有限相連排列

新北市立中和高級中學 張宏彬
指導老師 趙志益

摘要

本研究是處理關於有相連個數限制的直線、特殊環狀與環狀排列問題。首先，利用樹狀圖尋找各個文字之間的關係，再利用這些關係求得直線排列的遞迴式；接著，利用遞迴式和生成函數求出直線排列的一般式。

對於特殊環狀排列則先以直線排列的想法計算，再扣除頭尾相連的情形，得到直線排列與特殊環狀排列之間的關係式，以及特殊環狀排列的一般式。

環狀排列時則利用特殊環狀排列的結果，引入 *Burnside's lemma* 計算，得到特殊環狀排列與環狀排列之間的關係式和一般式。

1 簡介

1.1 研究動機

我在同學帶回來的題目中看到非常有趣的一題：「對每一個正整數 n，設 $\ell(n)$ 表所有由文字 A 或 B 所形成的長度為 n (即 n 個文字排列)的序列，每一個序列不能有超過 3 個 A 連在一起，也不能有超過 3 個 B 連在一起，試問 $\ell(2015)$ 除以 12 的餘數為何?」。

舉例：$n=5$ 時，有 $5A,4A1B,3A2B,2A3B,1A4B,5B$ 六種情形。其中，$5A,5B$ 不合，$4A1B,1A4B,$ 部分不合，所以 $\ell(5)=2^5-5A-5B-BAAAA-AAAAB-BBBBA-ABBBB=26$ 。

我們觀察發現，在此特例下排列數有以下關係式：$\ell(n)=\ell(n-1)+\ell(n-2)+\ell(n-3) \quad (n\geq 4)$。

所以我們考慮更一般的情形，給定 p 種相異的文字 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ ，我們主要是研究三種不同的排列方法的排列數：$\ell(n)$ 為 n 個文字的直線排列數、$f(n)$ 為 n 個文字的位置有編號的環狀排列數、$c(n)$ 為 n 個文字的特殊環狀排列數。而對於相連限制數又分為兩種： p 種文字皆最多 m 個相連、 p 種文字中的 A_1 最多 q 個相連。所以總共會有 6 種情形。

而原來的問題在以上的設定下，就是在探討當 $p=2$ 、$m=3$ 且 p 種文字皆最多 m 個相連限制下 $\ell(2015) \bmod 12$ 的值。

1.2 名詞定義

1.2.1 文字種類以及限制推廣

(1) (p 值) 將文字種類數由二種文字推向 p 種文字 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ 。

(2) (m 值) 將相連限制數由皆最多三個相連推向皆最多 m 個相連。

(3) (q 值) 將相連限制改為只有一種文字有限制，並將相連限制數推向最多 q 個相連。

(4) (特殊環狀排列) 為位置有編號的環狀排列，即旋轉視為不同排列方法，也可以看成直線排列多考慮頭尾相連的情形。例如：當 $A_1=A$ 且 $A_2=B$ 時，$AAAB$ 有以下四種特殊環狀排列方法。

```
  A         A         B         A
A   A     A   B     A   A     B   A
  B         A         A         A
```

1.2.2 定義符號

(1) $\ell(n)$ 為 n 個文字的直線排列數。

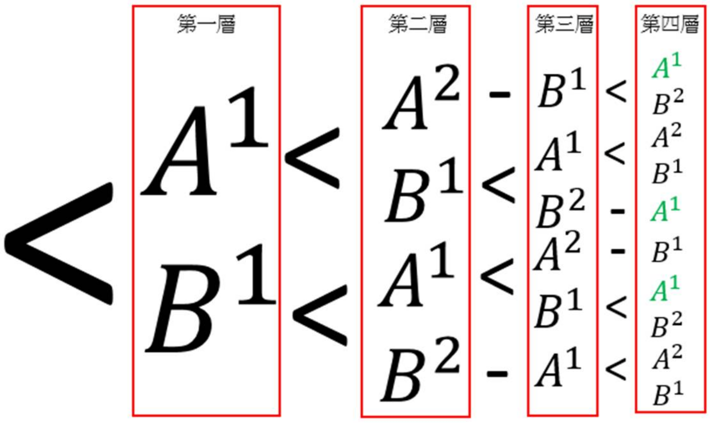
(2) $f(n)$ 為 n 個文字的特殊環狀排列數。

(3) $c(n)$ 為 n 個文字的環狀排列數。

(4) A_i^k 為連續 k 個以上的 A_i 的直線連串中(由左至右)的第 k 個 A_i。例如：當 $A_1 = A$ 且 $A_2 = B$ 時，$ABAAAA$ (其中 $AAAA$ 那一串的的第二個 A 表示為 A^2)，則整個直線排列為 $A^1B^1A^1A^2A^3A^4$ 。

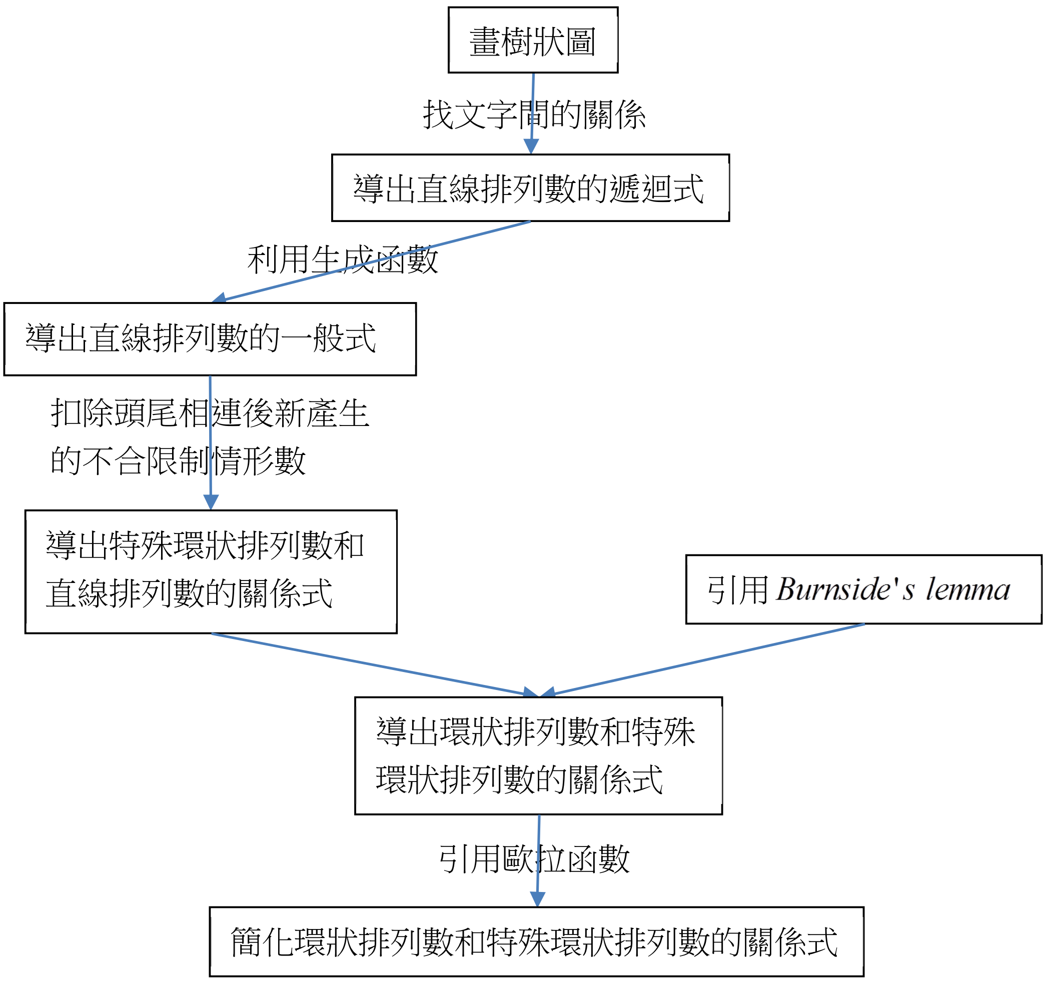
(5) $A_i^k(y)$ 為 n 個文字排列時 $(其中 y \le n)$ ，樹狀圖第 y 層為 A_i^k 的總個數。

例如：當 $p=2$ 、 $m=2$ 、 $A_1 = A$ 且 $A_2 = B$ 時， $A^1(4)$ 為樹狀圖第 4 層為 A^1 的總個數，即下圖中的三個 A^1 ，也就是說 $A^1(4)=3$ ，而這三種情形分別是 $AABA$ 、 $ABBA$ 及 $BABA$ 。



(6) $A_i(y)$ 為 n 個文字排列時 $(其中 y \le n)$ ，樹狀圖第 y 層為 A_i 的總個數， $A_i(y) = \sum_k A_i^k(y)$ 。

1.3 研究架構



1.4 研究目的

1.4.1 探討 p 種文字皆最多 m 個相連時，$\ell(n)$ 的遞迴式和一般式。

1.4.2 探討 p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$\ell(n)$ 的遞迴式和一般式。

1.4.3 探討 p 種文字皆最多 m 個相連時，$f(n)$ 和 $\ell(n)$ 的關係式。

1.4.4 探討 p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$f(n)$ 和 $\ell(n)$ 的關係式。

1.4.5 探討 p 種文字皆最多 m 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式。

1.4.6 探討 p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式。

2 研究過程

2.1 直線排列

在求直線排列數的遞迴式之前，先探討文字之間的關係。

定理 1. 若 p 種文字為 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_p$，則 $\ell(y)=\sum_{i=1}^{p} A_i(y)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k} A_i^k(y)$。

證明. 任何一種符合限制的直線排列，其排列方法可以用最後一個文字為 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_p$ 來做分類即 $\ell(y)=\sum_{i=1}^{p} A_i(y)$，又因為 $A_i(y)=\sum_{k} A_i^k(y)$，故 $\ell(y)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k} A_i^k(y)$。 □

