

掌握玄機—骰子各面出現機率之剖析

國立新竹高級中學 林紘睿

指導老師 張世標

中文摘要

本文跳脫對骰子和硬幣的既有印象，先討論正 n 角柱體、正稜台及角錐柱體，觀察改變高度及重心時機率的變化；也比較圓柱體用三維與二維空間理論所算出機率的相同；此外，也在攝影機下觀察三維空間理論的可行性。

接下來，將我們熟知的正多面體截角，觀察與機率的關係，可以找出不等面的公平骰子。其中在最大截角後，發現對偶正多面體會變成相同的多面體。

將正多面體藉由面心及稜線中心延長來增加頂點，只要依照本文所找出的規則，也可產生等面的公平骰子；將正八面體及正二十面體的部份頂點向外接球半徑方向延伸，此時可產生相同頂點數的不等面公平骰子。再一次發現對偶正多面體可以變成相同的多面體。

如果要產生指定機率的骰子，只要控制正四面體稜台高度或是正多面體面心延伸再截角時的深度都可達到。最後，利用頂點軸線的轉動、或面對角線的截面，也可以在不增加頂點數時產生公平骰子。

其實立體的變化可用康威多面體表示法將其系統化，本文將研究其中的一些運算，並觀察其機率的變化。

壹、研究動機

在第 52 屆全國科展"旋轉硬幣的機率"(參考〔一〕)中，用有厚度的錢幣為出發點，探討在垂直錢幣圓心的向旋轉時，正面、反面及側面各面出現的機率分佈，但實際上錢幣一定是各方向都有的三維方向旋轉，所以應該用三維空間的立體角（即 4π ）而非一維的 2π 。在高中數學第三冊中提及機率的觀念，第四冊第一章中介紹立體幾何的一些性質，我思考如何結合這些內容來解決問題。

目前一般大眾熟知的骰子每一面都是相同的，是否能找出不同面的公平骰子，甚至指定機率的骰子，是我們的研究方向。

貳、研究目的

- 一、探討骰子出現各面的機率。
- 二、探討非均質骰子（即重心可移動時），所有面機率與移動量的相對關係。
- 三、探討同一類型骰子在形狀改變時，機率如何演變。
- 四、探討形狀改變時，不同骰子的機率如何演變。
- 五、探討由正多面體延伸出來每面機率相同的骰子。

參、研究設備與器材

電腦軟體 Wolfram Mathematica、Cabri 3D。

肆、研究過程或方法

名詞定義與預備知識

(一) 立體角：

立體角是從多面體重心對多面體投影到以多面體重心為圓心所張出的球殼面積與球半徑平方值的比，這和在二維中「平面角是圓的弧長與半徑的比」類似。

對極小立體角作曲面積分即可得立體角

灰色環形面積為 $(2\pi * r \sin\theta) * (r * d\theta)$ ，

圓弧形面積 S 為 $2\pi r^2 \int_0^\theta \sin\theta d\theta = 2\pi r^2 (1 - \cos\theta)$ ，

此時立體角 $\omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi(1 - \cos\theta)$ ，

所以球面（三度空間）立體角為 4π （當 $\theta = \pi$ ）。

(二) 物體面上三個頂點的立體角公式：

陳威尹（1999）之**高維正形體**（參考〔二〕）。

(三) 球面上矩形的面積公式：

利用項武義（2004）之**基礎幾何學七、球面幾何和球面三角學**（參考〔三〕）。

(四) 角錐體的重心：根據科學教育期刊第 259 期**多面體重心的幾何作法**（參考〔四、五〕）

一文中，提及四角錐體重心的計算方式，可知四角錐的重心位於一頂點和其對面重心的連心線上，且距離頂點為高的 $\frac{3}{4}$ 倍處。

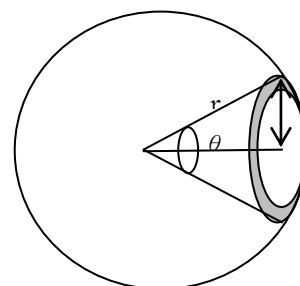
(五) 假設條件、定義、引理及證明：

1. 定義 1：設一個多面體的重心為 X ，如果從 X 點向任一面作垂線，其垂足都在該面上，則稱該多面體為正常多面體，否則為非正常多面體。

假設 1：我們討論的骰子為凸多面體和定義 1 中所提及的正常多面體；而地面為黏滯性無限大，骰子著地後即貼在地上，不受平面與地面不貼平時產生力矩的影響，擲骰子時對各面抓握度也視為相同，每個面的機率以著地時為主。

2. 我們將物體運動的方式分成移動和旋轉兩部份；因水平移動不影響落地時間，故對結果不造成影響；至於旋轉，因為會有各種的旋轉角度，而互相抵消。故針對此兩者，本次皆不予討論。

假設 2：設一個非均勻立方體骰子其重心為 X ，從某一高度靜止落下，從 X 點指向空間任何方向的直線都有可能成為重力作用線，空間各方向成為重力作用線的機率都相等，可得引理 1。

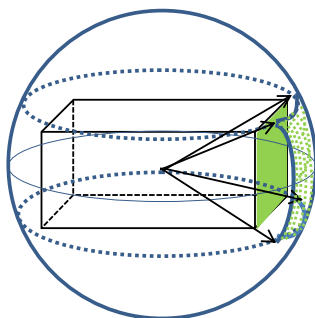


引理 1：每個面機率等於該面立體角除以 4π 。

$$P_i = \frac{\omega_i}{4\pi}, i = 1, \dots, n。$$

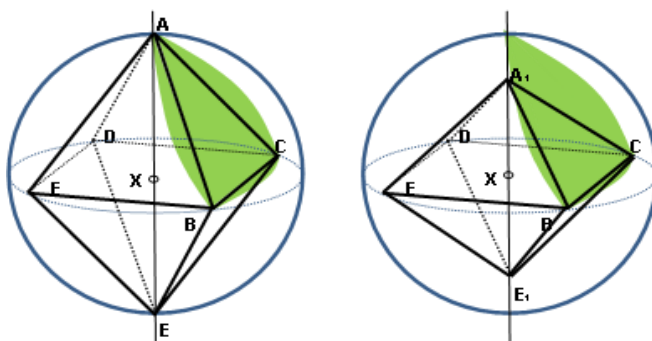
證明 1：骰子各面出現的機率與立體角的關係可由下圖來表示。

由假設 2 可得骰子重心經由綠色面頂點投影到球面會形成一面積，只要骰子著地時落在此區域都會是出現綠色面，此球面積的立體角即可視為正比於骰子綠色面的機率。



引理 2：不論是否有無外接球，不同骰子只要立體角相同機率就會一樣。

證明 2：如下圖，正八面體骰子上下頂點 A 與 E，往直徑內移相同距離，此時重心 X 仍保持不動，而 $\angle AXB = \angle A_1XB$ ， $\angle AXC = \angle A_1XC$ ，所以面 ABC 與面 A_1BC 立體角仍保持不變，即機率仍會一樣。

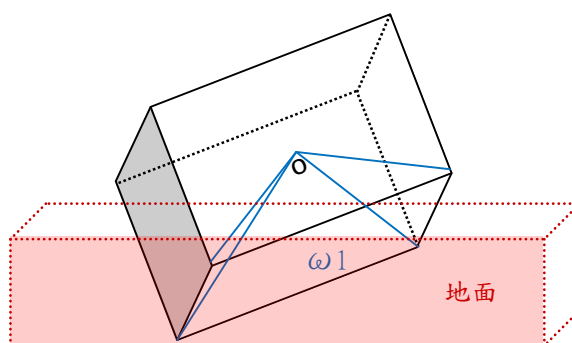
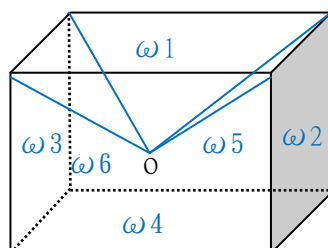


A 及 E 頂點沿直徑等距內移到 A_1E_1 時立體角與機率仍相等

引理 3：所有面的機率和等於 1。

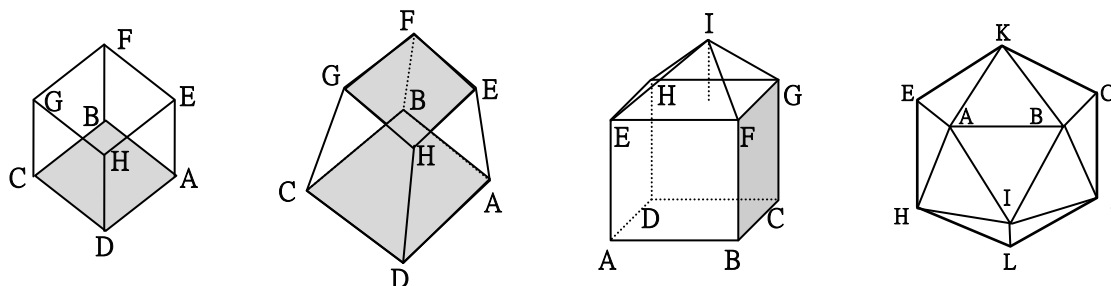
$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{4\pi} = 1$$

證明 3：因為骰子為內部任一點向外所有角度延伸都會接觸到的凸多面體，所以各面接觸地上的機率皆大於 0，以長方體為例，六個面立體角 ($\omega_1 \sim \omega_6$) 總和為 4π 。



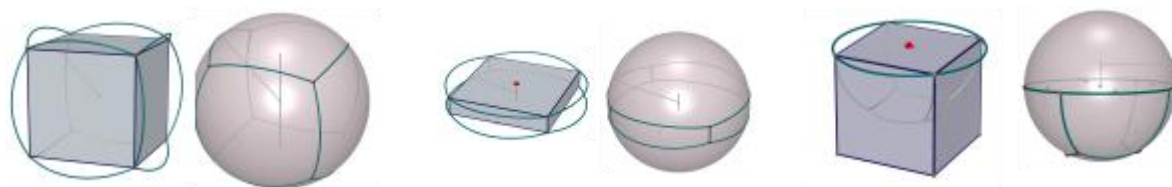
以下將討論四種類型的骰子（如下圖）：

- (一) 骰子為一正 n 角柱體，上下面相同。
- (二) 骰子為一正稜台，上下面不同但相似。
- (三) 骰子為一角錐柱體。
- (四) 骰子為正多面體的延伸。



一、骰子為一正 n 角柱體：

在此會探討改變柱體高度與重心位置對機率的影響（如下圖），在 Cabri-3D 下可以發現當重心往上移時，四個側面的機率（面積即立體角）會變小（如下圖右）。



正立方體骰子及立體角

改變骰子高度及立體角

移動骰子重心（往上）及立體角

本文探討骰子出現上面的機率。

(一) 骰子為正三角柱體（如右圖）：

1. 質量均勻：中心 O 、重心 X 為同一點。

令正三角形頂點距中心 a ，柱體高度 b ，

先將三角柱體體頂點座標化：以重心 X 為原點，將其它點座標調整如下，

$$A(a, 0, \frac{-b}{2}), B(\frac{-a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{-b}{2}), C(\frac{-a}{2}, \frac{-\sqrt{3}a}{2}, \frac{-b}{2}), D(a, 0, \frac{b}{2}), E(\frac{-a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{b}{2}), F(\frac{-a}{2}, \frac{-\sqrt{3}a}{2}, \frac{b}{2})$$

