棋盤中的美好「缺」憾

張彥霆

國立臺中第一高級中學

指導老師：梁勇能

摘要

本研究首先發現在 $n\times n$ 棋盤的所有和平排列(每行每列各放一個棋子)中，存在至少一種和平排列找不到不包含棋子的 $k\times k$ 正方形，同時得到 n 和 k 的關係：n 的最大值為 k^2。

接著延伸這個題目，從找 $k\times k$ 正方形變成找($k\times k$-$m\times m$)的缺角正方形。並在程式的輔助下，除了得到$f_\alpha(k,m)$和$f_\beta(k,m)$的值，也可以知道 n=$f_\alpha(k,m)$和$f_\beta(k,m)$時放不下缺角正方形的和平排列。

$f(k,0)=k^2$
$f_\alpha(k,1)=k^2-k$
$f_\beta(k,1)=k^2-1$
$f_\beta(k,k-1)=2k-1$
$f_\alpha(k,\frac{k}{2})=\frac{k^2}{2}$

1　簡介

1.1 研究動機

本題目源自於 2014 年 IMO 第 2 題：n≥2 為整數。有一個 $n\times n$ 的方格棋盤，把 n 顆棋子放在棋盤的方格中，使得每行每列都恰有一個棋子，稱為**和平排列**。每一個 $n\times n$ 的和平排列，都可以在其中找到一個不包括任何棋子的 $k\times k$ 正方形，求 k 的最大值。原題目是由 n 的值得到 k 的值，但我們的研究方向是由 k 的值得到 n 的值，並且把 $k\times k$ 正方形拓展到更一般化的 $(k\times k - m\times m)$缺角正方形。

1.2　研究目的

1.證明原題，並討論$f(k,0)$之值及$S(k,0)$內元素。

2.討論$f_\beta(k,1)$的值

3.討論$f_\beta(k,k-1)$的值

4.討論$f_\alpha(k,m)$之一般化構造及下界

5.討論$f_\alpha(k,1)$的值及 $S_\alpha(k,1)$中元素

6.討論$f_\alpha(k,\frac{k}{2})$的值

1.3　研究器材

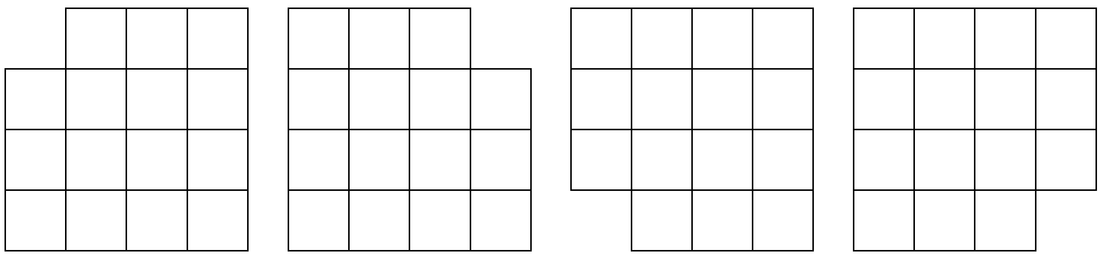
紙、筆、codeblocks

1.4　名詞定義

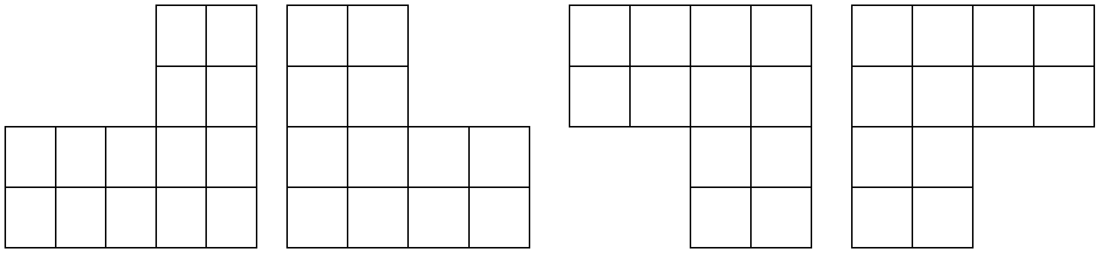
1.4.1　$(k\times k - m\times m)$缺角正方形($k>m,k\geq 2$)：