定理 2. 若 A_j 為 p 種文字的其中一種文字，且 A_j 沒有相連限制，則 $A_j(y)=\ell(y-1)$。

證明. 在樹狀圖第 $y-1$ 層的每個文字皆有一個 A_j 的分枝，故 $A_j(y)=\ell(y-1)$。 □

定理 3. 若 A_j 為 p 種文字的其中一種文字，且 A_j 有相連限制，則 $A_j^1(y)=\ell(y-1)-\sum_{k} A_j^k(y-1)$。

證明. 在樹狀圖第 $y-1$ 層的所有文字中，除了 A_j 沒有 A_j^1 的分枝以外，其餘的文字皆有一個 A_j^1 的分枝，則 $A_j^1(y)=\ell(y-1)-A_j(y-1)$，又因 $A_j(y)=\sum_{k} A_j^k(y)$，故 $A_j^1(y)=\ell(y-1)-\sum_{k} A_j^k(y-1)$。 □

定理 4. 若 A_i 為 p 種文字的其中一種文字，則 $A_i^k(y)=A_i^1(y-k+1)$。

證明. 因為 A_i^k 為連續 k 個以上的 A_i 連串中(由左至右)的第 k 個 A_i，所以在樹狀圖第 $y-k+1$ 層的每個 A_i^1 皆有一個連續 $k-1$ 個 A_i 所組成的分枝，故 $A_i^k(y)=A_i^1(y-k+1)$。 □

2.1.1 探討 p 種文字皆最多 m 個相連時，$\ell(n)$ 的遞迴式和一般式。

定理 5. p 種文字皆最多 m 個相連時，$\ell(n)$ 的遞迴式為 $\ell(n)=\begin{cases} p^n & (1\le n\le m) \text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m}\ell(n-k) & (n\ge m+1) \text{。}\end{cases}$

證明. 當 $1\le n\le m$ 時，直線排列不會受到相連限制影響，則 n 個文字皆有 p 種選擇，即 $\ell(n)=p^n$。當 $n\ge m+1$ 時，以下提供兩種做法；

<法一>：由定理 1 可知 $\ell(n)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k} A_i^k(n)$，又因為任意一種滿足條件的直線排列中的任意一條連串皆不會有一條連串由超過 m 個文字相連而成，所以對於任意 A_i^k，其上標 k 不會超過 m，即

$$\ell(n)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} A_i^k(n) \text{，}$$

接著因為定理 4 可知 $A_i^k(y)=A_i^1(y-k+1)$，所以 $\ell(n)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}A_i^k(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}A_i^k(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}A_i^1(n-k+1)$

，然後因為定理 3 可知 $A_j^1(y)=\ell(y-1)-\sum_{k}A_j^k(y-1)$，即 $A_i^1(y)=\ell(y-1)-\sum_{k=1}^{m}A_i^k(y-1)$，所以

$$\ell(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}A_i^1(n-k+1)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}\left[\ell(n-k)-\sum_{k'=1}^{m}A_i^{k'}(n-k)\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{p}\ell(n-k)-\sum_{i=1}^{p}\sum_{k'=1}^{m}A_i^{k'}(n-k)\right],$$

最後又因為定理 1 可知 $\ell(n)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k}A_i^k(n)$，即 $\ell(n-k)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k'=1}^{m}A_i^{k'}(n-k)$，所以

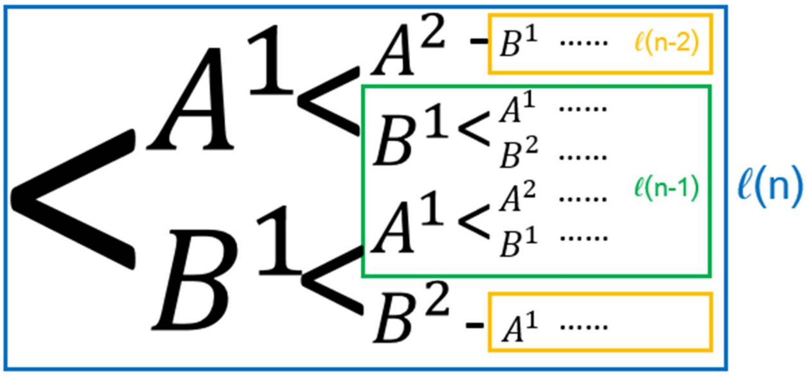
$$\ell(n)=\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{p}\ell(n-k)-\sum_{i=1}^{p}\sum_{k'=1}^{m}A_i^{k'}(n-k)\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[p\times\ell(n-k)-\ell(n-k)\right]=(p-1)\sum_{k=1}^{m}\ell(n-k)。$$

<法二>：取 $k\ge 1$ 使得前 k 個文字都相同、且第 $k+1$ 個文字和它們都不同。此時，由相連限制可知 $1\le k\le m$。除了前 k 個文字以外，剩下的 $n-k$ 個文字的直線排列數為 $\ell(n-k)$。任意一個由 $n-k$ 個文字組成的直線排列，假如這個直線排列是 A_i 開頭，那前 k 個文字只能選擇除了 A_i 的另外 $p-1$ 種文字。即 $\ell(n)=(p-1)\sum_{k=1}^{m}\ell(n-k)$。故

$$\ell(n)=\begin{cases}p^n & (1\le n\le m)\,，\\ (p-1)\sum_{k=1}^{m}\ell(n-k) & (n\ge m+1)\,。\end{cases}$$

□

例如：當 $p=2$、$m=2$、$A_1=A$ 且 $A_2=B$ 時，可以從下圖看出 $\ell(n)=\ell(n-1)+\ell(n-2)$。



定理 6. p **種文字皆最多** m **個相連時，**$\ell(n)$ **的一般式為**

$$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{m+1}\right]}(-1)^t(p-1)^{t-1}p^{n-(m+1)t}\left[\binom{n-mt}{t}p-\binom{n-mt-1}{t}\right]。$$

證明. 由於已知遞迴式，所以利用生成函數，設 $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(n)z^n$，則

$$\left(1-(p-1)\sum_{k=1}^{m}z^k\right)F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(n)z^n-(p-1)\sum_{n=2}^{\infty}\ell(n-1)z^n-(p-1)\sum_{n=3}^{\infty}\ell(n-2)z^n-\cdots-(p-1)\sum_{n=m+1}^{\infty}\ell(n-m)z^n$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left[\ell(n)-(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}\ell(n-k)\right]z^n+\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\ell(n)-(p-1)\sum_{k=1}^{m}\ell(n-k)\right]z^n$$

由定理 5 可知 $\ell(n)=\begin{cases}p^n & (1\le n\le m)\,，\\ (p-1)\sum_{k=1}^{m}\ell(n-k) & (n\ge m+1)\,，\end{cases}$ 所以

$$\left(1-(p-1)\sum_{k=1}^{m}z^k\right)F(z)=\sum_{n=1}^{m}\left[p^n-(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}p^{n-k}\right]z^n=\sum_{n=1}^{m}\left[p^n-(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}p^k\right]z^n。$$

由於$(p-1)\sum_{k=1}^{n-1} p^k = p^n - p$，所以$\left(1-(p-1)\sum_{k=1}^{m} z^k\right)F(z)=\sum_{n=1}^{m} pz^n$，即$F(z)=\dfrac{p\sum_{n=1}^{m} z^n}{1-(p-1)\sum_{k=1}^{m} z^k}$。

令$\sum_{n=1}^{m} z^n = u$，則$F(z)=\dfrac{pu}{1-(p-1)u}$，當$|(p-1)u|<1$時，此式可以改為

$$F(z)=\frac{pu}{1-(p-1)u}=pu\sum_{k=0}^{\infty}(p-1)^k u^k=\sum_{i=1}^{\infty} p(p-1)^{i-1}u^i ,$$

其中$u^i=\left(\sum_{n=1}^{m} z^n\right)^i=\left(\dfrac{z-z^{m+1}}{1-z}\right)^i=z^i\left(1-z^m\right)^i(1-z)^{-i}$，當$|z|<1$，由二項式定理和負二項式定理可得

$$u^i=z^i\left(1-z^m\right)^i(1-z)^{-i}=z^i\left(\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}z^{mt}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j-1}{j}z^j\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{i+j-1}{j}z^{mt+i+j} 。$$

設$mt+i+j=n$，則$u^i=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{n-mt-i}z^n$，所以

$$\begin{aligned}F(z)&=\sum_{i=1}^{\infty}p(p-1)^{i-1}u^i=\sum_{i=1}^{\infty}p(p-1)^{i-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{n-mt-i}z^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}p(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{n-mt-i}z^n\end{aligned}$$

又因$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(n)z^n$，可得$\ell(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}p(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{n-mt-i}$。

由於$\binom{n_1}{-n_2}=0$ (n_1為非負整數，n_2為正整數)，所以$n-mt-i\ge 0$，即$i\le n-mt$，又因$t\le i$，所以$t\le n-mt$，得$t\le\dfrac{n}{m+1}$，由於t為正整數，所以$t\le\left[\dfrac{n}{m+1}\right]$，故$i$、$t$的範圍為

$$t\le i\le n-mt ,\quad 0\le t\le\left[\frac{n}{m+1}\right],$$

又因為$n-mt-i$為非負整數，所以$n-mt-1$為非負整數，因此$\binom{n-mt-1}{n-mt-i}=\binom{n-mt-1}{i-1}$，所以

$$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{m+1}\right]}\sum_{i=t}^{n-mt}p(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{i-1} 。$$

其中$p(-1)^t$為和i無關的部分，故$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{m+1}\right]}p(-1)^t\sum_{i=t}^{n-mt}(p-1)^{i-1}\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{i-1}$，以下我將利用二項式定理以及微分來簡化$\sum_{i=t}^{n-mt}(p-1)^{i-1}\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{i-1}$。

考慮$(1+z)^{n-mt-1}=\sum_{k=0}^{n-mt-1}\binom{n-mt-1}{k}z^k=\sum_{i=1}^{n-mt}\binom{n-mt-1}{i-1}z^{i-1}$，將此式微分$t-1$次得

$$\left(\frac{[n-mt-1]!}{[n-(m+1)t]!}\right)(1+z)^{n-(m+1)t}=\sum_{i=t}^{n-mt}\left(\frac{(i-1)!}{(i-t)!}\right)\binom{n-mt-1}{i-1}z^{i-t} ,$$