因為 X 為正三角柱體的重心，所以 X 與正三角 DEF 的三個邊的夾角相同，

即 $\angle DXE = \angle EXF = \angle EXD$ 。

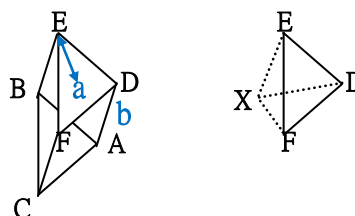
$$\text{利用餘弦定理可知：} \cos \angle DXE = \frac{\overline{DX}^2 + \overline{EX}^2 - \overline{DE}^2}{2 * \overline{DX} * \overline{EX}} = \frac{(b^2 - 2a^2)}{4a^2 + b^2},$$

$$\sin \angle DXE = \frac{2\sqrt{3}}{4a^2 + b^2} \sqrt{a^4 + a^2 b^2}.$$

利用立體角公式， DEF 對應的立體角 ω_{DEF} 為

$$\arccos \frac{\cos \angle EXD - \cos \angle EXD \cos \angle EXD}{\sin \angle EXD \sin \angle EXD} + \arccos \frac{\cos \angle EXD - \cos \angle EXD \cos \angle EXD}{\sin \angle EXD \sin \angle EXD} + \arccos \frac{\cos \angle EXD - \cos \angle EXD \cos \angle EXD}{\sin \angle EXD \sin \angle EXD} - \pi$$

$$= 3 * \arccos \frac{b^2 - 2a^2}{2(a^2 + b^2)} - \pi,$$



所以出現DEF面的機率為 $\frac{\omega_{DEF}}{4\pi} = \frac{3}{4\pi} * \arccos \frac{b^2-2a^2}{2(a^2+b^2)} - \frac{1}{4}$ 。

在何種狀況下正三角柱體五個面是不等面的公平骰子？

令 $a = 1$ ，機率 $\frac{3}{4\pi} * \arccos \frac{b^2-2}{2(1+b^2)} - \frac{1}{4}$ 須等於 $\frac{1}{5}$ ，所以此時柱體高 $b \approx 0.924$ 。

2. 質量不均勻，重心X和中心O只有在z座標不同，且比O大c，上下三角形面的立體角及機率可求出如下。

上三角形面 DEF 對應的立體角 ω_{DEF} 為 $3 * \arccos \frac{-2a^2+b^2-4bc+4c^2}{2(a^2+(b-2c)^2)} - \pi$ ，

出現的機率為 $\frac{\omega_{DEF}}{4\pi} = \frac{3}{4\pi} * \arccos \frac{-2a^2+b^2-4bc+4c^2}{2(a^2+(b-2c)^2)} - \frac{1}{4}$ ，

下三角形面ABC為 $3 * \arccos \frac{-2a^2+b^2+4bc+4c^2}{2(a^2+(b+2c)^2)} - \pi$ ，

出現的機率為 $\frac{\omega_{ABC}}{4\pi} = \frac{3}{4\pi} * \arccos \frac{-2a^2+b^2+4bc+4c^2}{2(a^2+(b+2c)^2)} - \frac{1}{4}$ 。

(二) 骰子為正四角柱體（如右圖）：

1. 質量均勻：中心O、重心X為同一點。

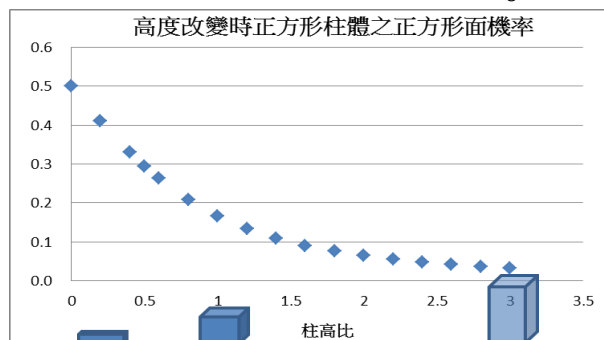
令正四角柱體頂點距中心a，高度b，

EFG對應的立體角 ω_{EFG} 為 $\arccos(1 - \frac{8a^4}{(2a^2+b^2)^2})$ ，

正四角柱EFGH對應的立體角為 $\omega_{EFGH} = 2 * \arccos(1 - \frac{8a^4}{(2a^2+b^2)^2})$ ，

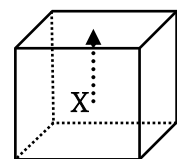
所以出現EFGH面的機率為 $\frac{\omega_{EFGH}}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} * \arccos(1 - \frac{8a^4}{(2a^2+b^2)^2})$ 。

而柱高比與正方形面機率如下圖，可以發現，當正立方體骰子切成一半時（即高度為正方邊長一半），原來正方形面機率會從 $\frac{1}{6}$ 變成 0.295。



2. 同上質量不均勻，但重心X和中心O只有在z座標不同，且比O大c，上下正方形面機率如下：

上正方形面EFGH出現的機率為 $\frac{1}{2\pi} * \arccos(1 - \frac{8a^4}{(2a^2+(b-2c)^2)^2})$ ，

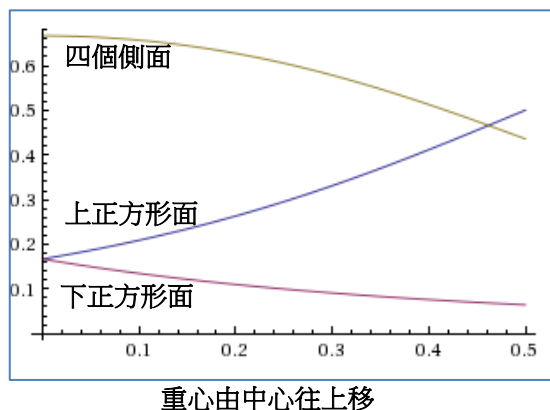


重心 X 從物體中心移到最上面

下正方形面ABCD出現的機率為 $\frac{1}{2\pi} * \arccos(1 - \frac{8a^4}{(2a^2+(b+2c)^2)^2})$

在正立方體骰子，即 $\sqrt{2}a=b=1$ ，當重心 X 從物體中心趨近於最上面時（如右圖，即c 從 0 趨近 0.5）

上下兩正方形面及側面的機率如下圖，發現重心越遠離中心時，側面機率就會越小。



(三) 骰子為正n角柱體（如右圖）：

1. 質量均勻：

令正 n 邊形頂點距中心 a，高度 b，

B_1CB_2 對應的立體角 $\omega_{B_1CB_2}$ 為 $2 * \arccos \frac{b \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4a^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + b^2}} - \frac{(n-2)\pi}{n}$ ，

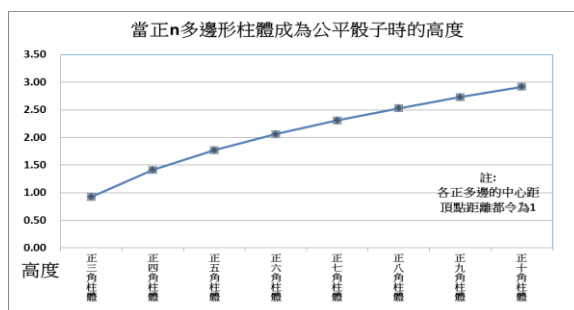
所以正n角形立體角面出現的機率為

$$\frac{n * \omega_{B_1CB_2}}{4\pi} = \frac{n}{2\pi} * \arccos \frac{b \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4a^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + b^2}} - \frac{(n-2)}{4}。$$

另外，在何種狀況下正n角柱體的n + 2個面是不等面的公平骰子？

令 $a = 1$ ，此時機率 $\frac{n}{2\pi} * \arccos \frac{b \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + b^2}} - \frac{(n-2)}{4}$ 須等於 $\frac{1}{n+2}$ 。所以，柱體高

$$2 * b = \frac{4 \cos(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{n\pi}{2(n+2)})}{\sqrt{(\sin(\frac{\pi}{n}))^2 - (\cos(\frac{n\pi}{2(n+2)}))^2}} \quad (\text{如下圖})。$$



固定 $n = 3$ ，將 b 代不同的數字進入 $\frac{n}{2\pi} * \arccos \frac{b \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + b^2}} - \frac{(n-2)}{4}$ 中，發現當 b 愈來愈大的時候，正n角形立體角面出現的機率乘上高度平方會趨近於一定值，固定

$n = 4$ 時也可以觀察到類似的現象。於是猜測對於任意不小於 3 的正整數 n ，是否都會有類似的情形發生？

經過一段利用幾何的推導證明過程，發現當 b 趨近於無窮大，則此定值為 $\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$ ，

即當 b 趨近於無窮大，機率會以 $\frac{1}{b^2}$ 的速度趨近於零。

另外，可觀察並證明，當 n 趨近於無限大時， $\frac{4 \cos(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{n\pi}{2(n+2)})}{\sqrt{(\sin(\frac{\pi}{n}))^2 - (\cos(\frac{n\pi}{2(n+2)}))^2}}$ 和 $\sqrt{n}$ 的比值會趨近於 2。這意謂，若一個均勻的正 n 角柱體骰子是公正的，且任一頂點與其所在底面的中心的距離為 1 單位，則當 n 相當大的時候，其高度 $2b = \frac{4 \cos(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{n\pi}{2(n+2)})}{\sqrt{(\sin(\frac{\pi}{n}))^2 - (\cos(\frac{n\pi}{2(n+2)}))^2}}$ ，

「基本上」為 $2\sqrt{n}$ (嚴格地說，是 $2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$)。

2. 同上質量不均勻，但重心 X 和中心 O 只有在 z 座標不同，且比 O 大 c ：

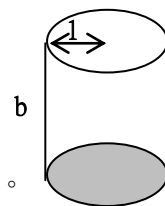
上 n 角形出現的機率為 $\frac{n}{2\pi} * \arccos \frac{(b-2c) \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4a^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + (b-2c)^2}} - \frac{(n-2)}{4}$ ，

下 n 角面出現的機率為 $\frac{n}{2\pi} * \arccos \frac{(b+2c) \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4a^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + (b+2c)^2}} - \frac{(n-2)}{4}$ 。

(三) 骰子質量均勻的圓柱體 (可視為正 n 角柱體中，當 n 趨近無限大) (如右圖)：

令圓形底面半徑為 1，高度 b ，圓形底面出現機率

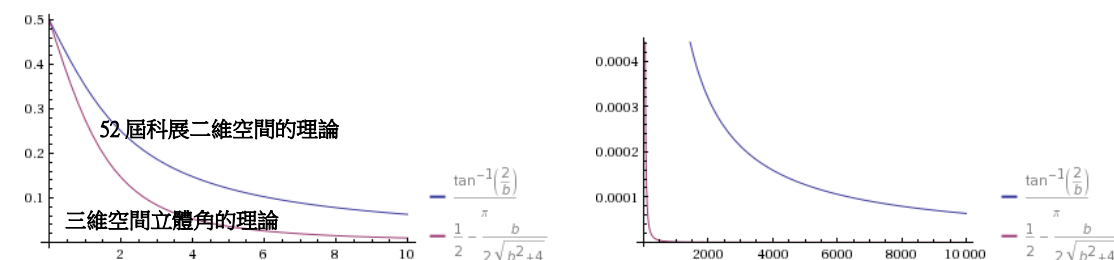
$$\frac{n * \omega_{B_1CB_2}}{4\pi} = \frac{n}{2\pi} * \arccos \frac{b \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4a^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + b^2}} - \frac{(n-2)}{4} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{4+b^2}}$$