$k\times k$ 的正方形，在左上、左下、右上、右下其中一角拿掉 $m\times m$ 的正方形，簡稱為$(k\times k - m\times m)$缺角正方形。原題目所探討的為 $k\times k$ 正方形，亦即 m=0。

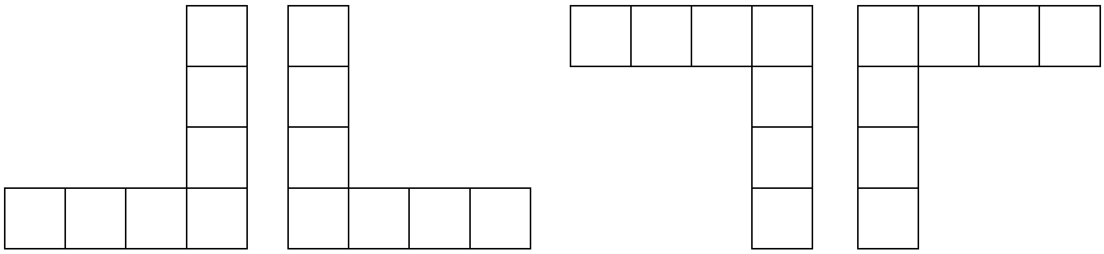
舉例如下，(k,m)分別為(4,1),(4,2),(4,3)的情況。



(4×4–1×1)缺角正方形



(4×4–2×2)缺角正方形



(4×4–3×3)缺角正方形

1.4.2 缺角所在位置：

若限定在做「找沒有包含任何棋子的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形」時，尋找的缺角正方形只侷限在缺左上、左下、右上、右下的其中一個方向，所得到的結果會和缺角可以在四個角落中的任何位置不同。以下以小寫希臘字母表示缺角可在的位置。

1、α：缺角可在正方形四個角落中的任意位置。

2、β：缺角只能固定在正方形其中一角。

1.4.3 $f(k,m)$：

若存在一個 $n \times n$ 棋盤的和平排列，找不到沒有包含任何棋子的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形；而每一個$(n+1) \times (n+1)$的和平排列都一定找的到，則記為 $f(k,m)=n$。

1. m=0 時即為原題目的 $k \times k$ 正方形；
2. 當 $m \geq 1$ 時，則要考慮缺角可在的位置：若缺角固定在其中一角，則記為 $f_\beta(k,m)$；
3. 若缺角可在任何位置，則記為 $f_\alpha(k,m)$，以此類推。

1.4.4 和平排列數字表示法及 $S(k,m)$：

每一個和平排列都可以被表示成$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$的形式，$a_i=j$ 代表第 i 行第 j 列放有棋子。(行的編號為由左至右，列的編號為由上至下)

$S(k,m)$為所有 $n=f(k,m)$時，找不到沒有包含棋子的$(k\times k-m\times m)$之和平排列所構成的集合。

同樣的，當 $m\geq 1$ 時，要在 S 和左括號之間寫上小寫希臘字母以示區別。

舉例如下：$n=6,k=3,m=1$

●					
				●	
		●			
			●		
	●				
					●

此和平排列即為(1,5,3,4,2,6)，裡頭找不到缺角在任何方向的$(3\times 3-1\times 1)$缺角正方形，並且因為 $f_\alpha(3,1)=6$(將在三－(一)證明)，所以$(1,5,3,4,2,6)\in S_\alpha(3,1)$。

2　研究過程

定理 1　$f(k,0)=k^2$

雖然原題是在所有 $n\times n$ 的和平排列下，找尋 k 的最大值，但為了報告前後的一致性，於是將題目稍做改寫，改寫後如下：

$n\geq 2$ 為整數。有一個 $n\times n$ 的方格棋盤，把 n 顆棋子放在棋盤的方格中，使得每行每列都恰有一個棋子，稱為和平排列。如果所有 n×n 的和平排列，存在至少一種和平排列找不到沒有包含任何棋子的 k×k 正方形。證明：n 的最大值為 k^2。

引理 1.