再將左右同乘以z^t之後再微分一次，得

$$\left(\frac{[n-mt-1]!}{[n-(m+1)t-1]!}\right)(1+z)^{n-(m+1)t-1}z^t+t\left(\frac{[n-mt-1]!}{[n-(m+1)t]!}\right)(1+z)^{n-(m+1)t}z^{t-1}=\sum_{i=t}^{n-mt}\left(\frac{i!}{(i-t)!}\right)\binom{n-mt-1}{i-1}z^{i-1} ,$$

左右同除以$t!$，且令$z=p-1$，則

$$p^{n-(m+1)t-1}\left(p-1\right)^{t-1}\left[\binom{n-mt-1}{t}\left(p-1\right)+\binom{n-mt-1}{t-1}p\right]=\sum_{i=t}^{n-mt}\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{i-1}\left(p-1\right)^{i-1}，$$

整理得$\left(p-1\right)^{t-1}p^{n-(m+1)t-1}\left[\binom{n-mt}{t}p-\binom{n-mt-1}{t}\right]=\sum_{i=t}^{n-mt}\left(p-1\right)^{i-1}\binom{i}{t}\binom{n-mt-1}{i-1}$，

$$故\ \ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{m+1}\right]}\left(-1\right)^{t}\left(p-1\right)^{t-1}p^{n-(m+1)t}\left[\binom{n-mt}{t}p-\binom{n-mt-1}{t}\right]。$$

□

2.1.2 探討p種文字中的一種文字A_1最多q個相連時，$\ell(n)$的遞迴式和一般式。

定理 7. p種文字中的一種文字A_1最多q個相連時，$\ell(n)$的遞迴式為

$$\ell(n)=\begin{cases}p^n & (q\ge n)\ ，\\ p^n\text{-}1 & (n=q+1)\ ，\\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k) & (n\ge q+2)\ 。\end{cases}$$

證明. 當$1\le n\le q$時，直線排列不會受到相連限制影響，則n個文字皆有p種選擇，即$\ell(n)=p^n$。當$n=q+1$時，扣掉$q+1$個文字都是A_1的情形，所以此時$\ell(n)=p^{q+1}-1$。

當$n\ge q+2$時，以下提供兩種做法；

<法一>：由定理 1 可知$\ell(n)=\sum_{i=1}^{p}A_i(n)$，又因為任意一種滿足條件的直線排列中的任意一條連串皆不會有一條A_1連串由超過q個文字A_1相連而成，所以對於任意A_1^k，其上標k不會超過q，即$A_1(n)=\sum_{k=1}^{q}A_1^k(n)$，所以直線排列數$\ell(n)$可以改寫為$\ell(n)=\sum_{k=1}^{q}A_1^k(n)+\sum_{i=2}^{p}A_i(n)$，

接著因為定理 4 可知$A_1^k(y)=A_1^1(y-k+1)$，所以

$$\ell(n)=\sum_{k=1}^{q}A_1^k(n)+\sum_{i=2}^{p}A_i(n)=\sum_{k=1}^{q}A_1^1(n-k+1)+\sum_{i=2}^{p}A_i(n)，$$

然後因為定理 3 可知$A_1^1(y)=\ell(y-1)-\sum_{k=1}^{q}A_1^k(y-1)$，即$A_1^1(y)=\sum_{i=2}^{p}A_i(y-1)$，所以

$$\ell(n)=\sum_{k=1}^{q}A_1^1(n-k+1)+\sum_{i=2}^{p}A_i(n)=\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=2}^{p}A_i(n-k)+\sum_{i=2}^{p}A_i(n)=\sum_{k=0}^{q}\sum_{i=2}^{p}A_i(n-k)，$$

再來因為定理 2 可知$A_i(y)=\ell(y-1)\quad(i=2,3,\ldots,p)$，所以

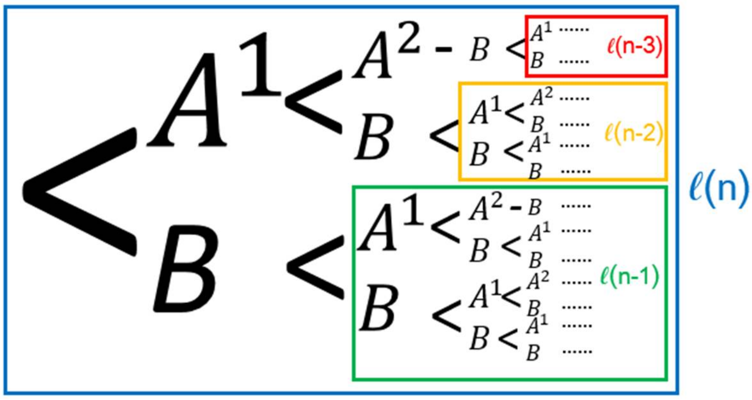
$$\ell(n)=\sum_{k=0}^{q}\sum_{i=2}^{p}A_i(n-k)=\sum_{k=0}^{q}\sum_{i=2}^{p}\ell(n-k-1)=\sum_{k=1}^{q+1}(p-1)\ell(n-k)=(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k)。$$

<法二>：取$k\ge1$使得前$k-1$個文字都為A_1、且第k個文字不是A_1。此時，由相連限制可知$1\le k\le q+1$。除了前k個文字以外，剩下的$n-k$個文字的直線排列數為$\ell(n-k)$、且因為前$k-1$個文字都為A_1，所以第k個文字有$p-1$種選擇。即$\ell(n)=(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k)$。故

$$\ell(n)=\begin{cases}p^n & (q\ge n)\ ，\\ p^n\text{-}1 & (n=q+1)\ ，\\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k) & (n\ge q+2)\ 。\end{cases}$$

□

例如：當 $p=2$ 、 $q=2$ 、 $A_1=A$ 且 $A_2=B$ 時，可以從下圖看出 $\ell(n)=\ell(n-1)+\ell(n-2)+\ell(n-3)$ 。



定理 8. p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時， $\ell(n)$ 的一般式為

$$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n+1}{q+2}\right]}(-1)^t(p-1)^{t-1}p^{n-(q+2)t}\left[\binom{n-(q+1)t+1}{t}p-\binom{n-(q+1)t}{t}\right]。$$

證明. 由於已知遞迴式，所以利用生成函數，設 $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(n)z^n$ ，則

$$\left(1-(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}z^k\right)F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(n)z^n-(p-1)\sum_{n=2}^{\infty}\ell(n-1)z^n-\sum_{n=3}^{\infty}\ell(n-2)z^n-\cdots-(p-1)\sum_{n=q+2}^{\infty}\ell(n-m+1)z^n$$

$$=\sum_{n=1}^{q+1}\left[\ell(n)-(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}\ell(n-k)\right]z^n+\sum_{n=q+2}^{\infty}\left[\ell(n)-(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k)\right]z^n ,$$

由定理 7 可知 $\ell(n)=\begin{cases}p^n & (q\ge n) ,\\ p^n\text{-}1 & (n=q+1) ,\\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k) & (n\ge q+2) ,\end{cases}$ 所以

$$\left(1-(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}z^k\right)F(z)=\sum_{n=1}^{q}\left[p^n-(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}p^{n-k}\right]z^n+\left[p^{q+1}-1-(p-1)\sum_{k=1}^{q}p^{q+1-k}\right]z^{q+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{q+1}\left[p^n-(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}p^k\right]z^n-z^{q+1} ,$$

由於 $(p-1)\sum_{k=1}^{n-1}p^k=p^n-p$ ，所以 $\left(1-(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}y^k\right)F(z)=\sum_{n=1}^{q+1}pz^n-z^{q+1}$ ，即 $F(z)=\dfrac{p\sum_{k=1}^{q+1}z^k-z^{q+1}}{1-(p-1)\sum_{k=1}^{q+1}z^k}$ ，

令 $\sum_{k=1}^{q+1}z^k=u$ ，則 $F(z)=\dfrac{pu-z^{q+1}}{1-(p-1)u}$ ，當 $|(p-1)u|<1$ 時，此式可以改為

$$F(z)=\frac{pu-z^{q+1}}{1-(p-1)u}=\left(pu-z^{q+1}\right)\sum_{i=0}^{\infty}(p-1)^iu^i=p\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^{i-1}u^i-z^{q+1}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^iu^i\right) ,$$

其中 $u^i=\left(\sum_{k=1}^{q+1}z^k\right)^i=\left(\dfrac{z-z^{q+2}}{1-z}\right)^i=z^i\left(1-z^{q+1}\right)^i(1-z)^{-i}$ ，當 $|z|<1$ ，由二項式定理和負二項式定理可得

$$u^i=z^i\left(1-z^{q+1}\right)^i(1-z)^{-i}=z^i\left(\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}z^{(q+1)t}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j-1}{j}z^j\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{i+j-1}{j}z^{(q+1)t+i+j} ,$$

設 $(q+1)t+i+j=n$ ，則 $u^i=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n$ ，

所以 $F(z)$

$$= p\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^{i-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n - z^{q+1}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^i\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}p(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n - z^{q+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(p-1)^i(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^{n+q+1}$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(p-1)^i(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^{n+q+1}=\sum_{n=q+2}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}(p-1)^i(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)(t+1)-1}{n-(q+1)(t+1)-i}z^n$

$$=\sum_{n=q+2}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{i+1}(p-1)^i(-1)^{t-1}\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n\text{ ，}$$

所以 $F(z)=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}p(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n - z^{q+1} - \sum_{n=q+2}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{i+1}(p-1)^i(-1)^{t-1}\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}z^n$$

，又因 $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(n)z^n$ ，當 $n\geq q+2$ 時，可得

$$\ell(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i}p(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{i+1}(p-1)^i(-1)^{t-1}\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^{i-1}\left(\sum_{t=0}^{i}p(-1)^t\binom{i}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}+\sum_{t=1}^{i+1}(p-1)(-1)^t\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^{i-1}\left(\sum_{t=0}^{i+1}p(-1)^t\binom{i+1}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}-\sum_{t=1}^{i+1}(-1)^t\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}\right)\text{ ，}$$

