - 4$$

只需再證明

$$f_3(s) \geq 3s - 4$$

證明方法是構造一個至少需要 $3s-4$ 次來還原的糟糕圖形。考慮任意三次投影後必可以產生圖 30(b) 的狀況，此時第四次投影必須選擇平行對角線方向，否則本體可能爲狹長狀而浪費該次投影（圖 30(c) 的箭頭方向）。注意到圖 30(b) 的右圖是在四次投影後必可能產生的狀況，又其爲一個唯一狀態的圖，且若 $s > 3$ 則該圖爲非標準狀態，故可以使用 **定理** 7，得到至少需要 $3s-4$ 次才能保證還原。

於是 $s > 3$ 時命題皆成立，又根據 **結果** 1 命題在 $s = 3$ 也成立，故原命題得證。 □

2.5 水平投影下還原角柱（錐）的策略

定理 8 只能用在已知底面爲 s 邊形情況下，在不知道底面任何條件的情況下，仿照 **定理** 8 的概念建構以下還原策略 P：

確認某一個點後，不斷選擇某一區域的 $\overline{V_0V_2}$ 方向投影直到區域數變成 0。

定理 9. 假設底面實際上爲 s 邊形，使用 P 策略保證在 $3s-2$ 次投影內還原。

證明. 先證明一個引理。 □

引理 9.1. 對於一個區域，以 P 策略將該區域還原需要次數 $\leq 3k+3-a$，其中 a 爲區域邊數，k 爲實際上區域內的頂點個數。

證明.

對 k 做歸納法，$k=0$ 時，邊數至多爲 2，只需要一次投影即可得知，即 $k=0$ 符合原命題。假設命題對 $k \leq p-1$皆成立，考慮 $k=p$ 且有 a 條邊的情況。根據 P策略，假設在確認第一個頂點前用了 r 次投影，則確認完第一個頂點後區域的資訊應爲 $k'=p-1, a'=a+r-2$。使用歸納假設得到

$$\text{次數 } \leq r+1+3(p-1)+3-(a+r-2)=3p+3-a\text{。}$$

由數學歸納法得證。 □

回到 **定理** 9 的證明。

證明. 與 **定理** 8 中一樣將過程分類成那四種並分別套用 **引理** 9.1。

- 過程中皆無確認點

  策略過程要求至少確認一個點，故無此狀況。

- 過程中有一步確認一點形成 $K=1$ 的情況

  假設在第 $r+1$ 步確認一點，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲 $K=1, k=s-1, n=1$，區域邊數 $2r+1$。由 **引理** 9.1 知道

  $$\text{次數 } \leq r+1+3(s-1)+3-(2r+1)=3s-r\leq 3s-2\text{。}$$

- 過程中有一步確認兩點以上形成 $K\geq 2$ 的情況，其中有一條投影線確認兩頂點

  此次投影只取確認兩點的一條投影線，確認的兩頂點在新情況圖裡必相鄰，假設在第 $r+1$ 步發生，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲 $K=2, k=s-2, n=1$，區域邊數 $2r-1$。由 **引理** 9.1 知道

  $$\text{次數 } \leq r+1+3(s-2)+3-(2r-1)=3s-r-1\leq 3s-3\text{。}$$

- 過程中有一步確認兩點形成 $K=2$ 的情況，兩條投影線各確認一頂點

  若兩確認點在情況圖裡不相鄰，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲：$K=2, k=s-2, n=2$，區域邊數總和 $2r$。令兩區域分別有 x, y 個頂點和 z, w 條邊，由 **引理** 9.1 知道

  $$\text{次數 } \leq r+1+3x+3-w+3y+3-z=3s-r+1\leq 3s-1\text{。}$$

  若兩確認點在情況圖裡相鄰，可推算第 $r+1$ 步結束後的資訊爲：$K=2, k=s-2, n=1$，區域邊數 $2r-1$。由 **引理** 9.1 知道

  $$\text{次數 } \leq r+1+3(s-2)+3-(2r-1)=3s-r-1\leq 3s-3\text{。}$$

  同樣對 $3s-1$ 進行優化，優化過程與 **定理** 8 相同，需要次數（圖 30(b)）分別爲 $3s-2, 3s-2$ 次。

□

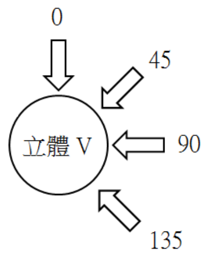


圖 31

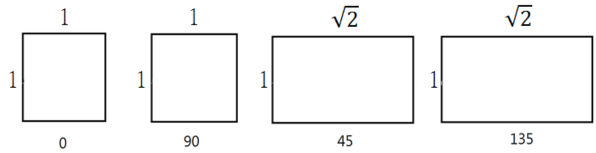


圖 32

3　以投影還原凸多面體的策略的相關探討

3.1　任意投影完全還原凸多面體之充要條件

在某些情況下，用有限個投影是有可能還原一個凸多面體的，例如從圖 31 中的四個方向投影，並分別得到圖 32 中四個影子的情況下，可以推論出該未知物體 V 必定是個單位正方體。