任意 $n=k^2+1$ 的和平排列一定找得到 $k\times k$ 正方形

證明.

在$(k^2+1)\times(k^2+1)$的正方形中，假設第 k^2+1 列的棋子位於第 p 行。可以取第 p 行和其臨近的 $k-1$ 行，為一個 $k\times(k^2+1)$的長方形。把長方形的第 1 到 k^2 列切成 k 個 $k\times k$ 正方形，分別為第 $jk+1$ 到$(j+1)k$ 列，$j=0,1,\ldots,k-1$。

第 k^2+1 列有 1 個棋子，而整個長方形有 k 個棋子，故此 k 個正方形總共有 $k-1$ 個棋子，由鴿籠原理知必有一個 $k\times k$ 正方形裡沒有棋子，故得證。

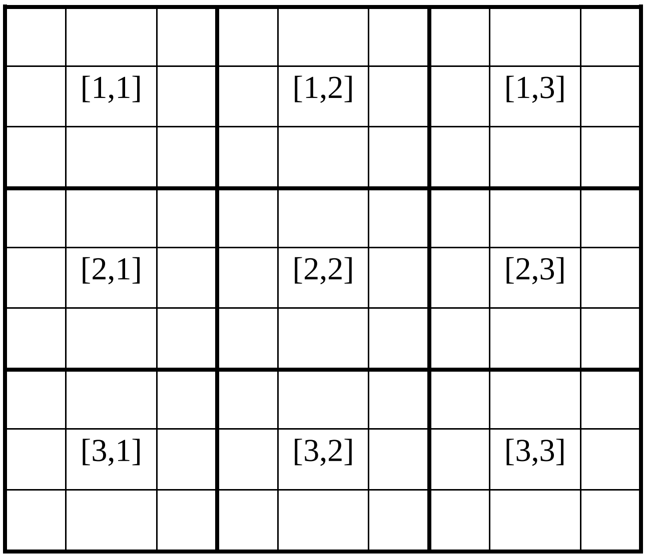
引理 2.

存在 $n=k^2$ 的和平排列，找不到 $k\times k$ 正方形。

證明

首先，把 $k^2\times k^2$ 棋盤切割成 k^2 個 $k\times k$ 正方形。

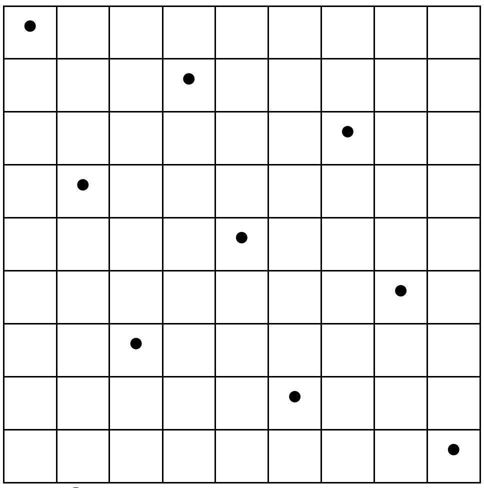
其中$[j,i]$代表第$(i-1)k+1$ 行到第 ik 行，與第$(j-1)k+1$ 列到第 jk 列的交集所形成的 $k\times k$ 正方形。



在$[j,i]$內的第 j 行第 i 列放置棋子，此擺法為一個和平排列，以數字表示之，即$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1, 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots, k,2k,\ldots,k^2)$。