其中 $(-1)^t\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}$ 的 $t=0$ 時， $(-1)^0\binom{i}{-1}\binom{n-1}{n-i}=0$ ，所以當 $n\geq q+2$ 時，

$$\ell(n)=\sum_{i=1}^{\infty}(p-1)^{i-1}\left(\sum_{t=0}^{i+1}p(-1)^t\binom{i+1}{t}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}-\sum_{t=0}^{i+1}(-1)^t\binom{i}{t-1}\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{i+1}(p-1)^{i-1}(-1)^t\binom{n-(q+1)t-1}{n-(q+1)t-i}\left(p\binom{i+1}{t}-\binom{i}{t-1}\right)\text{ ，}$$

同定理 6 的概念與討論，扣除大部分等於零的項以及利用微分可得

$$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n+1}{q+2}\right]}(-1)^t(p-1)^{t-1}p^{n-(q+2)t}\left[\binom{n-(q+1)t+1}{t}p-\binom{n-(q+1)t}{t}\right]\text{。}\qquad\square$$

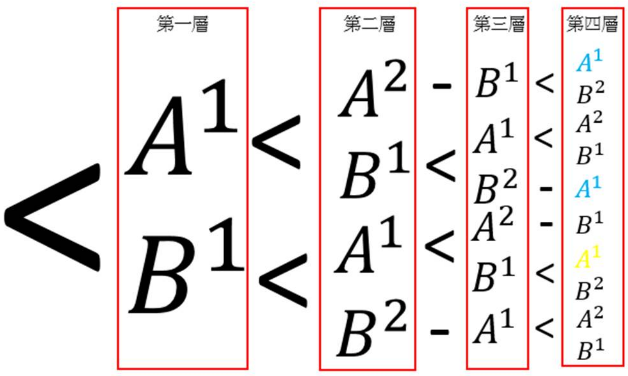
2.2 特殊環狀排列

2.2.1 探討 p 種文字皆最多 m 個相連時， $f(n)$ 和 $\ell(n)$ 的關係式以及 $f(n)$ 的一般式。

在求關係式之前，我先定義一些符號。

(1) $\overline{A_i^k(y)}$ 為 n 個文字排列且 A_1^1 開頭時(其中 $y\leq n$)，樹狀圖第 y 層為 A_i^k 的總個數。

例如：當 $p=2$、$m=2$、$A_1=A$ 且 $A_2=B$ 時，$\overline{A^1(4)}$ 為 A_1^1 開頭時，樹狀圖第 4 層為 A^1 的總個數，即右圖中的兩個 A^1，也就是說 $\overline{A^1(4)}=2$，而這兩種情形分別是 $AABA$ 及 $ABBA$ 。



(2) $\alpha_i(y)$ 為 n 個文字排列且 A_1^1 開頭時 $(\text{其中} y \le n)$，樹狀圖第 y 層為 A_i 的總個數，即
$\alpha_i(y)=\sum_k \overline{A_i^k(y)}$。
(3) $\alpha_i'(y)$ 為 n 個文字排列且 A_1^1 開頭時 $(\text{其中} y \le n)$，樹狀圖第 y 層不為 A_i 的總個數，即
$\alpha_i'(y)=\sum_j \alpha_j(y)-\alpha_i(y)$。

定理 9. 若 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ p **種文字皆最多** m **個相連，則** $\dfrac{\ell(y)}{p}=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(y)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\overline{A_i^k(y)}$。

證明. 任何一種符合限制的直線排列，其排列方法可以用第一個文字為 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ 來做分類，且無論是哪種文字開頭，方法數皆相同，所以 $\dfrac{\ell(y)}{p}=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(y)$，又因為 $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(y)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\overline{A_i^k(y)}$，故 $\dfrac{\ell(y)}{p}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\overline{A_i^k(y)}$。 □

定理 10. 若 A_j **最多** m **個相連，則** $\overline{A_j^1(y)}=\dfrac{\ell(y-1)}{p}-\alpha_j(y-1)$。

證明. 和定理 3 同理，在樹狀圖第 $y-1$ 層的所有文字中，除了 A_j 沒有 A_j^1 的分枝以外，其餘的文字皆有一個 A_j^1 的分枝，但這裡只考慮 A_1 開頭的情況，所以樹狀圖第 $y-1$ 層中的總情形為原本的 $\dfrac{1}{p}$ 倍，即 $\overline{A_j^1(y)}=\dfrac{\ell(y-1)}{p}-\alpha_j(y-1)$。 □

定理 11. 若 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ p **種文字皆最多** m **個相連，則**

$$\alpha_i'(n)=\begin{cases}\dfrac{p-1}{p^2}\ell(n)+\dfrac{1}{p} & n\equiv 1 \pmod{m+1}\text{，}\\[2mm] \dfrac{p-1}{p^2}\ell(n) & n\not\equiv 1\vee 0 \pmod{m+1}\ (i=2,3,\cdots,p)\text{，}\\[2mm] \dfrac{p-1}{p^2}\ell(n)-\dfrac{1}{p} & n\equiv 0 \pmod{m+1}\text{，}\end{cases}$$

證明. 由於 $\alpha_i'(n)=\dfrac{\ell(n)}{p}-\alpha_i(n)$ (A_1 開頭不是 A_i 結尾，看成 A_1 開頭任意結尾扣除 A_1 開頭 A_i 結尾)，所以我先求出 $\alpha_i(n)$ 在求 $\alpha_i'(n)$，當 $n=1$ 時，由於限定 A_1 開頭，且 $i\ne 1$，所以 $\alpha_1(1)-\alpha_i(1)=1$。
當 $2\le n\le m$ 時，A_1 開頭 A_1 結尾和 A_1 開頭 A_i 結尾兩種情況中，除了第一格文字和最後一格文字外，其餘格子皆可填入 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ ，所以兩種情形數皆等於 p 的冪次，故 $\alpha_1(n)-\alpha_i(n)=0$。
當 $n=m+1$ 時，A_1 開頭 A_1 結尾的情形數為 p 的冪次扣除全部填 A_1 這一種情形，且 A_1 開頭 A_i 結尾的情形數為 p 的冪次，所以 $\alpha_1(m+1)-\alpha_i(m+1)=-1$。
當 $n\ge m+2$ 時，$\alpha_1(n)-\alpha_i(n)=\sum_{k=1}^{m}\overline{A_1^k(n)}-\sum_{k=1}^{m}\overline{A_i^k(n)}=\sum_{k=1}^{m}\left[\overline{A_1^k(n)}-\overline{A_i^k(n)}\right]$，
由定理 4 可知 $A_i^k(y)=A_i^1(y-k+1)$，即 $\overline{A_i^k(n)}=\overline{A_i^1(n-k+1)}$，所以

$$\alpha_1(n)-\alpha_i(n)=\sum_{k=1}^{m}\left[\overline{A_1^k(n)}-\overline{A_i^k(n)}\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[\overline{A_1^1(n-k+1)}-\overline{A_i^1(n-k+1)}\right]\text{，}$$

由定理 10 可知 $\overline{A_j^1(y)}=\dfrac{\ell(y-1)}{p}-\alpha_j(y-1)$，即 $\overline{A_i^1(n-k+1)}=\dfrac{\ell(n)}{p}-\alpha_i(n-k)$，所以

$$\alpha_1(n)-\alpha_i(n)=\sum_{k=1}^{m}\left[\overline{A_1^1(n-k+1)}-\overline{A_i^1(n-k+1)}\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\frac{\ell(n)}{p}-\alpha_1(n-k)\right)-\left(\frac{\ell(n)}{p}-\alpha_i(n-k)\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left[-\alpha_1(n-k)+\alpha_i(n-k)\right]=-\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right]，$$

$$\Rightarrow \alpha_1(n)-\alpha_i(n)=-\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right] \tag{1}$$

$$\Rightarrow \alpha_1(n)-\alpha_i(n)=-\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right]=-\left[\alpha_1(x-1)-\alpha_i(x-1)\right]-\sum_{k=2}^{m}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right]，$$

將 $-\left[\alpha_1(n-1)-\alpha_i(n-1)\right]$ 利用 (1) 代換

$$\alpha_1(n)-\alpha_i(n)=\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha_1(n-1-k)-\alpha_i(n-1-k)\right]-\sum_{k=2}^{m}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right]$$

$$=\sum_{k=2}^{m+1}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right]-\sum_{k=2}^{m}\left[\alpha_1(n-k)-\alpha_i(n-k)\right]=\alpha_1(n-m-1)-\alpha_i(n-m-1)，$$

故 $\alpha_1(n)-\alpha_i(n)$ 為 $m+1$ 個一循環 $\Rightarrow \alpha_1(n)-\alpha_i(n)=\begin{cases}1 & n\equiv 1 \pmod{m+1}，\\ 0 & n\not\equiv 1\vee 0 \pmod{m+1}，\\ -1 & n\equiv 0 \pmod{m+1}。\end{cases}$

又因為 $\displaystyle\sum_{j=2}^{p}\alpha_j(n)=(p-1)\alpha_i(n)\quad (i=2,3,\cdots,p)\wedge \alpha_1(n)+\sum_{j=2}^{p}\alpha_j(n)=\frac{\ell(n)}{p}$

$\Rightarrow \alpha_1(n)+(p-1)\alpha_i(n)=\dfrac{\ell(n)}{p}$，

$$\Rightarrow \alpha_i(n)=\begin{cases}\dfrac{\ell(n)}{p^2}-\dfrac{1}{p} & n\equiv 1 \pmod{m+1}，\\[2mm] \dfrac{\ell(n)}{p^2} & n\not\equiv 1\vee 0 \pmod{m+1}，\\[2mm] \dfrac{\ell(n)}{p^2}+\dfrac{1}{p} & n\equiv 0 \pmod{m+1}，\end{cases}$$

$$故\ \alpha_i'(n)=\frac{\ell(n)}{p}-\alpha_i(n)=\begin{cases}\dfrac{p-1}{p^2}\ell(n)+\dfrac{1}{p} & n\equiv 1 \pmod{m+1}，\\[2mm] \dfrac{p-1}{p^2}\ell(n) & n\not\equiv 1\vee 0 \pmod{m+1}，\\[2mm] \dfrac{p-1}{p^2}\ell(n)-\dfrac{1}{p} & n\equiv 0 \pmod{m+1}。\end{cases}$$ □