同樣可觀察並證明，當 b 趨近於無限大，機率會以 $\frac{1}{b^2}$ 的速度趨近於零。

現在，把我們所算出的機率與參考資料〔一〕中所算出的圓形底面機率為

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\tan^{-1}(\frac{1}{b/2})}{\pi}$$



當圓柱半徑為 1，不同柱高 $b(0 \sim 10000)$ 時，圓形面的機率

可以發現，圓形底面的機率會比 52 屆全國科展算出的值小，且隨著柱高變大，圓形底面的機率會更快趨近零。兩種理論最大的差別是參考資料〔一〕中認為硬幣旋轉時的對稱軸一定要垂直過上下兩圓的圓心的直線，而我們的則可允許任意方向的對稱軸，即若旋轉限定在垂直過圓心的對稱軸，圓形底面機率會大於旋轉允許任意方向的對稱軸機率。

另外，當柱體高 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，上下圓形面及側面的機率皆相同（即 $\frac{1}{3}$ ），即此時為不等面的公平骰子。

實際上，由師長協助用 3D 列印製造出此比例的骰子後，經過五次，每次有三十次投擲(共 150 次)，同時在桌面鋪上極厚的毛巾，以便在攝影機的慢動作下可以觀察骰子接觸桌面時的情形；經過統計，側面出現的比率為 $\frac{3}{10}$ 。由立體角求骰子機率的

理論與中央極限定理可知，將 $\frac{3}{10}$ 標準化後的值為 $Z = \frac{|\bar{X} - \mu|}{(\sigma/\sqrt{n})} = \frac{|\frac{3}{10} - \frac{1}{3}|}{(\frac{\sqrt{2}}{3}/\sqrt{150})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$ ，

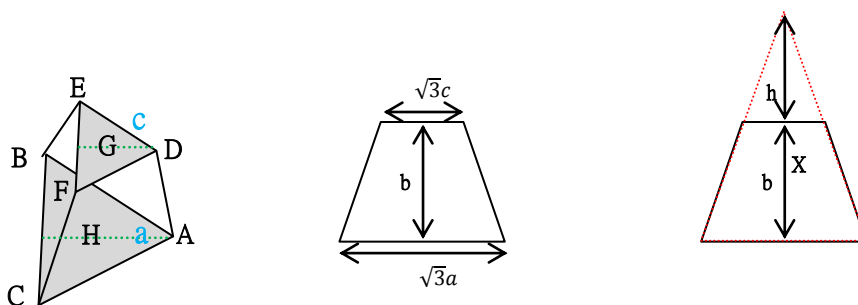
小於在 95%信心區間的 1.96，因此在這次實驗中用立體角求骰子機率的理論有通過考驗，且較 52 屆全國科展更接近理論值（如下表）。

	立體角理論	52屆理論	實驗數據
上下面	0.333	0.391	0.3
側面	0.333	0.216	0.4

二、骰子為一正 n 棱台，上下面不同但相似。

(一) 上下面皆為正三角形的質量均勻棱台：

令上三角形DEF的面積小於下正三角形ABC，ABC頂點距中心 a ，正三角形DEF頂點距中心 c ，高度 b （如下圖），



上下面的機率如下（令 $a = 1$ ），

$$\text{DEF 機率為 } \frac{1}{4\pi} * (3 * \arccos \frac{b^2(c^4+4c^3+10c^2+12c+9)-8c^2(c^4+2c^3+3c^2+2c+1)}{2(b^2(c^4+4c^3+10c^2+12c+9)+4c^2(c^4+2c^3+3c^2+2c+1))} - \pi) ,$$

$$\text{ABC 機率為 } \frac{1}{4\pi} * (3 * \arccos \frac{b^2(3c^2+2c+1)^2-8(c^2+c+1)^2}{2(b^2(3c^2+2c+1)^2+4(c^2+c+1)^2)} - \pi) .$$

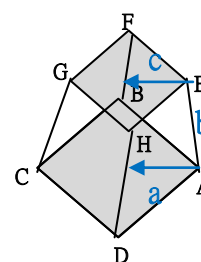
(二) 上下面皆為正方形的質量均勻棱台（如右圖）：

令下正四角形ABCD頂點距中心 a ，上正四角形

EFGH 頂點距中心 c ，高度 b 。所以令 $a = 1$ ， $c \leq 1$ ，

上下面的機率如下，

上四角形面EFGH機率為



$$\frac{1}{4\pi} * (4 * \arccos \frac{b(c^2+2c+3)}{\sqrt{((2b^2)(c^2+2c+3)^2+16c^2(c^2+c+1)^2)}} + 2 * \arccos \frac{-16c^2(c^2+c+1)^2}{2b^2(c^2+2c+3)^2+16c^2(c^2+c+1)^2}) - 2\pi) ,$$

下四角形面ABCD機率為

$$\frac{1}{4\pi} * (4 * \arccos \frac{b(3c^2+2c+1)}{\sqrt{[(2b^2)(c^2+2c+3)^2+16(c^2+c+1)^2]}} + 2 * \arccos \frac{-16(c^2+c+1)^2}{[(2b^2)(c^2+2c+3)^2+16(c^2+c+1)^2]}) - 2\pi) .$$

(三) 上下面皆為正n邊形質量均勻稜台（如右圖）：

令下正n邊形 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ，頂點距正n邊形中心a，

上正n邊形 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ 頂點距正n邊形中心c，高度b，

上下面的機率如下，

上正n邊形出現的機率

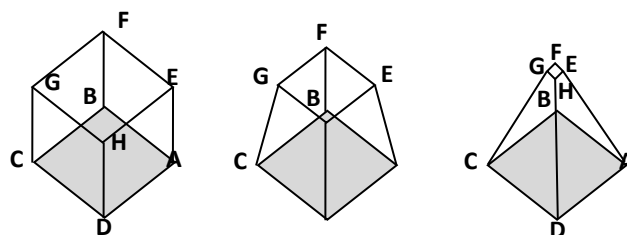
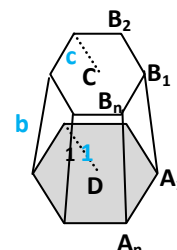
$$\frac{1}{4\pi} * (2n * \arccos \frac{b(3+2c+c^2) \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{[(16c^2(1+c+c^2)^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2) + b^2(3+2c+c^2)^2]}} - (n-2)\pi) ,$$

下正n邊形出現的機率為

$$\frac{1}{4\pi} * (2n * \arccos \frac{b(1+2c+3c^2) \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{16(1+c+c^2)^2 (\cos \frac{\pi}{n})^2 + b^2(1+2c+3c^2)^2}} - (n-2)\pi) .$$

(四) 上下面皆為正方形且質量均勻：中心O、重心X為同一點。

所以令 $a = 1$ 、 $b = \sqrt{2}$ ，上正四角形c由1到0時（如下圖），



上下面立體角的關係：

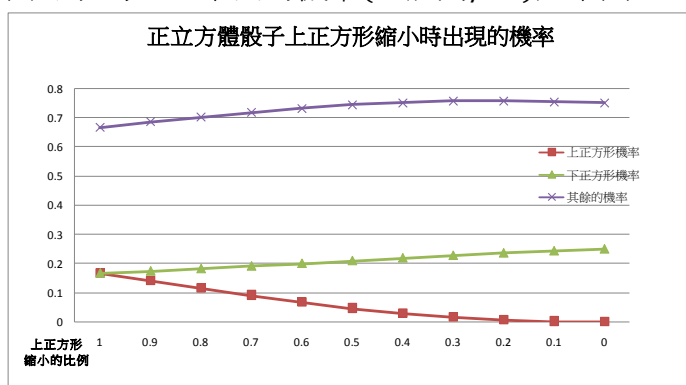
原來下面EFGH對應的立體角為 $2 * \omega_{EFG}$

$$= 4 * \arccos \frac{\sqrt{2}(c^2+2c+3)}{\sqrt{4(c^2+2c+3)^2+16c^2(c^2+c+1)^2}} + 2 * \arccos \frac{-16c^2(c^2+c+1)^2}{4(c^2+2c+3)^2+16c^2(c^2+c+1)^2} - 2\pi ,$$

原來上面ABCD對應的立體角為 $2 * \omega_{ABC}$

$$= 4 * \arccos \frac{\sqrt{2}(3c^2+2c+1)*c}{\sqrt{4(c^2+2c+3)^2+16(c^2+c+1)^2}} + 2 * \arccos \frac{-16c^2(c^2+c+1)^2}{4(c^2+2c+3)^2+16(c^2+c+1)^2} - 2\pi ,$$

所以當c由1到0時，上下面的機率(立體角/4π)如下圖。



三、骰子為一質量均勻的柱體和角錐體的合體。

在這個部份，我們探討骰子出現錐體部分的機率。

- (一) 柱體為正立方體，正方體邊長 a 為1，四角錐的高為 b ，
四個角錐面的立體角與機率如下，

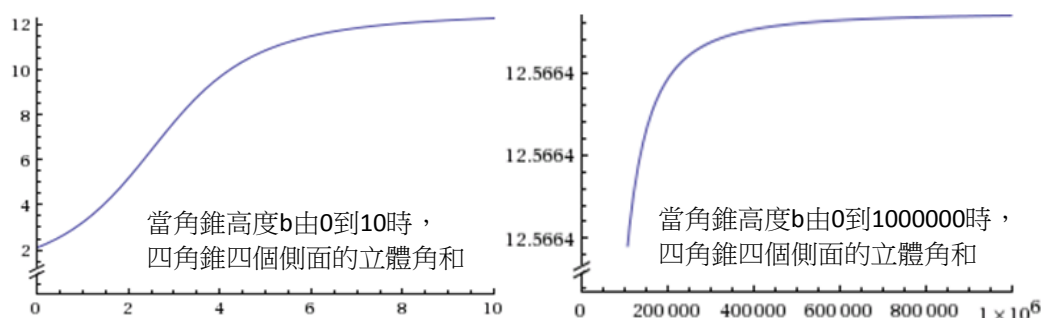
$$\text{立體角為：} 8 * \arccos \frac{6-b^2}{\sqrt{2(b^4-8b^2+24b+72)}} - 2\pi,$$

$$\text{機率為 } \frac{2}{\pi} * \arccos \frac{6-b^2}{\sqrt{2(b^4-8b^2+24b+72)}} - \frac{1}{2}。$$

所以當 b 由0趨向 ∞ 時，四角錐四個側面的立體角和如下圖：

當 b 趨近0，四個側面的立體角和趨近於 $8 * \arccos \frac{-6}{12} - 2\pi = \frac{4\pi}{6}$ ，

當 b 趨近 ∞ ，四個側面的立體角和趨近於 $8 * \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} - 2\pi = 4\pi$ 。



可以發現，當錐高 b 從0趨向 ∞ 時，四角錐四個側面立體角和

會從 $\frac{4\pi}{6}$ 趨近到 4π 。

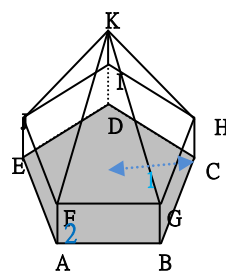
- (二) 柱體為正五邊形之角錐柱體（如右圖）：

正五邊形頂點離中心距離為1，柱體高度2，

角錐的高為 b 。

五個角錐面的機率如下，

$$\frac{1}{4\pi} (10 \arccos \frac{\sqrt{10}(24-b^2)\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4\sqrt{(b^4+2(5\sqrt{5}-31)b^2+24(5\sqrt{5}-7)b+72(5\sqrt{5}+1))}} + 5 \arccos \frac{4(5\sqrt{5}-11)b^2+(60\sqrt{5}-132)b+(180\sqrt{5}-396)}{16(6+b)^2} - 5\pi)。$$