而棋子的排列形狀也非常特殊，像是 $k\times k$ 的菱形。

下圖為 $n=9$，$k=3$ 時，$[j,i]$之示例及構造出來的和平排列(1,4,7,2,5,8,3,6,9)。



由**引理 1.**、**2.**可知，任意 $n=k^2+1$ 的和平排列一定找的到 $k\times k$ 正方形，而存在 $n=k^2$ 的和平排列找不到 $k\times k$ 正方形。

定理 2　$|S(k,0)|=2$

接下來要證明，所有 $n=k^2$ 的和平排列中，只有上述構造出的像是 $k\times k$ 菱形的排列，以及它的類似排列(水平對稱)中，找不到 $k\times k$ 正方形。亦即 $S(k,0)$中只有這兩個元素。

以下證明皆假設存在一個找不到$k\times k$正方形的$k^2\times k^2$和平排列。

引理 3.1

若$[j,1]$內的棋子在第 p 行，則$\forall i,[j,i]$內的棋子皆在第 p 行。

證明.

引入**引理 2.**中所使用的$[j,i]$符號。每個$[j,i]$正方形中必有一棋子，而整個棋盤共有 k^2 個棋子，故知每個正方形中恰有一個棋子。

利用數學歸納法證明：

令$[j,i]$內的棋子在第 p'行，則易知 $p\geq p'$，否則必會有 $k\times k$ 正方形內沒有任何棋子。

對 p 歸納。

(1)　$p=1$ 時，$p'\leq 1$ 又 $p'\in N$，故只有 $p'=1$。

(2)　令 $p=1,2,3,\ldots,M$ 時原命題均成立，故$\forall i,[1,i]$到$[k,i]$這個 $k\times k^2$ 長方形中，第 $1,2,3,\ldots,M$ 行均已有棋子。

(3)　當 $p=M+1$ 時，有 $M+1\geq p'$(已知)以及 $p'\geq M+1$(根據歸納假設)，因此只有 $p'=M+1=p$，證畢。

同理可得：

引理 3.2

若$[1,i]$內的棋子在第 q 列，則$\forall j,[j,i]$內的棋子皆在第 q 列。

引理 4.

$\forall i,j$，若$(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$，$[j,i],[j,i+1],[j+1,i],[j+1,i+1]$這 $2k\times 2k$ 區域中找不到 $k\times k$ 正方形。

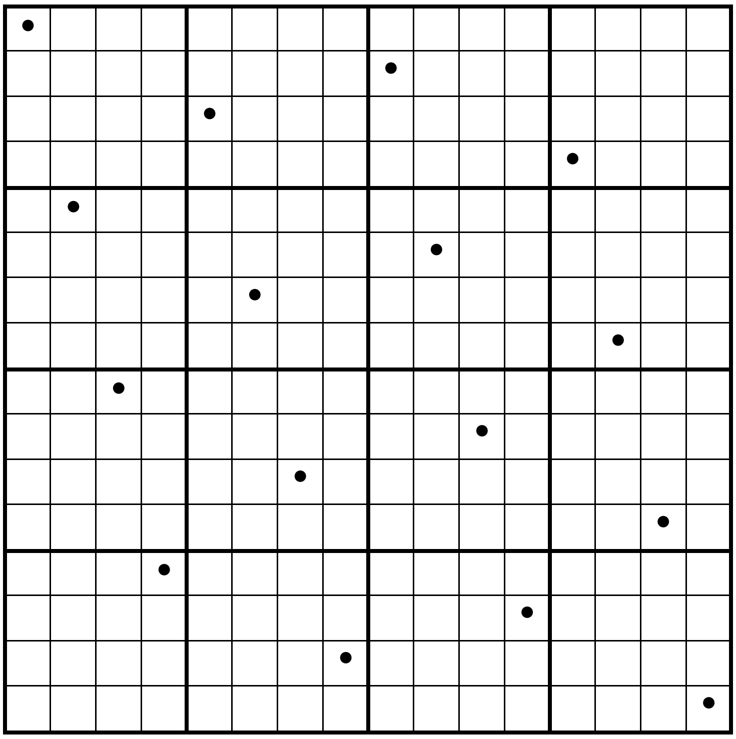
證明.