說明：由 0 度和 90 度方向的投影知道未知物體 V 的範圍被侷限在圖 33 的單位正方體之中。反過來假設未知物體 V 不是該正方體，由於 V 是凸多面體，故在單位正方體的八個頂點之中必有一頂點落在 V 外，但是由圖 34 可知必與 45 度和 135 度方向的兩個投影矛盾。故此情況下被唯一確定了。

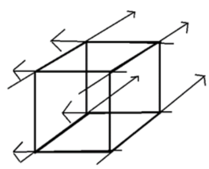


圖 33

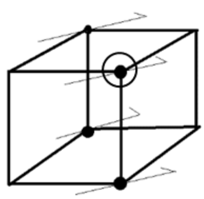


圖 34．不妨假設圖中被圈起的頂點在 V 之外，那麼 45 或 135 方向兩個方向之中其中一個在該處不會產生影子，不可能產生如圖 32 的長方形影子（會缺一角）

從這個例子可以發現有限個投影在某些情況下是可以唯一確定某個凸多面體的，而且立體被確定的條件即是所有頂點都被「固定」住了，也就是說存在一部分投影所圍出的凸多面體的所有頂點都被某條投影線通過而且該投影線只經過該點，此時便可如上述方法反證該未知凸多面體被完全還原了。

那如果已知有限個投影完全還原了未知立體，必能在這有限個投影中發現上述情況嗎？答案

是肯定的，對於該未知凸多面體的某一頂點 A，考慮頂點 A不符上述條件，把頂點 A 移除極小一角，並不矛盾任何投影的結果而產生新立體，儘管誤差極小但仍不是完全還原，於是便有下面定理。

定理 10. 有限個投影還原凸多面體之充要條件爲：存在一部分投影所圍成的多面體區域，其每一個頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。

3.2 任意投影還原凸多面體之策略

定理 11. （**定理** *1* 的立體版本）若投影爲一個 $2D$ 多邊形，則通過多邊形的頂點的投影線上至少通過原立體的一個頂點。參見圖 *35*。

證明.

可以想像將投影視爲無限條同一方向的線所組成，分成無限多層。對於一個投影的某一頂點，考慮一條線使得該線只交投影於該頂點，參見圖 36。將投影依這條線的方向分層，則多邊形的頂點自成一層，意即將原立體分層後，此層只投影出一個點。於是這一層的情況爲一條邊或者一個點，不論何者皆滿足原命題，故得證。 □

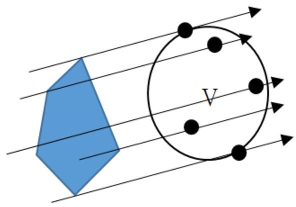


圖 35

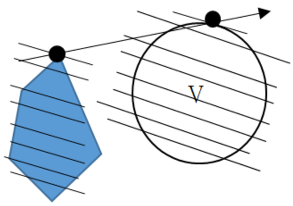


圖 36

若已知某條投影線上通過一原立體頂點，再使用一次投影就可以找到該頂點位置，如圖 37 所示，對這樣確認的方法稱其爲一次 Q 操作。

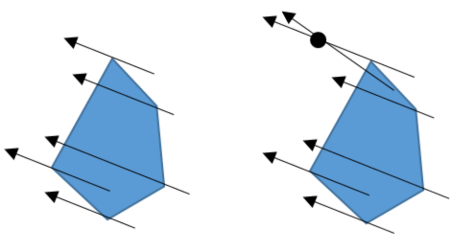


圖 37

現制定一策略 Q 如下。

> **第一階段：根據第一次投影（m 邊形），用 Q 操作把 m 個頂點找出。**
> **第二階段：畫出所有已確認頂點的凸包，平行凸包的每一個面的方向做投影，若發現新頂點則使用 Q 操作將其找出，更新凸包，重複第二階段直到無發現新頂點。過程中若有兩次投影方向平行同一個面，則不要重複投影。**

定理 12. 假設立體實際上有 s 個頂點，使用 Q 策略保證在 $4s-7$ 次投影內還原。

證明.