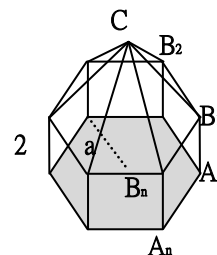
- (三) 柱體正 n 邊形角錐體（如右圖）：

正 n 邊形頂點離中心距離為1，柱體高度2，

角錐的高為 b 。

n 個角錐面的機率如下，

$$\frac{1}{4\pi} * (2n * \arccos \frac{(24-b^2) \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{b^4-16b^2((\sin \frac{\pi}{n})^2+2)+192b(1-(\sin \frac{\pi}{n})^2)+576(2-(\sin \frac{\pi}{n})^2)}} + n * \arccos \frac{16(b+6)^2(1-2(\sin \frac{\pi}{n})^2)}{(24-b^2)^2} - n\pi)$$



四、骰子為一質量均勻正多面體，對其做截角（截角在康威多面體表示法之運算符號：t）：康威多面體表示法（參考〔七〕）是用來描述多面體的一種方法，一般用種子多面體為基礎並表示對種子多面體做的操作或運算。截角操作在康威多面體表示法之運算符號為t，而當最大截角時則為a，本作品使用的種子多面體為正多面體，且下文中提及之運算皆為康威多面體表示法之運算符號。

正多面體有正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體五種。

(一) 骰子為正四面體：令邊長為2（如右圖），頂點座標為

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right), B\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right), C\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right), D\left(0, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)。$$

重心 $Z\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ，以Z為原點，新座標為：

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right), B\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right), C\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, -1, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right), D\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)。$$

每個頂點等距離X產生新的面，令被截的頂點為D點，則新面EFG的座標為

$$E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}X, 0, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}X\right), F\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}X, \frac{1}{2}X, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}X\right), G\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}X, \frac{-1}{2}X, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}X\right)。$$

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GE} = X, \overline{EZ} = \overline{FZ} = \overline{GZ} = \sqrt{X^2 - 2X + \frac{3}{2}},$$

$$\cos \angle EZF = \cos \angle FZG = \cos \angle GZE = \frac{\overline{EZ}^2 + \overline{FZ}^2 - \overline{EF}^2}{2 * \overline{EZ} * \overline{FZ}} = \frac{X^2 - 4X + 3}{2X^2 - 4X + 3},$$

$$\sin \angle EZF = \sin \angle FZG = \sin \angle GZE = \frac{X\sqrt{3X^2 - 8X + 6}}{2X^2 - 4X + 3}。$$

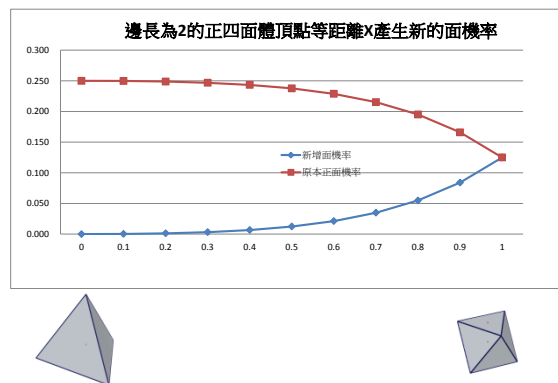
截面EFG對應的立體角 ω_{EFG} 為

$$\arccos \frac{\cos \angle EZF - \cos \angle GZE \cos \angle FZG}{\sin \angle GZE \sin \angle FZG} + \arccos \frac{\cos \angle GZE - \cos \angle EZF \cos \angle FZG}{\sin \angle EZF \sin \angle FZG} + \arccos \frac{\cos \angle FZG - \cos \angle EZF \cos \angle GZE}{\sin \angle EZF \sin \angle GZE} - \pi$$

$$= 3 * \arccos \frac{\cos \angle EZF - \cos \angle ANC \cos \angle BNC}{\sin \angle EZF \sin \angle EZF} - \pi = 3 * \arccos \frac{X^2 - 4X + 3}{3X^2 - 8X + 6} - \pi。$$

$$\text{機率為} (3 * \arccos \frac{X^2 - 4X + 3}{3X^2 - 8X + 6} - \pi) / 4\pi，$$

正四面體等距離截角後新產生的三角形面機率如下圖：



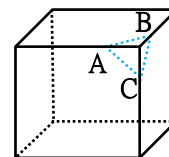
圖中「原本正面機率」即為原本正面被截角後，剩餘部份的機率；底下如有出現「原

本正面機率」，也是相同意義的簡寫。

可以發現，正四面體在等距離最大截角時（當截角等於邊長一半時），此時正四面體就會變成正八面體，此時出現各面的機率都相等。

(二) 骰子為正六面體（如右圖）：

邊長為2距每個頂點等距離截角後X產生新的面ABC，
截面ABC機率如下，

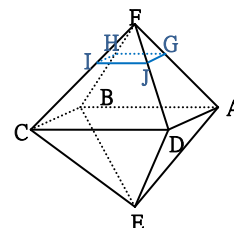


$$\frac{3\pi}{4} * \arccos \frac{3-2X}{X^2-4X+6} - \frac{1}{4}\pi,$$

正六面體等距離截角後新產生的三角形面與原本正面機率如下圖左。

(三) 骰子為正八面體（如右圖）：

邊長為2，截面GHIJ的機率如下，
截面機率為



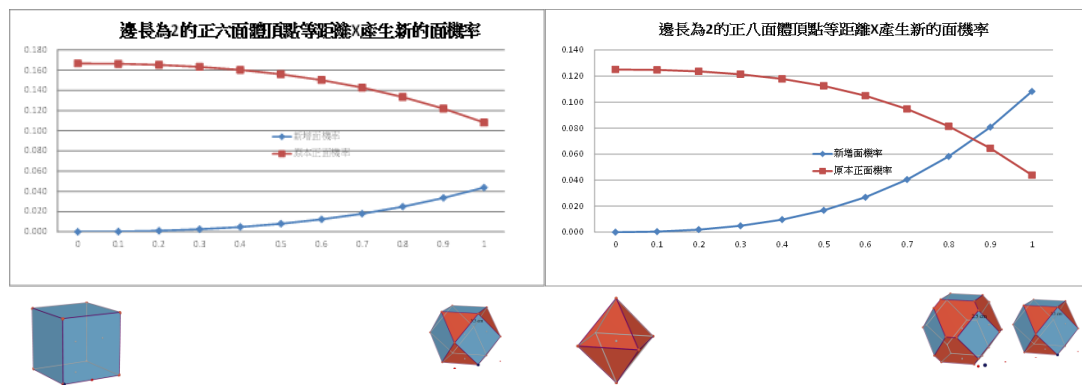
$$(2 * \arccos \frac{2-X}{\sqrt{3X^2-8X+8}} + \arccos \frac{-X^2}{(3X^2-8X+8)} - \pi)/2\pi,$$

正八面體等距離截角後新產生的正方形面與原本正面機率如下圖右，
當新增面出現的機率等於原本正面機率時，即

$$(2 * \arccos \frac{2-X}{\sqrt{3X^2-8X+8}} + \arccos \frac{-X^2}{(3X^2-8X+8)} - \pi)/2\pi = \frac{1}{14},$$

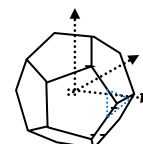
計算之後可得當X ≈ 0.86時，所以會產生由八個六邊形面（邊長0.86與0.28）與六個正方形面（邊長0.86）所構成的十四不等面公平骰子。

而在最大截角時，正六面體與正八面體這兩個對偶多面體會變成相同的多面體。



(四) 骰子為正十二面體（如右圖）：

邊長為2，截面GHI的機率如下，

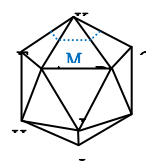


$$(3 * \arccos \frac{(1-\sqrt{5})X^2-8X+6(\sqrt{5}+3)}{(5-\sqrt{5})X^2-16X+12(\sqrt{5}+3)} - \pi)/4\pi,$$

正十二面體等距離截角後新產生的三角形面機率如下圖左。

(五) 骰子為正二十面體（如右圖）：

令邊長為 $\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}$ ，面MNOPQ的機率如下，



$$\text{截面機率為} = (10 * \arccos \frac{5(-\sqrt{5-\sqrt{5}X+\sqrt{10}})}{\sqrt{5+\sqrt{5}} \sqrt{75X^2-20\sqrt{10}\sqrt{(5-\sqrt{5})X+100}}} + 5 * \arccos \frac{\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})} - 5\pi)/4\pi,$$

正二十面體等距離截角後新產生的五角形面機率如下圖右，

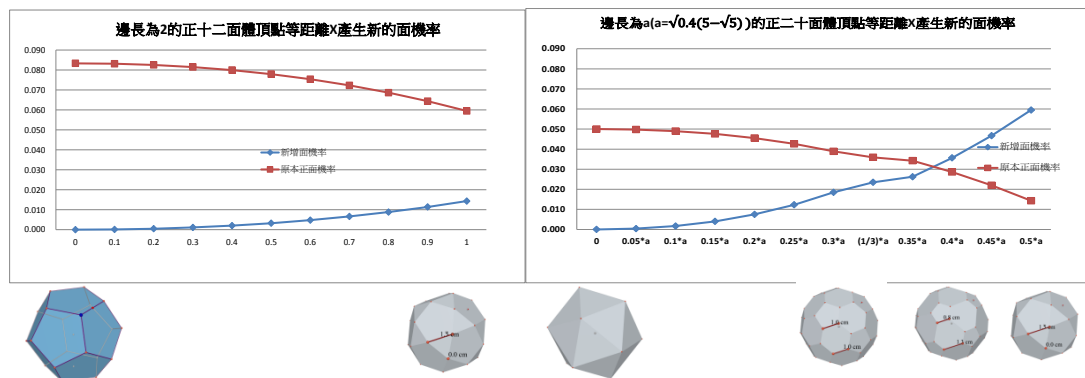
當新增面出現的機率等於原本正面機率時，即

$$(10 * \arccos \frac{5(-\sqrt{5-\sqrt{5}X+\sqrt{10}})}{\sqrt{5+\sqrt{5}} \sqrt{75X^2-20\sqrt{10}\sqrt{(5-\sqrt{5})X+100}}} + 5 * \arccos \frac{\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})} - 5\pi)/4\pi = \frac{1}{32}。$$

計算之後可得當 $X \approx 0.38a$ ($a = \sqrt{0.4 * (5 - \sqrt{5})}$)時，新增面出現的機率為 $\frac{1}{32}$ ，也等於原本正面的機率，此時會產生由二十個六角形面（邊長 $0.38a$ 與 $0.24a$ ）與十二個正五角形面（邊長 $0.38a$ ）所構成的三十二不等面公平骰子。

其中當截角為 $\frac{a}{3}$ 時，此時六角形面與五角形面邊長皆為 $\frac{a}{3}$ ，即為由12個正五角形與20個正六角形所組成的足球形狀32面體（如碳60，下圖），此時正五角形與正六角形的機率為0.024與0.036，即立體角為 0.094π 與 0.144π 。