$[j,i]$內棋子的行數取決於 j 的值，列數取決於 i 的值，因此我們可令$[j,i]$內的棋子位於第 p_j 行第 q_i 列，記為(p_j,q_i)。

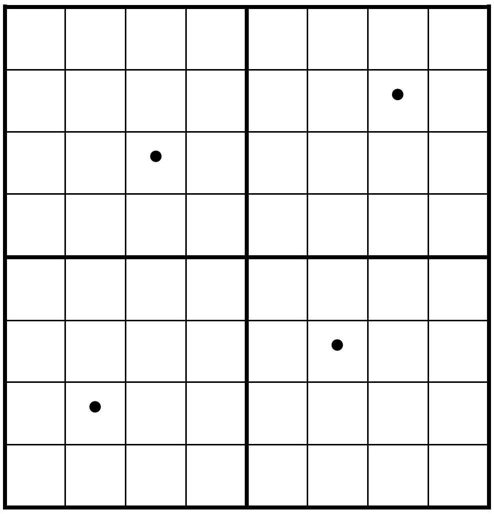
$\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$和$\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$皆為$\{1,2,3,\ldots,k\}$的其中一種排列。

以下即為一個滿足目前條件的和平排列的例子：

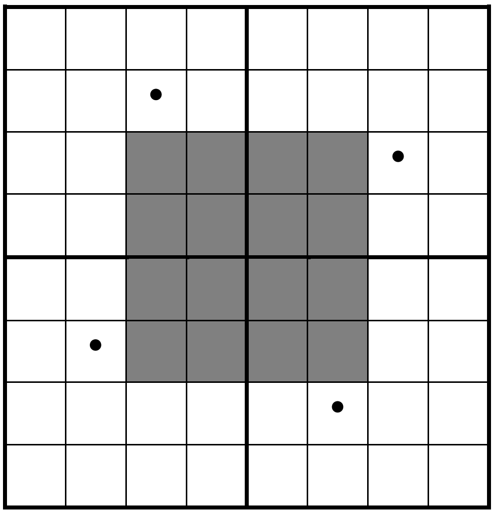
n=16，k=4，(p_1,p_2,p_3,p_4)=(1,2,3,4)，(q_1,q_2,q_3,q_4)=(1,3,2,4)。



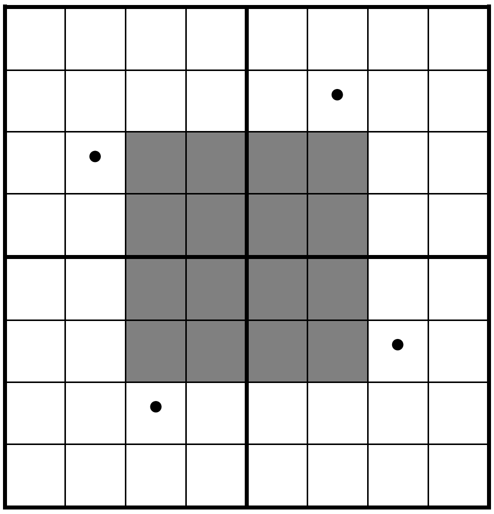
對所有 i,j，若$(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})<0$，$[j,i],[j,i+1],[j+1,i],[j+1,i+1]$這個 $2k\times 2k$ 區域中必可找到一 $k\times k$ 正方形。故$(p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$。



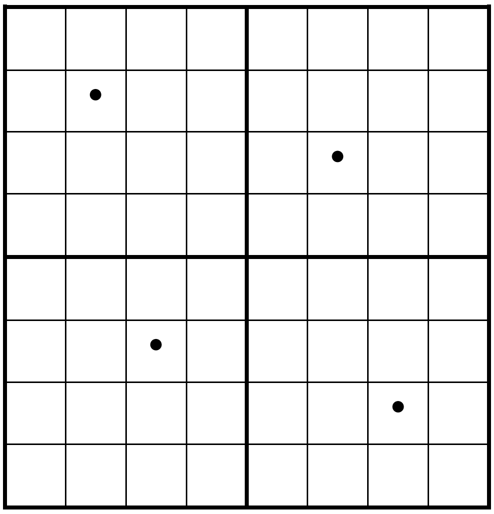
$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})$=(3,2,3,2)