定理 12. p 種文字皆最多 m 個相連時，$f(n)$ 和 $\ell(n)$ 的關係式為

$$f(n)=\begin{cases}p^x & (1\le n\le m)，\\[2mm] \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n)-\dfrac{(p-1)^2}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k)-(p-1) & (m+1\nmid n\wedge n\ge m+1)，\\[2mm] \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n)-\dfrac{(p-1)^2}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k)+m(p-1) & (m+1\mid n\wedge n\ge m+1)。\end{cases}$$

證明. 當$1 \le n \le m$時，特殊環狀排列和直線排列一樣不會受到相連限制影響，所以n個文字皆有p種選擇，所以此時$\ell(n) = p^n$。

當$n \ge m+1$時，我把特殊環狀排列看成頭尾會影響的直線排列，所以我把直線排列數扣除那些頭尾相接以後才會有超過m個相連的直線排列情形扣除，以求得特殊環狀排列數，所以

$$\begin{aligned} f(n) = \ell(n) &- p\text{"}A_i^1 A_1^1 \cdots A_j A_i^1 \cdots A_i^m\text{的方法數"} - p\text{"}A_i^1 A_i^2 A_1^1 \cdots A_j A_i^1 \cdots A_i^{m-1}\text{的方法數"} - \cdots - p\text{"}A_i^1 \cdots A_i^m A_1^1 \cdots A_j A_i^1\text{的方法數"} \\ &- p\text{"}A_i^1 A_i^2 A_1^1 \cdots A_j A_i^1 \cdots A_i^m\text{的方法數"} - \cdots - p\text{"}A_i^1 \cdots A_i^m A_1^1 \cdots A_j A_i^1\text{的方法數"} \\ &\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ &- p\text{"}A_i^1 \cdots A_i^m A_1^1 \cdots A_j A_i^1 \cdots A_i^m\text{的方法數"}, \end{aligned}$$

其中$A_i \ne A_1$，所以有$(p-1)$種選擇，且A_1為其他文字時則有p種選擇，故共有$p(p-1)$種選擇，其中的每個情形都有一部份為$A_1^1 \cdots A_j$，這種直線排列的情形數即為A_1開頭不是A_i結尾的情形數(其中代入的n為$A_1^1 \cdots A_j$的文字總數)，所以

$$f(n) = \ell(n) - p(p-1)m\alpha_i^1(n-m-1) - \cdots - p(p-1)\alpha_i^1(n-2m),$$

然後使用定理 11 將算式中的每個$\alpha_i^1(y)$換成直線排列數，則

$$f(n) = \begin{cases} \ell(n) - (p-1)^2 m\ell(n-m-1) - \cdots - (p-1)^2 \ell(n-2m) - (p-1)^2 & (m+1 \nmid n \wedge n \ge 2m+1), \\ \ell(n) - (p-1)^2 m\ell(n-m-1) - \cdots - (p-1)^2 \ell(n-2m) + m(p-1)^2 & (m+1 \mid n \wedge n \ge 2m+1), \end{cases}$$

接著利用定理 5 p種文字皆最多m個相連時，直線排列數的遞迴式

$$\ell(n) = \begin{cases} p^n & (1 \le n \le m), \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m} \ell(n-k) & (n \ge m+1), \end{cases}$$

將上式不斷往前推並觀察係得

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n) - \dfrac{(p-1)^2}{p}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k) - (p-1) & (m+1 \nmid n \wedge n \ge 2m+1), \\ \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n) - \dfrac{(p-1)^2}{p}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k) + m(p-1) & (m+1 \mid n \wedge n \ge 2m+1). \end{cases}$$

我驗證$m+1 \le n \le 2m$的範圍時，此式也成立，所以

$$f(n) = \begin{cases} p^n & (1 \le n \le m), \\ \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n) - \dfrac{(p-1)^2}{p}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k) - (p-1) & (m+1 \nmid n \wedge n \ge m+1), \\ \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n) - \dfrac{(p-1)^2}{p}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k) + m(p-1) & (m+1 \mid n \wedge n \ge m+1). \end{cases}$$

將直線排列數$\ell(n)$的一般式代入即可求得特殊環狀排列數$f(n)$的一般式。 □

2.2.2 探討p種文字中的一種文字A_1最多q個相連時，$f(n)$和$\ell(n)$的關係式以及$f(n)$的一般式。

定理 13. p種文字中的一種文字A_1最多q個相連時，$f(n)$和$\ell(n)$的關係式為

$$f(n) = \begin{cases} p^n & (1 \le n \le q), \\ -(p-1)\ell(n) + (p-1)(q+p)\ell(n-1) - (p-1)^2 \sum_{k=1}^{q-1}(q-k)\ell(n-k-1) & (n \ge q+1). \end{cases}$$

證明. 當$1 \le n \le q$時，特殊環狀排列和直線排列一樣不會受到相連限制影響，所以n個文字皆有p種選擇，所以此時$\ell(n) = p^n$。

當 $n \geq q+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
f(n)=\ell(n) &- \text{"}A_1^1A_i^1\cdots A_jA_1^1\cdots A_1^q\text{的方法數"} - \text{"}A_1^1A_1^2A_i^1\cdots A_jA_1^1\cdots A_1^q\text{的方法數"} - \cdots - \text{"}A_1^1\cdots A_1^qA_i^1\cdots A_jA_1^1\text{的方法數"} \\
&- \text{"}A_1^1A_1^2A_i^1\cdots A_jA_1^1\cdots A_1^q\text{的方法數"} - \cdots - \text{"}A_1^1\cdots A_1^qA_i^1\cdots A_jA_1^1\text{的方法數"} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&- \text{"}A_1^1\cdots A_1^qA_i^1\cdots A_jA^1\cdots A^q\text{的方法數"}
\end{aligned}
$$
，

其中的 A_i, A_j 不能為 A_1，所以 A_i ，A_j 各有 $(p-1)$ 種選擇，被扣除的每個情形都有一部份有 $A_i^1\cdots A_j$ ，因為 A_i, A_j 不為 A_1 ，所以 A_i, A_j 皆沒有相連限制，那 A_i, A_j 之間為任何一種符合限制的直線排列，所以每一項都可以換成直線排列數(其中代入的 n 為 $A_i^1\cdots A_j$ 的 A_i, A_j 之間的文字總數)，所以

$$f(n)=\ell(n)-(p-1)^2 q\ell(n-q-3)-(p-1)^2(q-1)\ell(n-q-4)-\cdots-(p-1)^2\ell(n-2q-2)$$
，

利用定理 7　p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，直線排列數的遞迴式

$$\ell(n)=\begin{cases} p^n & (q\geq n) \text{ ，} \\ p^n\text{-}1 & (n=q+1) \text{ ，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k) & (n\geq q+2) \text{ ，} \end{cases}$$

將上式不斷往前推並觀察係數得

$$f(n)=-(p-1)\ell(n)+(p-1)(q+p)\ell(n-1)-(p-1)^2\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)\ell(n-k-1) \qquad (n\geq 2q+3) \text{ 。}$$

我驗證 $q+1\leq n\leq 2q+2$ 的範圍時，此式也成立，所以

$$f(n)=\begin{cases} p^n & (1\leq n\leq q) \text{ ，} \\ -(p-1)\ell(n)+(p-1)(q+p)\ell(n-1)-(p-1)^2\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)\ell(n-k-1) & (n\geq q+1) \text{ 。} \end{cases}$$

將直線排列數 $\ell(n)$ 的一般式代入即可求得特殊環狀排列數 $f(x)$ 的一般式。 □

2.3 環狀排列

設 W 為所有符合相連限制的特殊環狀排列情形所組成的集合，$|W|=f(n)$ ，

且 $G=\{g_t \mid g_t w_1 = w_2 \wedge w_1, w_2 \in W \wedge t\in[0,n-1]\cap\mathbb{N}\}$ 表所有旋轉動作所組成的集合，則 $|G|=n$ 。(g_t 表示逆時針旋轉 t 格。)接著我們引入 *Burnside's lemma* 來算環狀排列數。

> *Burnside's lemma* ：
>
> 設 G 為作用在集合 W 上的排列群，若集合 $W_g=\{w\in W \mid gw=w\}$ 表示某個排列元素 g 作用在 W 上會保持不動的元素所組成的集合，則 $h=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|W_g|$ ，其中 h 表示集合 W 可分割出 h 個不同的等價類數目。

W_g 為某種特殊環狀排列經過某種旋轉動作 g 作用後，仍會相同的特殊環狀排列所組成的集合，h 則為符合限制的環狀排列的個數。

Burnside's lemma (群論)與有限相連排列的連結如下表：

Burnside's lemma 中的角色		有限相連排列
集合 W	$\Longleftrightarrow$	所有符合相連限制的特殊環狀排列情形所組成的集合。
W 中的元素 w	$\Longleftrightarrow$	任一種符合相連限制的特殊環狀排列情形。
動作群 G	$\Longleftrightarrow$	所有旋轉動作所組成的集合。
G 中的元素 g	$\Longleftrightarrow$	任一種旋轉動作。
不動群集合 W_g	$\Longleftrightarrow$	W_g 為某種特殊環狀排列經過某種旋轉動作 g 作用後，仍會相同的特殊環狀排列所組成的集合。
等價類數量 h	$\Longleftrightarrow$	h 種符合限制的環狀排列。