首先證明這是一個完全還原的策略。

策略結束時，已確認頂點形成一個凸包 A 且取平行 A 的每一個面方向的投影皆無發現新點，意即這些投影所圍成的多面體區域即爲 A，又每一個已確認頂點以 Q 操作找出時，只被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。根據 **定理** 10，Q 策略完全還原該立體。

再來證明 Q 策略結束時投影次數 $\leq 4s-7$。將兩個階段的次數分開計算。

在第一次投影後，得到一多邊形投影（m 邊形），根據 **定理** 11，發現 m 個頂點。找出該多邊形投影的最長對角線，不妨將其擺爲垂直方向再使用 Q 操作，即可一次確認兩個頂點。對剩下 $m-2$ 個點使用 Q 操作，故投影次數爲 $1+1+m-2=m$ 次。

第二階段的投影根據其產生結果可分爲三類，沒有發現新點、有發現新點、發現新點後追加的一次投影（Q 操作）。將後兩者共兩次投影，對應至發現之新點，將第一個對應至平行該投影方向的面。注意到同一個頂點不會被發現兩次（不會對應到兩次），且同一個面不會被對應兩次（平行同一個面不重複投影）。

$$\text{第二階段投影次數 } \leq 2(s-m)+ \text{ 面數。}$$

令原立體有 E 條邊，F 個面，由歐拉定理有

$$s-E+F=2\text{。}$$

又每個面至少有三條邊，而每條邊在此計算方式下恰好被算兩次

$$2E \geq 3F\text{，}$$

$$s+F=E+2\geq 3/2F+2\text{，}$$
$$F\leq 2s-4\text{。}$$

第二階段投影次數 $\leq 2(s-m)+F\leq 2(s-m)+2s-4$。

總投影次數 $\leq m+2(s-m)+F\leq 2(s-m)+2s-4\leq 4s-m-4$。

注意到 $m\geq 3$，綜上，於是原命題成立。 □

4 結論

4.1 重要結果

定理 3：水平投影下最少s次便可能完全還原 s 角柱（錐）。（最佳狀況）

定理 8：水平投影保證還原 s 角柱（錐）至少需要次數爲

$$f_3(s)=3s-4, \forall s\geq 3, s\in\mathbb{N}\text{。}$$

定理 9：水平投影還原角柱、角錐體，假設底面實際上爲 s 邊形，使用 P 策略保證在 $3s-2$ 次投影內還原。

定理 10：有限個投影還原凸多面體之充要條件爲：存在一部分投影所圍成的多面體區域，其每一個頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。

定理 12：任意投影還原凸多面體，假設立體實際上有 s 個頂點，使用 Q 策略保證在 $4s-7$ 次投影內還原。

4.2 討論與運用

可以看出還原 s 角柱（錐）時，唯一狀態把非唯一狀態的狀況給蓋過去了，因爲唯一狀態的情況圖所需次數較多，但是若單純討論最差狀況下還原任意非唯一狀態的情況圖時，本文並沒有找出其最少次數，即類似 **定理 6** 和 **定理 7** 的通式。在過程中也可以看出規則方向投影所給予的條件較多，因此皆選擇規則方向去投影會較有效率，所需總次數較少。若要分析非柱錐體的情況，也必須定義出類似的資訊（例如本文中的區域數，區域邊數），如何去找出需要哪些資訊，又該如何去定義那些資訊，事實上是整個研究開始時的難點所在。

此問題最有趣之處在於其最佳與最差狀況下的還原次數，未來希望能夠找到分析多面體的方法，進而導出多面體最佳/最差狀況的通式。如此一來便可以以一套完整的策略更快速的建立一些多面體的 3D 模型。關於此方面的研究可以用來改進現有演算法的策略，希望在未來可以結合現有方法應用於各種領域。

4.3 總結

本文中給出了完全還原所需之條件以及探討了最基礎的多面體—柱體與錐體的完全還原策略以及凸多面體的還原策略。使用水平投影來還原角柱和角錐時，導出了最佳以及最差狀況下的還原次數，並制定一套策略。最後也制定一套還原凸多面體的策略。

參考文獻

[1] 張垚，數學奧林匹亞小叢書，高中卷11組合數學，九章出版社。

作品評語

張鎮華教授
國立臺灣大學數學系

2D 影像與 3D 模型間的轉換，在理論及實用上都是重要的問題。這篇文章的主要研究目標有二：（1）以水平投影還原角柱體、角錐體之策略的相關探討，（2）以投影還原凸多面體的策略的相關探討。本文對各種情況進行分析，探討完全還原立體所需之條件，以及還原角柱體、角錐體下的最佳與最差狀況，並提出對於特定情況下的還原策略。

文章首先給出了從 2D 投影完全還原 3D 立體所需之條件：「存在一些投影所圍成的區域，其所有頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只通過該點」。接著探討了最基礎的多面體—角柱體與角錐體的完全還原策略，得到了極佳的結果，包括「水平投影還原角柱體、角錐體，假設底面實際上爲 s 邊形，使用 P 策略保證在 $3s-2$ 次投影內還原。」、「有限個投影還原凸多面體之充要條件爲：存在一部分投影所圍成的多面體區域，其每一個頂點都被某條投影線通過，而且該投影線只經過該點。」、「任意投影還原凸多面體，假設立體實際上有 s 個頂點，使用 Q 策略保證在 $4s-7$ 次投影內還原。」

整體來說，本文得到的結論極佳，所使用的手法有相當的深度，是一篇優秀的文章。