$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})$=(3,2,2,3)



$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})=(2,3,3,2)$



$(p_j,p_{j+1},q_i,q_{i+1})=(2,3,2,3)$

若 $p_1>p_2 \Rightarrow (p_1-p_2)(q_i-q_{i+1})>0$

故 $q_i>q_{i+1} \Rightarrow (p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$

故 $p_j>p_{j+1} \Rightarrow p_1>p_2>\ldots>p_k, q_1>q_2>\ldots>q_k \Rightarrow p_j=k^2+1-j, q_i=k^2+1-i$

數字表示：$(k^2, (k-1)k, (k-2)k, \ldots, k, k^2-1, (k-1)k-1, \ldots, k-1, \ldots, k^2-(k-1), (k-1)k-(k-1), \ldots, 1)$

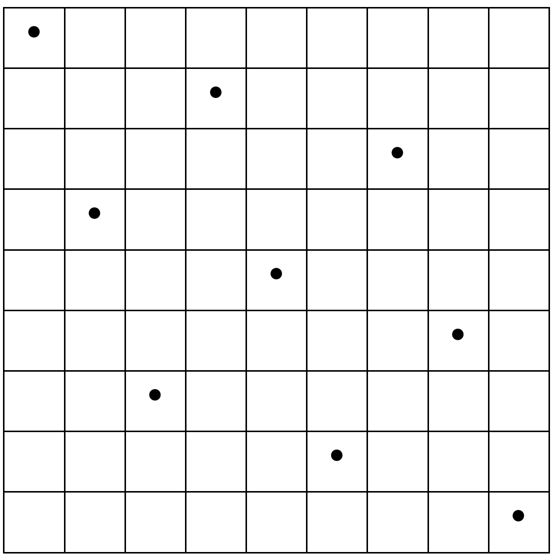
若 $p_1<p_2 \Rightarrow (p_1-p_2)(q_i-q_{i+1})>0$

故 $q_i<q_{i+1} \Rightarrow (p_j-p_{j+1})(q_i-q_{i+1})>0$

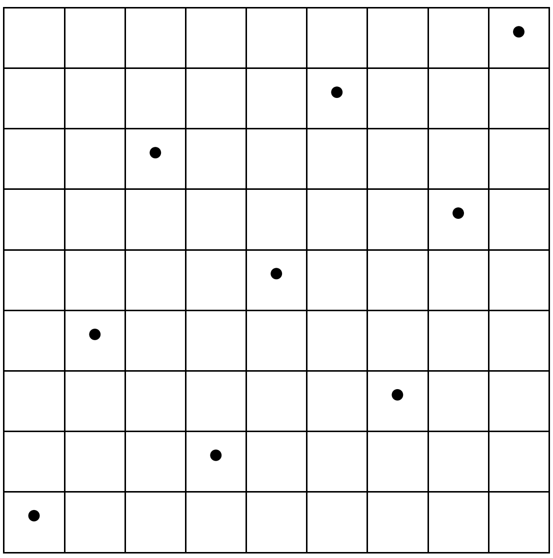
故 $p_j<p_{j+1} \Rightarrow p_1<p_2<\ldots<p_k, q_1<q_2<\ldots<q_k \Rightarrow p_j=j, q_i=i$

數字表示：$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1, 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots, k,2k,\ldots,k^2)$

故只有這兩種 $k^2\times k^2$ 的和平排列找不到 $k\times k$ 正方形，$S(k,0)$中的元素即這兩個菱形的和平排列，$\boxed{|S(k,0)|=2}$。下圖即$(n,k)=(9,3)$時，這兩種和平排列的圖形。



(1,4,7,2,5,8,3,6,9)



(9,6,3,8,5,2,7,4,1)

定理 3　$f_{\beta}(k,1)=k^2-1$

引理 5.