如果在某個 g 的作用下，第 $a_{(k,i)}$ 格會被轉到第 $a_{(k,i+1)}$ 格且第 $a_{(k,v)}$ 格會被轉到第 $a_{(k,1)}$ 格 $\left(k\in\left[1,\frac{n}{v}\right]\cap\mathbb{N}\wedge i\in[1,v-1]\cap\mathbb{N}\right)$，即稱 $\left(a_{(k,1)}a_{(k,2)}a_{(k,3)}\cdots a_{(k,v)}\right)$ 為一個 $cycle$，並把 g 表示成 $\left(a_{(1,1)}a_{(1,2)}\cdots a_{(1,v)}\right)\cdots\left(a_{\left(\frac{n}{v},1\right)}a_{\left(\frac{n}{v},2\right)}\cdots a_{\left(\frac{n}{v},v\right)}\right)$，$v$ 則稱為 $cycle$ 長度，其中 v 必整除 x。

(在本研究中，我們都將 g 表示為互斥的 $cycle$。)

定理 14. **所有** G **的元素** g **中使得** $cycle$ **長度為** v **的** g **共有** $\phi(v)$ **個。**

證明. g_t 為逆時針旋轉 t 格，則 g_t 的 $cycle$ 長度 $v=\frac{n}{(n,t)}$ $\left(t\in[1,n-1]\cap\mathbb{N}\right)$，且 g_0 的 $cycle$ 長度為 1。

假如 $(n,t)=b$，則 $n=bv$。設 $t=bu$，則 $(v,u)=1$。因為 $a\le n$，所以 $u\le v$。故 $cycle$ 長度為 v 的 g 有 $\phi(v)$ 個。 □

2.3.1 探討 p 種文字皆最多 m 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式以及 $c(n)$ 的一般式。

定理 15. p **種文字皆最多** m **個相連時，**$c(n)$ **和** $f(n)$ **的關係式為**

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{v|n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right) & (1\le n\le m)\ ,\\ \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{v|n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-p\sum_{\substack{k|n\\1\le k\le m}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right] & (n\ge m+1)\ 。\end{cases}$$

證明. 由 $Burnside's\ lemma$ 可知 $c(n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|W_g\right|$，其中 $|G|=n$ (逆時針轉 $0\sim n-1$ 格)，所以 $c(n)=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\left|W_g\right|$，以下我們將討論如何計算 $\left|W_g\right|$。

假設 g 的 $cycle$ 長度為 v 且 g 有 r 個互斥 $cycle$，並假設 $a_{(k,i)}=(i-1)r+k$ $\left(k\in[1,r]\cap\mathbb{N}\wedge i\in[1,v]\cap\mathbb{N}\right)$，則 $g=\left(a_{(1,1)}a_{(1,2)}\cdots a_{(1,v)}\right)\cdots\left(a_{(r,1)}a_{(r,2)}\cdots a_{(r,v)}\right)$，其中第 k 個 $cycle$ 內的所有格子必須填同一個文字符號，也可以想成是把某一個文字填入第 k 個 $cycle$。

假如從每個 $cycle$ 中取出一個 $a_{(k,i)}$，且每個 $cycle$ 中取出的 $a_{(k,i)}$ 的 i 是固定的，而這些 $a_{(k,i)}$ 在特殊環狀排列時是相連的位置，所以這些 $a_{(k,i)}$ 會受到相連的限制，即相異的 $cycle$ 間會受到相連的限制。

此外，假如從第一個 $cycle$ 取出 $a_{(1,i)}$ $\left(i\in[1,v]\cap\mathbb{N}\right)$，以及從最後一個 $cycle$ 取出 $a_{(r,i-1)}$ $\left(i\in[2,v+1]\cap\mathbb{N}\right)$，$a_{(1,i)}$ 和 $a_{(r,i-1)}$ 也會受到相連的限制，即第一個 $cycle$ 以及最後一個 $cycle$ 會受到相連的限制，也就是說，$\left|W_g\right|$ 可以看成 $f(r)$。

但當 $n\ge m+1$ 且 $r\le m$ 時，其中有一類可能性是 r 個 $cycle$ 中皆填入 p 種文字的某一種文字 A_i，此種情形為 n 個 A_i 排成環狀，和 A_i 最多 m 個相連矛盾，所以此時 $\left|W_g\right|=f(r)-p$，所以

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G}f(r) & (1\le n\le m)\ ,\\ \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{\substack{g\in G\\ r\ge m+1}}f(r)+\sum_{\substack{g\in G\\ r\le m}}\left(f(r)-p\right)\right] & (n\ge m+1)\ 。\end{cases}$$

(其中 $r=\frac{n}{v}$ 是被 g 所決定的。)

由定理 14 可知所有 G 的元素 g 中使得 $cycle$ 長度為 v 的 g 共有 $\phi(v)$ 個，所以原式可以改成

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{v\mid n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right) & (1\le n\le m)\ ,\\ \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{\substack{v\mid n\\ \frac{n}{v}\ge m+1}}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)+\sum_{\substack{v\mid n\\ \frac{n}{v}\le m}}\phi(v)\left(f\left(\frac{n}{v}\right)-p\right)\right] & (n\ge m+1)\ ,\end{cases}$$

其中 $\displaystyle\sum_{\substack{v\mid n\\ \frac{n}{v}\le m}}\phi(v)\left(f\left(\frac{n}{v}\right)-p\right)=\sum_{\substack{v\mid n\\ \frac{n}{v}\le m}}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-p\sum_{\substack{v\mid n\\ \frac{n}{v}\le m}}\phi(v)=\sum_{\substack{v\mid n\\ \frac{n}{v}\le m}}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-p\sum_{\substack{k\mid n\\ 1\le k\le m}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)$，故

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{v\mid n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right) & (1\le n\le m)\ ,\\ \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{v\mid n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-p\sum_{\substack{k\mid n\\ 1\le k\le m}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right] & (n\ge m+1)\ ,\end{cases}$$

將特殊環狀排列數 $f(n)$ 的一般式代入即可求得環狀排列數 $c(n)$ 的一般式。 □

2.3.2 p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式以及 $c(n)$ 的一般式。

定理 16. p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式為

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{v\mid n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right) & (1\le n\le q)\ ,\\ \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{v\mid n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-\sum_{\substack{k\mid n\\ 1\le k\le q}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right] & (n\ge q+1)\ 。\end{cases}$$

證明. 由 $Burnside's\ lemma$ 可知 $c(n)=\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G}|W_g|$，其中 $|G|=n$，所以 $c(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G}|W_g|$。

和定理 15 一樣假設 g 的 $cycle$ 長度為 v 且 g 有 r 個互斥 $cycle$，則 $|W_g|$ 可以看成 $f(r)$，但當 $n\ge q+1$ 且 $r\le q$ 時，其中有一種可能性是 r 個 $cycle$ 中皆 A_1，此種情形為 n 個 A_1 排成環狀，和 A_1 最多 q 個相鄰矛盾，所以此時 $|W_g|=f(r)-1$，則

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G}f(r) & (1\le n\le q)\ ,\\ \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{\substack{g\in G\\ r\ge q+1}}f(r)+\sum_{\substack{g\in G\\ r\le q}}\left(f(r)-1\right)\right] & (n\ge q+1)\ 。\end{cases}$$

(其中 $r=\dfrac{n}{v}$ 是被 g 所決定的。)

由定理 14 知所有 G 的元素 g 中使得 $cycle$ 長度為 v 的 g 共有 $\phi(v)$ 個，所以原式可以改成

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{v|n}\phi(v)f\left(\dfrac{n}{v}\right) & (1\le n\le q)\text{ ，}\\ \dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{\substack{v|n\\ \frac{n}{v}\ge q+1}}\phi(v)f\left(\dfrac{n}{v}\right)+\sum\limits_{\substack{v|n\\ \frac{n}{v}\le q}}\phi(v)\left(f\left(\dfrac{n}{v}\right)-1\right)\right] & (n\ge q+1)\text{ ，}\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{\substack{v|n\\ \frac{n}{v}\le q}}\phi(v)\left(f\left(\frac{n}{v}\right)-1\right)=\sum\limits_{\substack{v|n\\ \frac{n}{v}\le q}}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-\sum\limits_{\substack{v|n\\ \frac{n}{v}\le q}}\phi(v)=\sum\limits_{\substack{v|n\\ \frac{n}{v}\le q}}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-\sum\limits_{\substack{k|n\\ 1\le k\le q}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)$，故

$$c(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{v|n}\phi(v)f\left(\dfrac{n}{v}\right) & (1\le n\le q)\text{ ，}\\ \dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{v|n}\phi(v)f\left(\dfrac{n}{v}\right)-\sum\limits_{\substack{k|n\\ 1\le k\le q}}\phi\left(\dfrac{n}{k}\right)\right] & (n\ge q+1)\text{ 。}\end{cases}$$

將特殊環狀排列數$f(x)$的一般式代入即可求得環狀排列數$c(x)$的一般式。 □

3 研究結論

3.1 直線排列

定理 5. p 種文字皆最多m個相連時，$\ell(n)$的遞迴式為$\ell(n)=\begin{cases}p^n & (1\le n\le m)\text{ ，}\\ (p-1)\sum\limits_{k=1}^{m}\ell(n-k) & (n\ge m+1)\text{ 。}\end{cases}$

定理 6. p 種文字皆最多m個相連時，$\ell(n)$的一般式為

$$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{m+1}\right]}(-1)^t(p-1)^{t-1}p^{n-(m+1)t}\left[\binom{n-mt}{t}p-\binom{n-mt-1}{t}\right]\text{。}$$

定理 7. p 種文字中的一種文字 A_1 最多q 個相連時，$\ell(n)$的遞迴式為

$$\ell(n)=\begin{cases}p^n & (q\ge n)\text{ ，}\\ p^n\text{-}1 & (n=q+1)\text{ ，}\\ (p-1)\sum\limits_{k=1}^{q+1}\ell(n-k) & (n\ge q+2)\text{ 。}\end{cases}$$

定理 8. p 種文字中的一種文字 A_1 最多q 個相連時，$\ell(n)$的一般式為

$$\ell(n)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{n+1}{q+2}\right]}(-1)^t(p-1)^{t-1}p^{n-(q+2)t}\left[\binom{n-(q+1)t+1}{t}p-\binom{n-(q+1)t}{t}\right]\text{。}$$