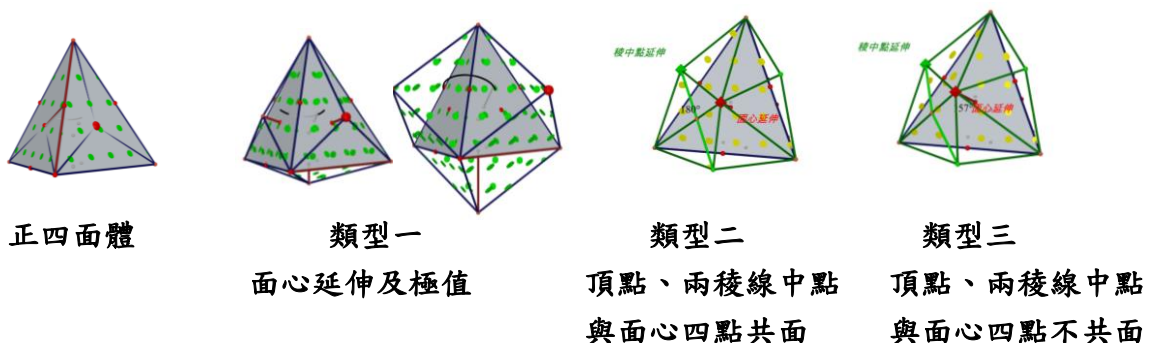
同樣地，在最大截角時，正十二面體與正二十面體會變成相同的多面體。



由以上的觀察可知，一個以施萊夫利符號（參考〔八〕）表示為 $\{p, q\}$ 之正多面體其經過 t (或 a) 的運算之後的立體具有正 p 邊形、 $2q$ 邊形兩種面，故只要計算出正 p 邊形面出現的機率，就可知道全部面出現的機率。

五、骰子由正多面體，對其做康威多面體表示法之 k (n 角化) 或 t (截角) 或 o (正交) 或 m (元) 或 j (會合) 的運算，並重覆操作和其變化形態：

以下會討論三種類型及其限制



(一) 骰子為正四面體

1. 面心延伸與頂點連線所構成的十二面體

(即為 n 角化或會合，運算符號 k 或 j) (如右圖)：

令原正四面體的重心 O ，四頂點分別為 A 、 B 、 C 、 D ，

E 、 F 、 G 、 H 為面 ABC 、 BCD 、 CDA 、 DAB 的中心，連

$\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$ 、 $\overline{OG}$ 、 $\overline{OH}$ ，令 I 、 J 、 K 、 L 在 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$ 、 $\overline{OG}$ 、 $\overline{OH}$ 上，

且面心延伸量 $\overline{EI}$ 、 $\overline{FJ}$ 、 $\overline{GK}$ 、 $\overline{HL}$ 皆相等，故對應到同一面的三面出現的機率和等於原四面體該面之機率，及對應到原四面體同一面的三個面出現機率之和相同，又根據對稱性，這三面出現的機率相同，故每一面出現的機率相同。

若 $ABCDIJKL$ 為凸多面體，令 $\overline{AC}$ 之中點為 M (如下圖左)，

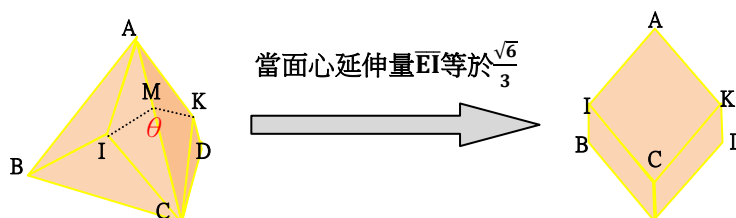
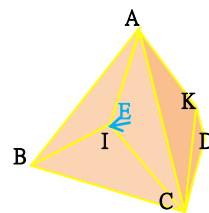
則面 ACI 和面 ACK 所夾的角 ($\angle IMK$) 須小於 π 。因為伸長固定長度時，兩面和原平面所夾之角度相同，故若原圖形之兩面角為 x ，則延伸之後的新面最多可和

原來的面夾 $\frac{\pi-x}{2}$ ，而正四面體之兩面角為 $\arccos \frac{1}{3}$ ，延伸之後的新面最多可和原來的

面夾 $\frac{\pi-\arccos \frac{1}{3}}{2}$ ，令此角為 θ ，當 $\overline{AB}$ 邊長等於 2，則 $\overline{EI} = \overline{EM} \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{\pi-\arccos \frac{1}{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

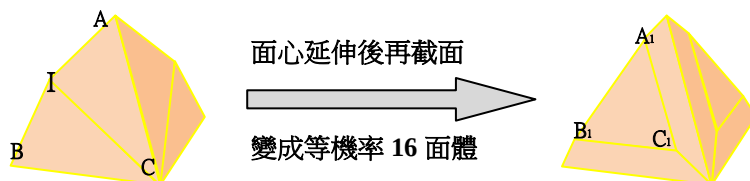
即面心延伸量須小於 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，這種變化方式其實就是對其進行 k 的運算。當延伸量等於

$\frac{\sqrt{6}}{3}$ 時，於 $\overline{AI} = \sqrt{2}$ ，此時十二面體就變成邊長為 $\sqrt{2}$ 的正六面體 (如下圖右)，這種變化方式其實就是對其進行 j 的運算。



2. 等機率不等面多面體：面中心延伸與頂點連線所構成的十二面體再截角變成 (即連續的延伸再截角，(為重複進行 tk 或 tj 的運算) (如下圖)。

(1) 一次延伸再截角：令在 $\overline{IA}$ 、 $\overline{IB}$ 、 $\overline{IC}$ 上取 A_1 、 B_1 、 C_1 ，使得 $\overline{IA_1} = \overline{IB_1} = \overline{IC_1}$ ，另外兩個面也做相同的事情，則因由形體重心到原本的任何一個面截出來的正三角錐體的重心的向量都垂直該面且大小相等，又原形體為正多面體，從重心到各面的向量之和為 0，這種變化方式其實就是對其進行 tk 或 tj 的運算。

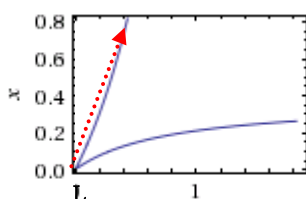


故其重心不變，各面機率為 $\frac{1}{16}$ ，以下計算該面到頂點之間的距離 $\angle A_1OB_1 =$

$\angle A_1OC_1 = \angle B_1OC_1$ ，令 $\angle A_1OB_1 = \theta$ ，立體角 $3 * \arccos \frac{\cos \theta - \cos \theta \cos \theta}{\sin \theta \sin \theta} - \pi$ 須等於 $\frac{\pi}{4}$ ，

所以 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ ，令拉的時候拉 x ，截的時候截 y ，新面正三角形邊長 z ，

$y : z = x : 2$ ， $z = \frac{2y}{x}$ ，利用餘弦定理，可得 x 、 y 須滿足 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + x - y\right)^2 + \frac{4y^2}{3x^2} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + x - y\right) \frac{2\sqrt{3}y}{3x} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2y^2}{x^2}$ 的關係，且拉的距離同樣不能大於 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。令 $x - y = L$ 即稜台高度，所以 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + L\right)^2 + \frac{4(x-L)^2}{3x^2} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + L\right) \frac{2\sqrt{3}(x-L)}{3x} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2(x-L)^2}{x^2}$ ， x 與 L 的關係如下圖：其中 x 愈大代表稜台愈斜，所以高度 L 就要大才能維持一定的立體角。



滿足 16 不等面公平骰子時面心延伸量 x 與稜台高度 L

(2) **n 次延伸再截角**：若重複做拉頂點再截的動作 n 次，可得一有 $12n + 4$ 個面的多面體，要變成等機率多面體時，第一次拉出去 x_1 ，第一次截 y_1 ，第二次拉出去 x_2 ，第二次截 y_2第 n 次拉出去 x_n ，第 n 次截 y_n 的關係式須符合：

$$\text{第一次} \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + x_1 - y_1\right)^2 + \frac{4y_1^2}{3x_1^2} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + x_1 - y_1\right) \frac{2\sqrt{3}y_1}{3x_1} \frac{1}{\sqrt{2-2\sin\frac{(6n-1)\pi}{3(3n+1)}}} = \frac{2y_1^2}{x_1^2},$$

$$\text{第 } i \text{ 次} \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \sum_{k=1}^i (x_k - y_k)\right)^2 + \frac{4}{3} \sum_{k=1}^i \frac{y_k^2}{x_k^2} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \sum_{k=1}^i (x_k - y_k)\right) \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{k=1}^i \frac{y_k}{x_k} \frac{1}{\sqrt{2-2\sin\frac{(6n+2-3i)\pi}{3(3n+1)}}} = \frac{2 \prod_{k=1}^i y_k^2}{\prod_{k=1}^i x_k^2}$$

$$\text{第 } n \text{ 次} \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)\right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{x_k^2} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)\right) \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{x_k} \frac{1}{\sqrt{2-2\sin\frac{(3n+2)\pi}{3(3n+1)}}} = \frac{2 \prod_{k=1}^n y_k^2}{\prod_{k=1}^n x_k^2}.$$

因為截的距離必小於拉出去的距離，所以 $x_1 > y_1$ ， $x_2 > y_2$ $x_n > y_n$ ，又同前面討論由正四面體中心向四面中心連線延伸得到的十二面體的原理，後一次拉的面和前

一次的不能夾超過 π ，得 $x_1 < \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $\frac{x_2}{\frac{2\sqrt{3}y_1}{3x_1}} < \frac{x_1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ $\frac{x_n}{\frac{2\sqrt{3}y_{n-1}}{3x_{n-1}}} < \frac{x_{n-1}}{\frac{2\sqrt{3}y_{n-2}}{3x_{n-2}}}$ ， $x_1 < \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

$x_2 < y_1$ $x_n < y_{n-1}$ ，即 $\frac{\sqrt{6}}{3} > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \dots > x_n > y_n$ ，這種變化方式其

實就是對其重複進行 tk 或 tj 的運算。

3. 面心延伸與稜線中點延伸連線所得到的十二面體

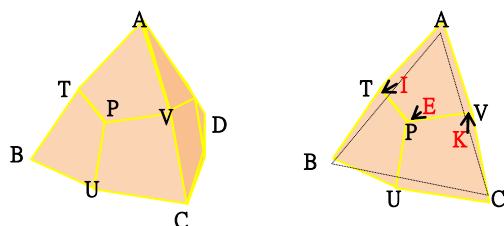
(即為正交，運算符號 $\circ$) (如下圖)：

令形體重心 O ，面 ABC 的中心為 E ， $\overline{AB}$ 之中點為 I ， $\overline{AC}$ 之中點為 K ，連 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OI}$ 、 $\overline{OK}$ ，令 P 、 T 、 V 在 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OI}$ 、 $\overline{OK}$ 上，且 $\overline{IT} = \overline{KV}$ ，若面 APT 和面 APV 共面，當正四面體邊長

為 $2\sqrt{2}$ ，則面心延伸量 $\overline{EP}$ 與線稜中點延伸量 $\overline{IT}$ 須符合 $(\overline{EP} - 3)\left(\overline{IT} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + 4\sqrt{3} = 0$ ，

這種變化方式其實就是對其進行 o 的運算

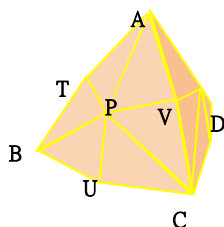
。



4. 四面中心和稜中點延伸，和頂點延伸所得到的二十四面體(即為元，運算符號 m)(如下圖)。

承上，當面 APT 和面 APV 不共面且為凸多面體，面心延伸量與稜線中點延伸量比值須大於 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，這種變化方式其實就是對其進行 m 的運算