缺角固定在一角時，任意 $n=k^2$ 的和平排列必找得到 $(k\times k-1\times 1)$缺角正方形

證明.

在 n= $k\times k$ 的棋盤中，共有 k^2 顆棋子，此棋盤恰可棋盤分割成 k^2 個 $k\times k$ 小正方形，故每個 $k\times k$ 小正方形必恰有一顆棋子。

接著依棋盤之各個角落做討論：

最左上角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 1 行第 1 列，因此存在缺角在左上角之($k\times k$-1×1)缺角正方形。

最左下角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(\underbrace{1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1}_{\boxed{k\text{ 個}}},\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$$

$$(k-1)k+1\equiv 1 \quad \mod\ k$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 k 行第 1 列，因此存在缺角在右上角之($k\times k$-1×1)缺角正方形。

最右上角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(\underbrace{1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k}_{\boxed{k(k-1)+1\text{ 個}}},2k,\ldots,k^2)$$

$$(k-1)k+1\equiv 1 \quad \mod\ k$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 1 行第 k 列，因此存在缺角在左下角之($k\times k$-1×1)缺角正方形。

最右下角之 $k\times k$ 小正方形：

$$(\underbrace{1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2}_{\boxed{k^2\text{ 個}}})$$

$$k^2\equiv \mathrm{k} \quad \mod\ \mathrm{k}$$

棋子所在位置為此 $k\times k$ 小正方形第 k 行第 k 列，因此存在缺角在右下角之$(\mathrm{k}\times\mathrm{k}-1\times 1)$缺角正方形

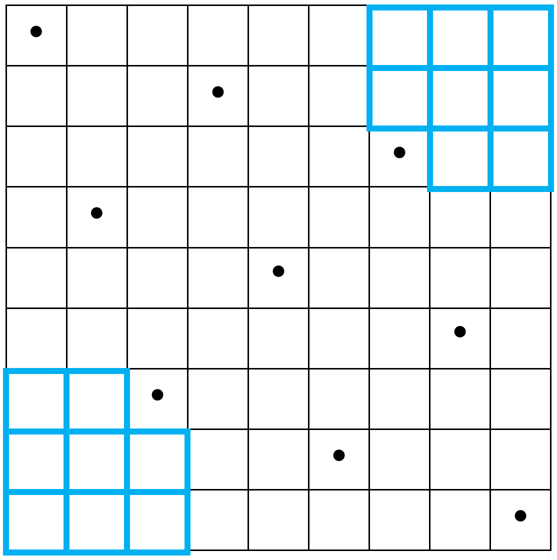
因此當$\mathrm{n}=\ \mathrm{k}\times\mathrm{k}$時，必找得到缺角固定在其中一角，沒有包含任何棋子的$(\mathrm{k}\times\mathrm{k}-1\times 1)$缺角正方形。

引理 6.

缺角固定在其中一角時，存在$\mathrm{n} = k^2 - 1$的和平排列，找不到$(k \times k\text{–}1 \times 1)$缺角正方形。

證明.

首先觀察$\mathrm{n} = k^2$符合$f(k,0)$之和平排列



(1,4,7,2,5,8,3,6,9)