3.2 特殊環狀排列

定理 12. p 種文字皆最多m個相連時，$f(n)$和$\ell(n)$的關係式為

$$f(n)=\begin{cases}p^n & (1\le n\le m)\text{ ，}\\ \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n)-\dfrac{(p-1)^2}{p}\sum\limits_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k)-(p-1) & (m+1\nmid n\wedge n\ge m+1)\text{ ，}\\ \dfrac{m(p-1)}{p}\ell(n)-\dfrac{(p-1)^2}{p}\sum\limits_{k=1}^{m-1}(m-k)\ell(n-k)+m(p-1) & (m+1\mid n\wedge n\ge m+1)\text{ 。}\end{cases}$$

定理 13. p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$f(n)$ 和 $\ell(n)$ 的關係式為

$$f(n)=\begin{cases} p^n & (1\le n\le q)\ , \\ -(p-1)\ell(n)+(p-1)(q+p)\ell(n-1)-(p-1)^2\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)\ell(n-k-1) & (n\ge q+1)\ 。\end{cases}$$

3.3 環狀排列

定理 15. p 種文字皆最多 m 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式為

$$c(n)=\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{v|n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right) & (1\le n\le m)\ , \\ \frac{1}{n}\left[\sum_{v|n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-p\sum_{\substack{k|n\\1\le k\le m}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right] & (n\ge m+1)\ 。\end{cases}$$

定理 16. p 種文字中的一種文字 A_1 最多 q 個相連時，$c(n)$ 和 $f(n)$ 的關係式為

$$c(n)=\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{v|n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right) & (1\le n\le q)\ , \\ \frac{1}{n}\left[\sum_{v|n}\phi(v)f\left(\frac{n}{v}\right)-\sum_{\substack{k|n\\1\le k\le q}}\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right] & (n\ge q+1)\ 。\end{cases}$$

4 未來展望

本研究目前主要有兩個方向。第一個是改變排列方法，往珠狀排列推廣。第二個是改變相連限制，往 p 種相異的文字 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_p$ 分別最多 $d_1,d_2,\cdots\cdots,d_p$ 相連推廣，而目前我已經推出了兩種文字的情形，其過程放在附錄，期望未來能往 p 種文字推廣。

5 參考文獻

[1]邵慰慈、潘建強著(民 94)。基礎離散數學。臺北市：九章出版社。
[2]康明昌著(1988)。近世代數。臺北市：聯經出版社。
[3]林文心等：新北市立五股國民中學(民 102)。圓柱積木的遊戲設計概念及其解的尋找。中華民國第 53 屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。
[4]張福春、曾介玫 (民 97 年)。數學傳播第 32 卷 3 期 P12~35 一般生成函數之應用。

6 附錄

6.1 探討特殊環狀排列的遞迴式。

6.1.1 p 種文字皆最多 m 個相連時，特殊環狀排列的遞迴式為

$$f(n)=\begin{cases} p^n & (1\le n\le m)\ , \\ p^n-p & (n=m+1)\ , \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m}f(n-k)-p(p-1)(2m+2-x) & (m+2\le n\le 2m)\ , \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m}f(n-k)-p(p-1) & (m+1\nmid n \text{且} n\ge 2m+1)\ , \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m}f(n-k)+mp(p-1) & (m+1\mid n \text{且} n\ge 2m+1)\ 。\end{cases}$$

證明. 當$1 \le n \le m$時，每個位置有 p 種選擇，所以 $f(n) = p^n$ 。

當$n = m+1$時，排列數等於 p 種文字任意排列扣除全排同一種文字的情況，即 $f(n) = p^n - p$ 。

當$m+2 \le n \le 2m$時，我們欲將此範圍的$f(n)$表達成$(p-1)\sum_{i=1}^{m} f(n-i)$，再扣除雜項，處理的想法是：當$n$不夠大時$(n \le m)$，$\ell(n)$可以換成$p$的冪次，當$n$夠大時$(n \ge m+1)$，$\ell(n)$可以用直線的遞迴式以及直線和特殊環狀的關係式代換。所以在整理$f(n)$時，盡量把那些可以用直線的遞迴式以及直線和特殊環狀的關係式代換的項換掉，剩餘的項再換成p的冪次。

經過計算後，可以得到$f(n) = (p-1)\sum_{k=1}^{m} f(n-k) - p(p-1)(2m+2-n)$。

當$n \ge 2m+1$時，因為n夠大，所以$f(n)$中的所有項都能用直線排列數的遞迴式代換，再把這些項重新分組後可以得到
$$f(n) = \begin{cases} (p-1)\sum_{k=1}^{m} f(n-k) - p(p-1) & (m+1 \nmid n \text{且} n \ge 2m+1)\text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m} f(n-k) + mp(p-1) & (m+1 \mid n \text{且} n \ge 2m+1)\text{。} \end{cases}$$

故
$$f(n) = \begin{cases} p^n & (1 \le n \le m)\text{，} \\ p^n - p & (n = m+1)\text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m} f(n-k) - p(p-1)(2m+2-n) & (m+2 \le n \le 2m)\text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m} f(n-k) - p(p-1) & (m+1 \nmid n \text{且} n \ge 2m+1)\text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{m} f(n-k) + mp(p-1) & (m+1 \mid n \text{且} n \ge 2m+1)\text{。} \end{cases}$$
□

6.1.2 p **種文字中的一種文字** A_1 **最多** q **個相連時，特殊環狀排列的遞迴式為**

$$f(n) = \begin{cases} p^n & (1 \le n \le q)\text{，} \\ p^n - 1 & (n = q+1)\text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1} f(n-k) - (p-1)(2q+2-n) & (q+2 \le n \le 2q+1)\text{，} \\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1} f(n-k) & (n \ge 2q+2)\text{。} \end{cases}$$

證明. 當$1 \le n \le q$時，每個位置有 p 種選擇，所以 $f(n) = p^n$ 。

當$n = q+1$時，排列數等於 p 種文字任意排列扣除全排 A_1 的情況，即 $f(n) = p^n - 1$ 。

當$q+2 \le n \le 2q+1$時，我們欲將此範圍的$f(n)$表達成$(p-1)\sum_{i=1}^{q+1} f(n-i)$，再扣除雜項，處理的想法是：當$n$不夠大時$(n \le q+1)$，$\ell(n)$可以換成$p$的冪次，當$n$夠大時$(n \ge q+2)$，$\ell(n)$可以用直線的遞迴式以及直線和特殊環狀的關係式代換。所以在整理$f(n)$時，盡量把那些可以用直線的遞迴式以及直線和特殊環狀的關係式代換的項換掉，剩餘的項再換成p的冪次。

經過計算後，可以得到$f(n) = (p-1)\sum_{k=1}^{q+1} f(n-k) - (p-1)(2q+2-n)$。

當$n \ge 2m+1$時，因為n夠大，所以$f(n)$中的所有項都能用直線排列數的遞迴式代換，再把這些項重新分組後可以得到$f(n) = (p-1)\sum_{k=1}^{q+1} f(n-k)$。

$$故\ f(n)=\begin{cases} p^n & (1\le n\le q)\ ， \\ p^n-1 & (n=q+1)\ ， \\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1} f(n-k)-(p-1)(2q+2-n) & (q+2\le n\le 2q+1)\ ， \\ (p-1)\sum_{k=1}^{q+1} f(n-k) & (n\ge 2q+2)\ 。 \end{cases}$$

□

6.2 探討 $p=2$ 且 $A_1=A, A_2=B$ 時，其中 A 最多 d 個相連，且 B 最多 e 個相連時，直線排列數的遞迴式($d>e$)。

不失一般性，設 $d>e$。當 $n\le d$ 時，可以看成 B 最多 e 個相連，A 無相連限制，由定理 7 可知

$$\ell(n-k)=\begin{cases} 2^n & (1\le n\le e)\ ， \\ 2^n-1 & (n=e+1)\ ， \end{cases}\quad (d=e+1)\ 或\ \ell(n)=\begin{cases} 2^n & (1\le n\le e)\ ， \\ 2^n-1 & (n=e+1)\ ， \\ \sum_{k=1}^{e+1}\ell(n-k) & (e+2\le n\le d)\ ， \end{cases}\quad (d\ge e+2)\ 。$$

當 $d+1\le n\le d+e$ 時，由定理 1 可知 $\ell(n)=\sum_{k=1}^{d}A^k(n)+\sum_{k=1}^{e}B^k(n)$，接著由定理 4 可知

$A^k(n)=A^1(n-k+1)$ 且 $B^k(n)=B^1(n-k+1)$，所以

$$\ell(n)=\sum_{k=1}^{d}A^1(n-k+1)+\sum_{k=1}^{e}B^1(n-k+1)=\sum_{k=n-d+1}^{n}A^1(k)+\sum_{k=n-e+1}^{n}B^1(k)=\sum_{k=n-e+1}^{n}\left[A^1(k)+B^1(k)\right]+\sum_{k=n-d+1}^{n-e}A^1(k)\ 。$$

再來由定理 3 可知 $A^1(k)=\ell(k-1)-\sum_{n=1}^{e}B^n(k-1)$ 且 $B^1(k)=\ell(k-1)-\sum_{n=1}^{d}A^n(k-1)$，得

$A^1(k)+B^1(k)=\ell(k-1)$，即 $\ell(n)=\sum_{k=n-e+1}^{n}\ell(k-1)+\sum_{k=n-d+1}^{n-e}A^1(k)=\sum_{k=n-e}^{n-1}\ell(k)+\sum_{k=1}^{n-e}A^1(k)-\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)$。

這裡引入一個 *Lemma*：當 $2\le n\le d+1$ 時，$\ell(n-1)=\sum_{k=1}^{n}A^1(k)$。

[證] 因為 $A^{n+1}(n)=A^{n+2}(n)=\cdots=A^d(n)=0$，

所以 $B^1(n)=\sum_{k=1}^{d}A^k(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}A^k(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}A^1(n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}A^1(k)$，