。

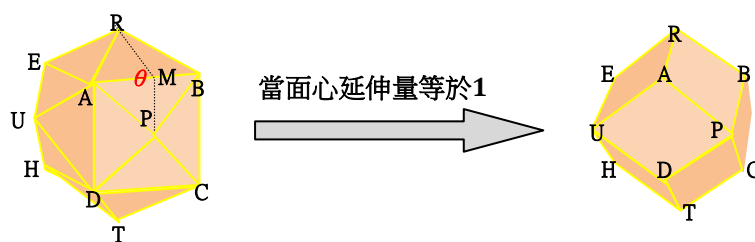


(二) 骰子為正六面體

1. 面心延伸與頂點連線所構成的二十四面體(為 k 或 j 的運算)：

令 $\overline{AB}$ 之中點為 M ，則面 ABP 和面 ABR 所夾的角(如下圖左)須小於 π ，則面心延伸量須小於1，這種變化方式其實就是對其進行 k 的運算。

另外，但當延伸量等於1時 $\overline{AP} = \sqrt{3}$ ，此時二十四面體就變成邊長為 $\sqrt{3}$ ，長軸為 $2\sqrt{2}$ 的菱形十二面體(如下圖右)，這種變化方式其實就是對其進行 j 的運算。



2. 面中心延伸與頂點連線所構成的二十四面體後再截角變成等機率不等面多面體(即連續的延伸再截角)(為重複進行 tk 或 tj 的運算)：

重複做拉頂點再截的動作 n 次時，第一次拉出去 x_1 ，第一次截 y_1 ，第二次拉出去 x_2 ，第二次截 y_2第 n 次拉出去 x_n ，第 n 次截 y_n ，

第一次 $(1 + x_1 - y_1)^2 + 2\frac{y_1^2}{x_1^2} - 2\sqrt{2}(1 + x_1 - y_1)\frac{y_1}{x_1}\cos\theta_1 = \frac{2y_1^2}{x_1^2}$ ，

第 i 次 $(1 + \sum_{k=1}^i (x_k - y_k))^2 + 2\sum_{k=1}^i \frac{y_k^2}{x_k^2} - 2\sqrt{2}(1 + \sum_{k=1}^i (x_k - y_k))\sum_{k=1}^i \frac{y_k}{x_k}\cos\theta_1 = \frac{2\prod_{k=1}^i y_k^2}{\prod_{k=1}^i x_k^2}$ ，

第 n 次 $(1 + \sum_{k=1}^n (x_k - y_k))^2 + 2\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{x_k^2} - 2\sqrt{2}(1 + \sum_{k=1}^n (x_k - y_k))\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{x_k}\cos\theta_1 = \frac{2\prod_{k=1}^n y_k^2}{\prod_{k=1}^n x_k^2}$ 。

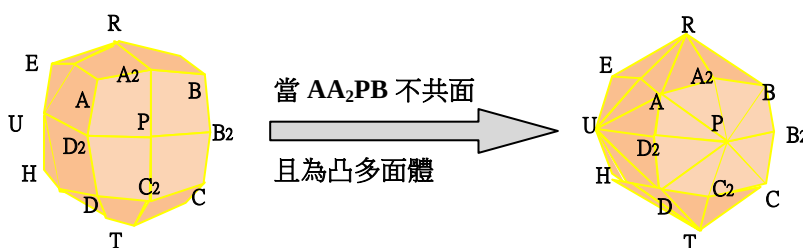
因為截的距離必小於拉出去的距離，所以 $x_1 > y_1$ ， $x_2 > y_2$ $x_n > y_n$ ，又同前面討論由正四面體中心向四面中心連線延伸得到的十二面體的原理，後一次拉的面和前

一次的不夾超過 π ，得 $x_1 < 1, \frac{x_2}{\sqrt{2}y_1} < \frac{x_1}{\sqrt{2}} \dots \frac{x_n}{\sqrt{2}y_{n-1}} < \frac{x_{n-1}}{\sqrt{2}y_{n-2}}$ ， $x_1 < 1, x_2 < y_1 \dots x_n <$

y_{n-1} ，即 $1 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \dots > x_n > y_n$ ，這種變化方式其實就是對其重複進行 tk 或 tj 的運算。

3. 面中心延伸和稜中點延伸連線所得到的二十四面體(為 o 的運算)(如下圖左)與面中心延伸和稜中點延伸即頂點連線所得到的四十八面體(為 m 的運算)(如下圖右)：

承上，當不共面且為凸多面體，面心延伸量與稜線中點延伸量比值須大於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，這種變化方式其實就是對其進行 m 的運算。



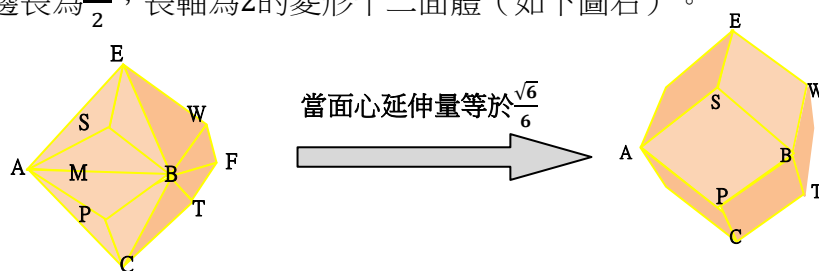
(三) 骰子為正八面體

1. 正八面體中心向八面中心連線延伸得到的二十四面體(為 k 或 j 的運算)(如下圖左)。

如同正六面體一樣，面 ABP 和面 ABS 所夾的角(即 $\angle PMS < \pi$)，則面心延伸量須小於 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ，

這種變化方式其實就是對其進行 k 的運算。另外，但當延伸量等於 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 時，此時也會

變成邊長為 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，長軸為2的菱形十二面體(如下圖右)。



2. 面中心延伸與頂點連線所構成的二十四面體後再截角變成等機率不等面多面體(即連續的延伸再截角)(為重複進行 tk 或 tj 的運算)。

重複做拉頂點再截的動作 n 次時，第一次拉出去 x_1 ，第一次截 y_1 ，第二次拉出去 x_2 ，第二次截 $y_2 \dots \dots$ 第 n 次拉出去 x_n ，第 n 次截 y_n ，

$$\text{第一次} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + x_1 - y_1 \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{y_1^2}{x_1^2} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + x_1 - y_1 \right) \frac{2\sqrt{3}y_1}{3x_1} \cos \theta_1 = \frac{2y_1^2}{x_1^2},$$

$$\text{第 } i \text{ 次} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \sum_{k=1}^i (x_k - y_k) \right)^2 + \frac{4}{3} \sum_{k=1}^i \frac{y_k^2}{x_k^2} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \sum_{k=1}^i (x_k - y_k) \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{k=1}^i \frac{y_k}{x_k} \frac{1}{\sqrt{2-2\sin\frac{(3n+1-i)\pi}{2(3n+1)}}} = \frac{2\prod_{k=1}^i y_k^2}{\prod_{k=1}^i x_k^2}$$

$$\text{第 } n \text{ 次} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \right)^2 + \frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{x_k^2} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{x_k} \frac{1}{\sqrt{2-2\sin\frac{(3n+1-i)\pi}{2(3n+1)}}} = \frac{2\prod_{k=1}^n y_k^2}{\prod_{k=1}^n x_k^2}.$$

因為截的距離必小於拉出去的距離，所以 $x_1 > y_1, x_2 > y_2 \dots \dots x_n > y_n$ ，又同前面討論由正四面體中心向四面中心連線延伸得到的十二面體的原理，後一次拉的面和前

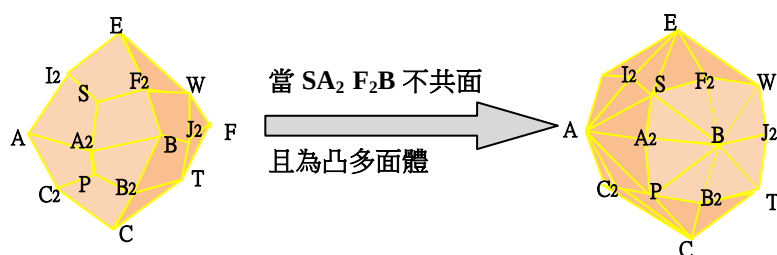
一次的不能夾超過 π ，得 $x_1 < \frac{\sqrt{2}}{4}$ ， $\frac{x_2}{\frac{2\sqrt{3}y_1}{3x_1}} < \frac{x_1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \dots \frac{x_n}{\frac{2\sqrt{3}y_{n-1}}{3x_{n-1}}} < \frac{x_{n-1}}{\frac{2\sqrt{3}y_{n-2}}{3x_{n-2}}}$ ， $x_1 < \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，

$x_2 < y_1 \dots x_n < y_{n-1}$ ，即 $\frac{\sqrt{2}}{4} > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \dots > x_n > y_n$ 。

同理只要我們在截角的時候，適當調整距離，即可製造出一些各面機率為指定的骰子，只要新的多面體為凸的且正常的即可，也是為重複進行 tk 或 tj 的運算。

3. 八面體面中心和稜中點延伸所得到的二十四面體(為 o 的運算)(如下圖左)與面中心延伸和稜中點延伸即頂點連線所得到的四十八面體(為 m 的運算)(如下圖右)。

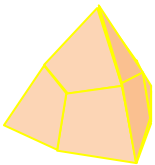
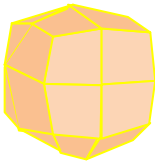
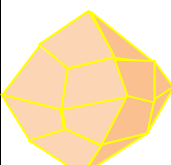
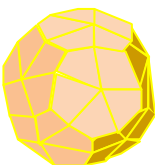
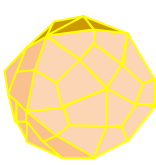
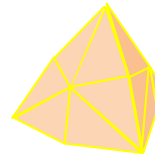
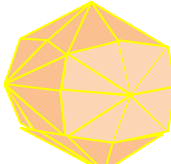
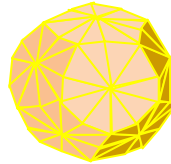
承上，當不共面且為凸多面體，面心延伸量與稜線中點延伸量比值須大於 $\frac{2}{\sqrt{6}}$ ，這種變化方式其實就是對其進行 m 的運算。



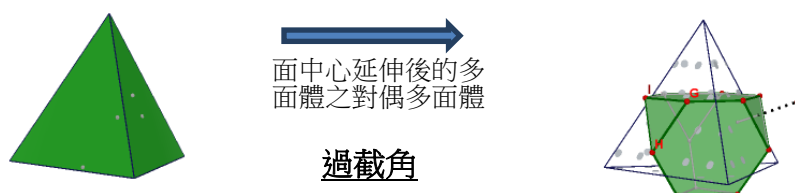
(四) 骰子為由正十二面體或正二十面體變成的多面體

這些立體的性質和由正方體和正八面體變成的多面體相似，詳細形體列在以下的研究成果中。

正多面體 (令稜長 2)					
類型 1： 多面體中心 向面中心和 頂連線					
成為凸多面 體之面心延 伸需小於	十二面體 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	二十四面體 1	二十四面體 $\frac{\sqrt{6}}{6}$	六十面體 $\frac{\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}$	六十面體 $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}$
等於延伸值 極值					