故 $\sum_{k=1}^{n}A^1(k)=A^1(n)+\sum_{k=1}^{n-1}A^1(k)=A^1(n)+B^1(n)=\ell(n-1)$。

由此 *Lemma* 可知 $\sum_{k=1}^{n-e}A^1(k)=\ell(n-e-1)$，即 $\ell(n)=\sum_{k=n-e}^{n-1}\ell(k)+\ell(n-e-1)-\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)=\sum_{k=1}^{e+1}\ell(n-k)-\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)$。

這裡再引入一個 *Lemma*：當 $d+1\le n\le d+e$ 時，$\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)=2^{n-d-1}$。

[證] $n=d+1$ 時，$\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)=A^1(1)=1=2^{(d+1)-d-1}$。$d+2\le n\le d+e$ 時，因為 $1\le n-d-1\le e-1$。

所以 $\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)=\ell(n-d-1)=2^{n-d-1}$。故 $\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)=\ell(n-d-1)=2^{n-d-1}$。

由此 *Lemma* 可知 $\sum_{k=1}^{n-d}A^1(k)=2^{n-d-1}$，即 $\ell(n)=\sum_{k=1}^{e+1}\ell(n-k)-2^{n-d-1}$。

當 $n\ge e+d+1$ 時，由定理 1 可知 $\ell(n)=\sum_{k=1}^{d}A^k(n)+\sum_{k=1}^{e}B^k(n)$，接著由定理 4 可知 $B^k(n)=B^1(n-k+1)$，

所以 $\ell(n)=\sum_{k=1}^{d}A^k(n)+\sum_{k=1}^{e}B^1(n-k+1)$，又由定理 1 和定理 3 可知

$B^1(n-k+1)=\ell(n-k)-\sum_{k=1}^{e}B^k(n-k)=\sum_{k=1}^{d}A^k(n-k)$，即

$\ell(n)=\sum_{k=1}^{d}A^k(n)+\sum_{t=1}^{e}\sum_{k=1}^{d}A^k(n-t)=\sum_{t=0}^{e}\sum_{k=1}^{d}A^k(n-t)$ 或 $\ell(n)=B^1(n+1)+\sum_{k=1}^{e}B^1(n-k+1)=\sum_{t=0}^{e}B^1(n-t+1)$，

那麼 $\sum_{k=0}^{d}\ell(n-k)=\ell(n)+\sum_{k=1}^{d}\ell(n-k)=\sum_{t=0}^{e}\sum_{k=1}^{d}A^k(n-t)+\sum_{t=0}^{e}\sum_{k=1}^{d}B^1(n-t-k+1)$，

由定理 4 可知 $A^k(n-t)=A^1(n-t-k+1)$，所以

$\sum_{k=0}^{d}\ell(n-k)=\sum_{t=0}^{e}\sum_{k=1}^{d}\left[A^1(n-t-k+1)+B^1(n-t-k+1)\right]=\sum_{t=0}^{e}\sum_{k=1}^{d}\ell(n-t-k)$，得 $\ell(n)=\sum_{t=1}^{e}\sum_{k=1}^{d}\ell(n-t-k)$。

$$
故\ \ell(n)=\begin{cases}2^n & (1\le n\le e)，\\ 2^n-1 & (n=e+1)，\\ \sum_{k=1}^{e+1}\ell(n-k)-2^{n-d-1} & (d+1\le n\le d+e)，\\ \sum_{t=1}^{e}\sum_{k=1}^{d}\ell(n-t-k) & (n\ge e+d+1)，\end{cases}\quad (d=e+1)，
$$

$$
或\ \ell(n)=\begin{cases}2^n & (1\le n\le e)，\\ 2^n-1 & (n=e+1)，\\ \sum_{k=1}^{e+1}\ell(n-k) & (e+2\le n\le d)，\\ \sum_{k=1}^{e+1}\ell(n-k)-2^{n-d-1} & (d+1\le n\le d+e)，\\ \sum_{t=1}^{e}\sum_{k=1}^{d}\ell(n-t-k) & (n\ge e+d+1)，\end{cases}\quad (d\ge e+2)。
$$

□

6.3 特殊環狀排列數和直線排列數的關係式利用直線排列數的遞迴式往上推之代換過程。（以 $p=2$ 且 $A_1=A, A_2=B$，A 最多 q 個相連 B 無相連限制為例。）

當 $n\ge 2q+3$ 時，

$$
\begin{aligned}
f(n)=\ell(n)&-\text{"}A^1B\cdots BA^1\cdots A^q\text{的方法數"}-\text{"}A^1A^2B\cdots BA^1\cdots A^{q-1}\text{的方法數"}-\cdots-\text{"}A^1\cdots A^qB\cdots BA^1\text{的方法數"}\\
&-\text{"}A^1A^2B\cdots BA^1\cdots A^q\text{的方法數"}-\cdots-\text{"}A^1\cdots A^qB\cdots BA^1A^2\text{的方法數"}\\
&\qquad\ddots\qquad\vdots\\
&-\text{"}A^1\cdots A^qB\cdots BA^1\cdots A^q\text{的方法數"}，
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f(n)=\ell(n)-q\times\ell(n-q-3)-(q-1)\times\ell(n-q-4)-\cdots-\ell(n-2q-2)$。

接著利用直線遞迴式 $\ell(n)=\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k)$ 將上式不斷往上推，並將過程中各項的係數整理成下表。

n	1	1	1		1	1	1	-1
n−1	0	0	0		0	0	q	q+2
n−2	0	0	0		0	−1	−(q+1)	−(q−1)
n−3	0	0	0		−1	0	−q	−(q−2)
…	…	…	…		…	…	…	…
n−q	0	0	−1		q−4	q−3	−3	−1
n−q−1	0	−1	0	…	q−3	q−2	−2	0
n−q−2	0	1	2		q−1	q	0	0
n−q−3	−q	−(q−1)	−(q−2)		−1	0	0	0
…	…	…	…		…	…	…	…
n−2q	−3	−2	−1		0	0	0	0
n−2q−1	−2	−1	0		0	0	0	0
n−2q−2	−1	0	0		0	0	0	0

第一行到第二行即是將$-\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-q-1-k)$換成$-\ell(n-q-1)$，第二行到第三行即是將$-\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-q-k)$換成$-\ell(n-q)\cdots$以此類推，觀察這些係數可以發現換了一次之後，式子裡除了$\ell(n)$之外，會有連續的q+1項，此外在$\ell(n-q-3)$的係數歸零前，所有拿去替換的項，其係數會+1，總和以上兩個觀察，可得$f(n)=-\ell(n)+(q+2)\times\ell(n-1)-\sum_{k=1}^{q-1}(q-k)\times\ell(n-k-1)$。

當$q+1\le n\le 2q+1$時，設$n=q+t$，則$1\le t\le q+1$，

$$
\begin{aligned}
f(n)=\ell(n)&-\text{"}A^1B\cdots BA^1\cdots A^q\text{的方法數"}-\cdots-\text{"}A^1\cdots A^qB\cdots BA^1\text{的方法數"}\\
&\vdots\\
&-\text{"}A^1\cdots A^{t-2}BBA^1\cdots A^q\text{的方法數"}-\cdots-\text{"}A^1\cdots A^qBBA^1\cdots A^{t-2}\text{的方法數"}\\
&-\text{"}A^1\cdots A^{t-1}BA^1\cdots A^q\text{的方法數"}-\cdots-\text{"}A^1\cdots A^qBA^1\cdots A^{t-1}\text{的方法數"}，
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(n)=\ell(n)-q\times\ell(n-q-3)-(q-1)\times\ell(n-q-4)-\cdots-(q-t+3)-(q-t+2)。$$

接著我們利用直線的遞迴式$\ell(n)=\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k)$和等比級數$2^{s+1}-2=\sum_{k=1}^{s}2^k$將上式不斷往上推，並將這個過程中各項的係數整理成下表。

n	**=q+t**	1	1	1		1	1	1		−1
…		…	…	…		…	…	…		…
n−t+1	**=q+1**	0	0	0		0	−1	0		−(q−t+2)
n−t	**= q**	0	0	0		−1	0	1		−(q−t+1)
n−t−1	**=q−1**	0	0	0		0	1	2		−(q−t)
…		…	…	…		…	…	…		…
n−q	**=t**	0	0	−1		q−t−1	q−t	q−t+1		−1
n−q−1	**=t−1**	0	−1	0	…	q−t	q−t+1	q−t+2	…	0
n−q−2	**=t−2**	0	1	2		q−t+2	q−t+3	q−t+4		0
n−q−3	**=t−3**	−q	−(q−1)	−(q−2)		−(t−2)	−(t−3)	−(t−4)		0
…		…	…	…		…	…	…		…
n−q−t+2	**=3**	−(q−t+6)	−(q−t+5)	−(q−t+4)		−4	−3	−2		0
n−q−t+1	**=2**	−(q−t+5)	−(q−t+4)	−(q−t+3)		−3	−2	−1		0
n−q−t	**=1**	−(q−t+4)	−(q−t+3)	−(q−t+2)		−2	−1	0		0

第一行到第二行即是將$-\sum_{k=1}^{t-2}\ell(k)=-\sum_{k=1}^{t-2}2^k$扣除 2 變成$-\ell(t-1)=-2^{t-1}$，

第二行到第三行即是將$-\sum_{k=1}^{t-1}\ell(k)=-\sum_{k=1}^{t-1}2^k$扣除 2 變成$-\ell(t)=-2^t\cdots$以此類推。特別地，

第五行到第六行則是將$-\sum_{k=1}^{q}\ell(k)=-\sum_{k=1}^{q}2^k$扣除1變成$-\ell(q+1)=-2^{q+1}+1$，接著我們改回利用直線的遞迴式$\ell(n)=\sum_{k=1}^{q+1}\ell(n-k)$往上推，可以得到和$n\ge 2q+3$時一樣的結果。(注:過程中所有扣除的 2 和 1 其總和恰為$-(q-t+3)-(q-t+2)=-(2q-2t+5)$，此外$n=2q+2$可以由類似的討論得到相同的結果。)