類型 2： 多面體中心 向面中心和 稜中點連線					
	十二面體	二十四面體	二十四面體	六十面體	六十面體
類型 3： 類型 1 面中 心和稜中點 連線					
	二十四面體	四十八面體	一百二十面體		

六、骰子為一質量均勻正多面體，對其做過截角（運算符號： i ）操作：



因為對一個立體過截角等於對其對偶的立體截角，故可利用其對偶後之截角過程來觀察其機率變化。

(一) 骰子為正四面體：

因為正四面體的對偶多面體仍為正四面體，故其機率演變同前文所提正四面體的截角。

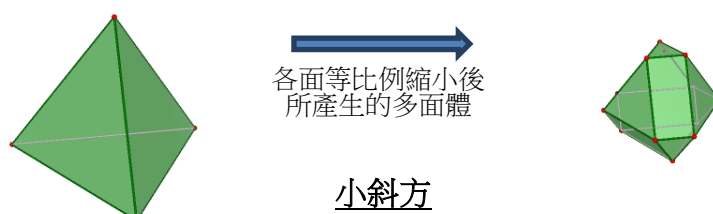
(二) 骰子為正六面體和正八面體：

因為正六面體和正八面體互為對偶多面體，故其機率演變同前文所提正六面體和正八面體的截角。

(三) 骰子為正十二面體和正二十面體：

因為正十二面體和正二十面體互為對偶多面體，故其機率演變同前文所提正十二面體和正二十面體的截角。

七、骰子為一質量均勻正多面體，對其做小斜方（運算符號： e ）：



可看成將每個面的頂點向重心等距離靠近，使得原正多邊形的面縮小並產生其它的面來定義座標系，若一個頂點接 n 個面，則看成有 n 個點的位置相同，運算後分別向個別所屬面之重心移動。

(一) 骰子為正四面體：

令頂點A(1,1,1), B(1, -1, -1), C(-1,1, -1), D(-1, -1,1) ，經過 e 運算後每個頂點等

距收縮 x， 原來面ABC的機率變為： $(3 * \arccos \frac{3x^4 - 8\sqrt{6}x^3 + 50x^2 - 24\sqrt{6}x + 24}{9x^4 - 24\sqrt{6}x^3 + 156x^2 - 80\sqrt{6}x + 96} - \pi)/4\pi$ ，

新截出三角形面的機率為： $(3 * \arccos \frac{5x^2 - 8\sqrt{6}x + 18}{11x^2 - 16\sqrt{6}x + 36} - \pi)/4\pi$ ，

剩下的長方形面機率也可以算出。

(二) 骰子為正六面體：



小斜方

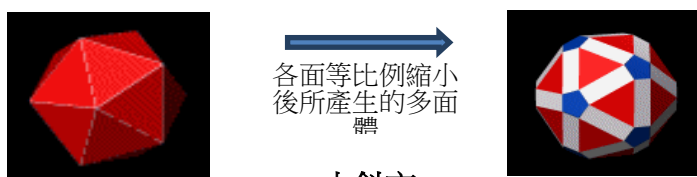
圖片出處：康威多面體表示法·維基百科

原來藍色正方形面的機率變為： $(8 * \arccos \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)}} - 4\pi)/4\pi$ ，

新截出三角形面的機率為： $(6 * \arccos \frac{3 - \sqrt{2}x}{\sqrt{(9x^2 - 8\sqrt{2}x + 12)}} - \pi)/4\pi$ ，

剩下的長方形面機率也可以算出。

(三) 骰子為正二十面體：



小斜方

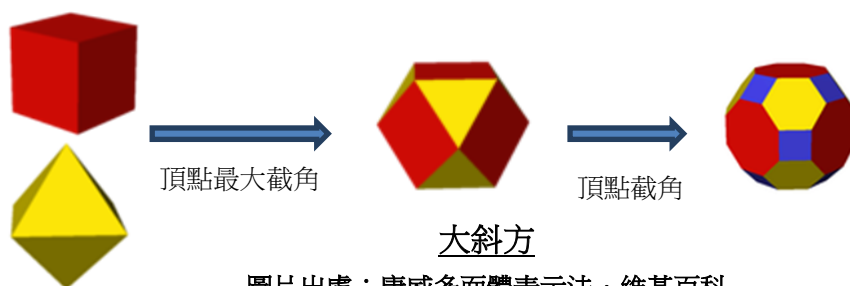
圖片出處：康威多面體表示法·維基百科

原來紅色正方形面的機率變為： $(3 * \arccos \frac{-x^2 + \frac{2}{15}\sqrt{30(5-\sqrt{5})x + \frac{2\sqrt{5}}{5}}}{x^2 - 2\sqrt{\frac{2}{15}(5-\sqrt{5})x + \frac{2+2\sqrt{5}}{5}}} - \pi)/4\pi$ ，

新截出白色長方形面的機率為： $\frac{2}{\pi} * \arctan \sqrt{\left(\frac{(3x^2 - 2\sqrt{(6-\frac{6}{\sqrt{5}}))x + 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}) * (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{12})x}{(x^2 - 2\sqrt{\frac{2}{15}(5-\sqrt{5})x + \frac{7}{6\sqrt{5}} + \frac{3}{2}})} \right)}$ ，

剩下的藍色五邊形面機率也可以算出。

八、骰子為一質量均勻正多面體，對其做大斜方（運算符號：b）操作：



大斜方

圖片出處：康威多面體表示法·維基百科

因為運算元 b 可用替代同構 ta 來表示，故下文對立體做 b 運算，表示為先做 a (截半)的運算，再做 t (截角)的運算。

(一) 骰子為正四面體：

因為對立體做 b 運算，表示為先做 a (截半)的運算，再做 t (截角)的運算，且正四面體的截半變為正八面體，故其機率變化同前文所提及正八面體截角之結果。

(二) 骰子為正六面體和正八面體：

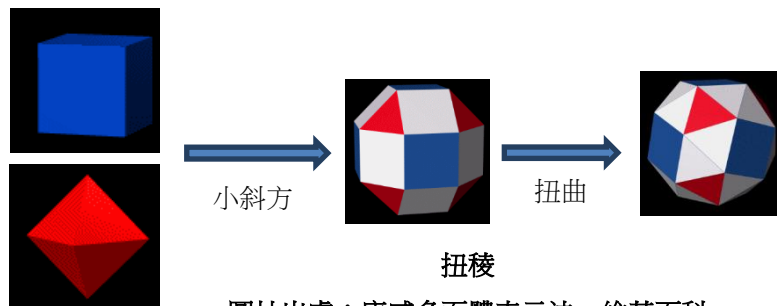
令截的深度為 x ，藍色正方形面機率為 $(\arccos \frac{x^4}{4(2-\sqrt{2}x)(x^2-\sqrt{2}x+2)}) / \pi$

黃色六邊形面機率為

$$(3 * \arccos \frac{1}{3} - 3 \arccos \frac{(3\sqrt{2}-2x)(4\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+2}+2x-3\sqrt{2})}{2(6x^2-2\sqrt{2}x+7)}) - 6 \arccos \frac{(3\sqrt{2}-2x)(4\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+2}+2x-3\sqrt{2})}{2(6x^2-2\sqrt{2}x+7)} + 2\pi) / 4\pi,$$

剩下的紅色八邊形面機率也可以算出。

九、骰子為一質量均勻正多面體，對其做 s 的運算(扭稜)：



圖片出處：康威多面體表示法·維基百科

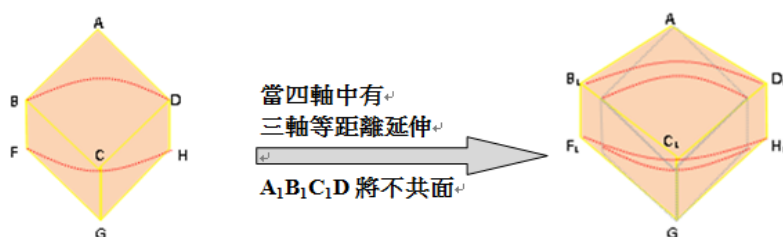
觀察可得其圖形為一個立體先經小斜方後再經過旋轉，旋轉的過程中原來的面形狀大小不改變，一個頂點向各方移動所形成的面形狀大小不改變，而由相鄰兩原來的面共用的邊形成之面則分成兩個全等的圖形，故和小斜方的結果相比，除了相鄰兩原來的面共用的邊形成之面之機率會便成原來的 $\frac{1}{2}$ 外，其他兩種面出現的機率不改變。

十、骰子為正多面體，在部份對應頂點沿球心延伸下所演變而成的相同頂點數公平骰子。

選擇部份球心對稱頂點往外等比例延伸，使得重心不變，但每個面不是相同；因為移動頂點依然在半徑方向，所以立體角仍不變；如果此時頂點可圍成共平面的話，會是等機率的不等面公平骰子；因正四面體無球心對稱頂點，故此次不予討論。

(一) 骰子為正六面體：

選定正六面體的一組對頂點，從原點拉長其它的點（如下圖左），但 $A B_1 C_1 D_1$ 不共面（如下圖右），故不可行。同理正十二面體也不行。



(二) 骰子為正八面體：

選定正八面體的一組對頂點，從原點拉長其它的點 x ，

如圖，令正八面體的六頂點為ABCDEF，重心為O，令 $\vec{FA}$ 為z方向的正向，則

B、C、D、E的z座標相同，連 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 、 $\overline{OD}$ 、 $\overline{OE}$ ，令 B_1 、 C_1 、 D_1 、 E_1 分別在 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 、 $\overline{OD}$ 、 $\overline{OE}$ 上，且 $\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \overline{EE_1}$ ，因為上下兩錐體的重心位於頂點和底面重心連線上，且距離底面 $\frac{1}{4}$ ，而底面重心和頂點不動，故其重心不變，以

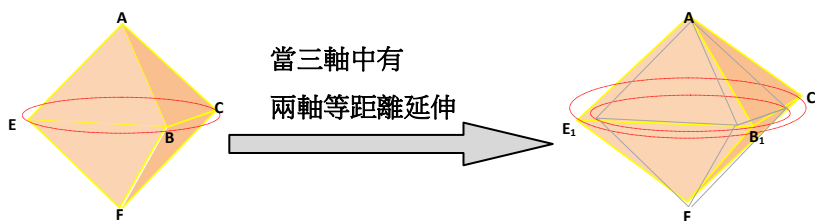
下分析新圖形三角形面的種類：

$$\triangle A(0,0,\sqrt{2}) , B(\sqrt{2},0,0) , C(0,\sqrt{2},0) , D(-\sqrt{2},0,0) , E(0,-\sqrt{2},0) , F(0,0,-\sqrt{2}) ,$$
$$B_1(\sqrt{2} + x, 0, 0), C_1(0, \sqrt{2} + x, 0), D_1(-\sqrt{2} - x, 0, 0), E_1(0, -\sqrt{2} - x, 0),$$

$$\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = \overline{AD_1} = \overline{AE_1} = \overline{FB_1} = \overline{FC_1} = \overline{FD_1} = \overline{FE_1} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4} \text{ ,}$$

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1E_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{D_1E_1} = \sqrt{2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4}, \text{ 此時為腰長 } \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4},$$

底邊長 $\sqrt{2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4}$ 的等腰三角形。



(三) 骰子為正二十面體：

此正二十面體座標化，令 $\vec{OB}$ 為x軸正向， $\vec{OA}$ 為z軸正向， $O(0,0,0)$ 可知 $A(0,0,1)$ ，

$$B(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}), C(\frac{5-\sqrt{5}}{10}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \frac{\sqrt{5}}{5}), D(\frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \frac{\sqrt{5}}{5}), E(\frac{-5-\sqrt{5}}{10}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \frac{\sqrt{5}}{5}),$$

$$F(\frac{5-\sqrt{5}}{10}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \frac{\sqrt{5}}{5}), G(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \frac{-\sqrt{5}}{5}), H(\frac{-5+\sqrt{5}}{10}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \frac{-\sqrt{5}}{5}), I(0, \frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}),$$

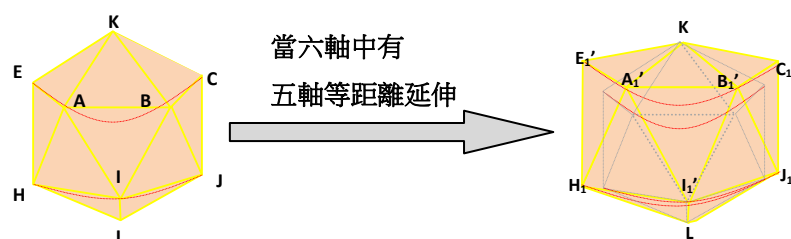
$$J(\frac{-5+\sqrt{5}}{10}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \frac{-\sqrt{5}}{5}), K(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \frac{-\sqrt{5}}{5}), L(0,0,-1)$$
當正二十面體之正三角形

邊長為 $\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$ 時，從原點拉長其它的點 x ，

(二十面體：第一、三層三角形面腰長為 $\sqrt{x^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{5}x + \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$ ，邊長為

$\sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)x^2 + \frac{20-4\sqrt{5}}{5}x + \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$ 等腰三角形；第二層三角形為長度為

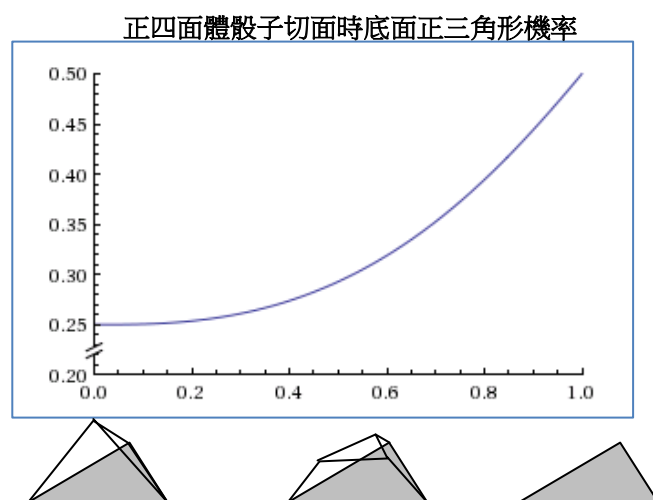
$$\sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)x^2 + \frac{20-4\sqrt{5}}{5}x + \frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \text{正三角形。}$$



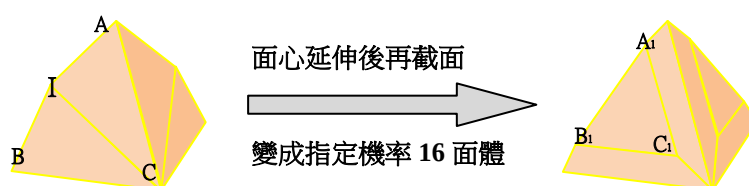
十一、產生指定機率的骰子：除了之前的例子，以下作法也可以達到此目的。

(一) 控制正四面體棱台高度：

代入底部正三角形面機率 $\frac{1}{4\pi} * (3 * \arccos \frac{b^2(3c^2+2c+1)^2-8(c^2+c+1)^2}{2(b^2(3c^2+2c+1)^2+4(c^2+c+1)^2)} - \pi)$ 中，所以控制正四面體棱台高度，底部正三角形面的機率會從正四面體（0.25）變到棱台到最後厚度趨近 0 的正三角形（0.5）（如下圖）



(二) 控制正多面體面中心延伸與頂點連線後再截角時的深度（如下圖）：



用前述正四面體為例，令 $\angle A_1OB_1 = \theta$, $\angle A_1OB_1 = \angle A_1OC_1 = \angle B_1OC_1$ ，如欲正三角 $A_1B_1C_1$

面指定機率為 P ，則立體角 $3 * \arccos \frac{\cos \theta - \cos \theta \cos \theta}{\sin \theta \sin \theta} - \pi$ 須等於 $4\pi * P$ ，所以 $\cos \theta =$

$\frac{\cos \frac{\pi(4P+1)}{3}}{1 - \cos \frac{\pi(4P+1)}{3}}$ ，當 x, y 滿足 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + x - y\right)^2 + \frac{4y^2}{3x^2} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + x - y\right) \frac{2\sqrt{3}y}{3x} \cos \theta = \frac{2y^2}{x^2} - ①$ 的關係，

就可以產生機率為 P 的骰子。舉例：原來不等面公平骰子之正三角面與三個梯形面機率

皆為 $\frac{1}{16}$ ，現將正三角面機率 P 指定為 $\frac{1}{8}$ ，則梯形面將變成 $\frac{1}{24}$ ，此時 $\cos \theta = 0$ ，所以

①就變成 $\frac{\sqrt{6}}{6} + x - y = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{3}x}$ ，即當正三角面機率為 $\frac{1}{8}$ 時的 x, y 方程式。

十二、 不增加頂點下公平骰子之間如何演變：

(一) 一軸固定，其他軸轉動：以正六面體為例（如下圖一）。

1. 八個頂點的正六面體變成相同八個頂點的十二面體：

當 $\overline{CH}$ 、 $\overline{EF}$ 及 $\overline{DG}$ 分別與 $\overline{AB}$ 軸垂直且與外接球相交於 C_1 、 H_1 、 E_1 、 F_1 、 D_1 及 G_1 ，所以此六點位於同一平面的正六角形，因為 $\overline{AB}$ 軸位於中垂線上，所以此時形成八個頂點的十二面體公平骰子（如下圖二）。

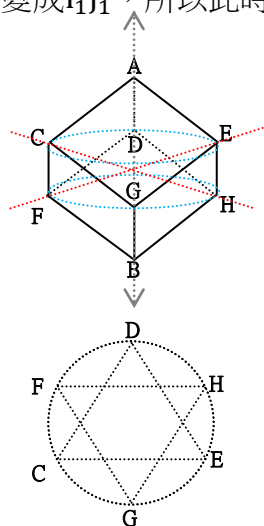
2. 正六面體變成五個頂點的六面體：

沿續上例，當 H_1 、 F_1 及 G_1 ，在原來平面轉 60° 後會與 C_1 、 E_1 、 D_1 重合，所以此時會形成五個頂點的六面體公平骰子（如下圖三）。

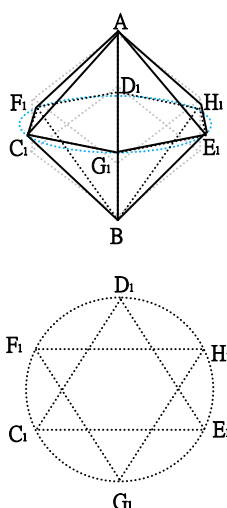
3. 正六面體變成六個頂點的正八面體：

除了可利用面心轉頂點而成對偶正多面體，這裡也可以用軸線轉動的方式。

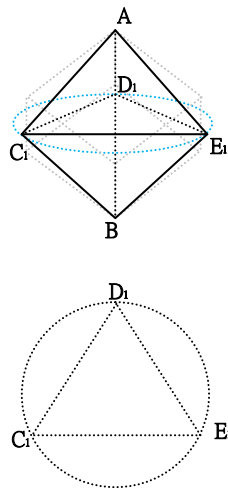
當在之前的十二面體中的 $\overline{C_1H_1}$ 與 $\overline{E_1F_1}$ 分別與 $\overline{D_1G_1}$ 垂直時，此時 $\overline{C_1H_1}$ 與 $\overline{E_1F_1}$ 會重合而變成 $\overline{I_1J_1}$ ，所以此時會形成六個頂點的正八面體。



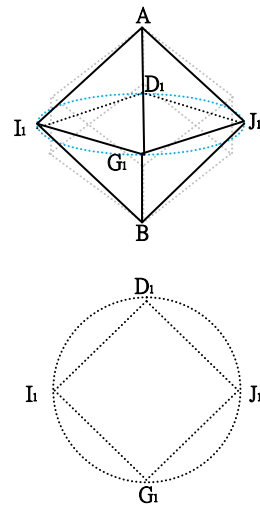
圖一：正六面體



圖二：十二面體



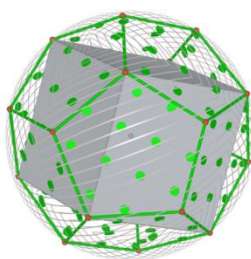
圖三：六面體



圖四：正八面體

(二) 以對角線對稱地截面而變成另一種正多面體。

二十個頂點的正十二面體變成八個頂點的正六面體（如下圖）：令正五邊形面上的邊長為 a ，則對角線長為 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})a$ ，若以對角線為邊長，可以構成一個正六面體，此時正十二面體與正六面體都有相同大小的外接球。所以當正十二面體邊長為 a ，則外接球半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})a$ ，同時，正六面體邊長為 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})a$ 。



伍、討論與未來展望

以下的問題可以繼續研究與探討：

- 一、電子顯微鏡下可以看到很多病毒結晶形狀是由正三角形組成的二十面體(參考〔九〕)，同時科學家發現如果病毒的幾何結構改變，將可能干擾其複製或改變其毒性。因此如何改變正二十面體的形狀或與其他多面體合併，進而可以控制病毒，達到治療疾病效果，也是可以探討的方向。

陸、結論

在這份研究中，改變了一般大眾所熟知的正立方體骰子的形狀，探討其出現某些面的機率，也改變了重心的位置，並引進了立體角的概念作為研究的方法：首先討論的為一正 n 角柱體的骰子，我們改變了面的大小和高度的比，觀察其機率的變化；接下來是正稜台的骰子，改變上下面大小的比，還有柱體和角錐體合體的骰子，改變柱體和錐體高的比例，可以發現與機率的關係。

正多面體可利用類似康威多面體表示法，或其他方式演變成各式各樣的骰子。而要產生指定機率的骰子也是可行的。

柒、參考資料

- 一、鄭黃昱翔(2012)・旋轉硬幣的機率・中華民國第五十二屆中小學科學展覽會，高中組數學科。
- 二、陳威尹(1999)・高維正形體・高雄市立高雄高級中學 88 學年度小論文比賽作品。
- 三、項武義(2004 年 6 月 19 日)・基礎幾何學七、球面幾何和球面三角學・取自：
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_07/。
- 四、鄭元博(2003)・多面體重心的幾何作法・科學教育月刊，259，29-32。
- 五、李信昌・凸四邊形的重心・取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_07/。
- 六、中央極值定理。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E6%9E%81%E9%99%90%E5%AE%9A%E7%90%86>
- 七、康威多面體表示法。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%B7%E5%A8%81%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94%E8%A1%A8%E7%A4%BA%E6%B3%95>
- 八、施萊夫利符號。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%BD%E8%8E%B1%E5%A4%AB%E5%88%A9%E7%AC%A6%E5%8F%B7>
- 九、用對稱性對付病毒・取自：<http://www.guokr.com/scientific>。