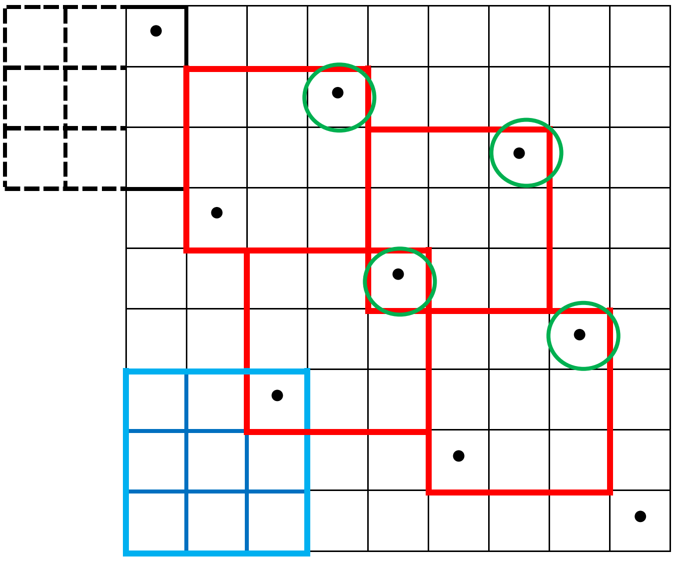
我們發現若此菱形排列為左上延伸到右下，則缺角在右上或左下的缺角正方形僅存在於棋盤之左下或右上角，反之亦成立。

假設在符合$f_\beta(k,1) = \mathrm{n}$之 n×n 棋盤的和平排列存在缺角正方形之缺角處沒有棋子，則必存在 k×k 正方形，矛盾，因此可以棋子為基準點，來確認是否存在$(k \times k - 1 \times 1)$缺角正方形。

已知棋子的排列方法以數字表示為：

$$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k–1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k–1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$$

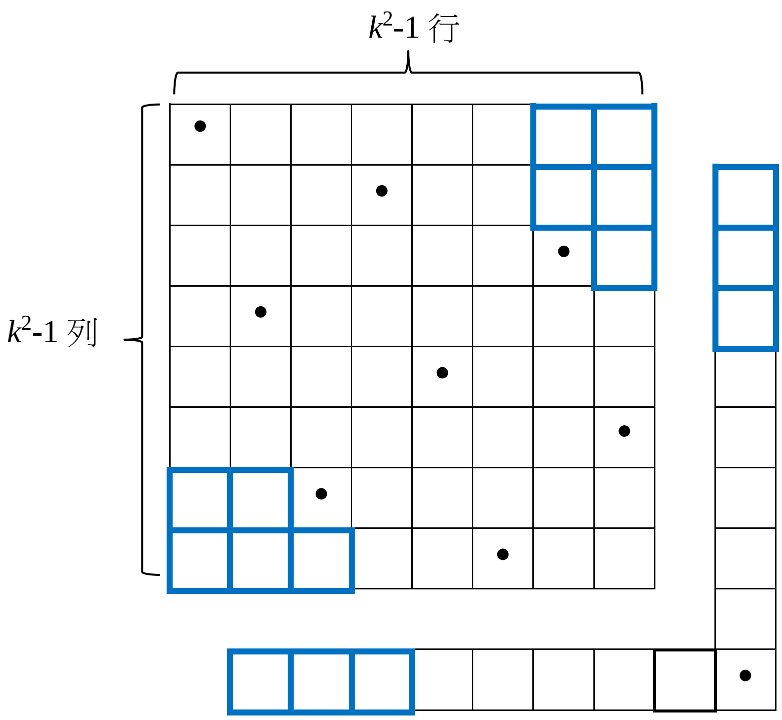
不失一般性，討論缺角在右上角之缺角正方形，將每顆旗子都視為 k×k 正方形之最右上角，因此在 1~k-1 行與(k-1)k+2~k^2 列之交集內的棋子不需討論，而我們發現將剩餘的棋子往左找 k-1 行及往下找 k-1 列，形成 k×k 正方形，除了第 k 行第$(k–1)k+1$ 列的棋子所形成的 k×k 正方形，其餘正方形左下角必存在另一顆棋子，因此缺角在右上方之$(k \times k - 1 \times 1)$缺角正方形僅出現在棋盤之左下角，同理，缺角在左下方之$(k \times k - 1 \times 1)$缺角正方形僅出現在棋盤之右上角。



因此，構造$f_\beta(k,1) = \ k^2 - 1$之和平排列，僅需將最外圍包含一顆棋子之一行一列刪除，即可得符合$f_\beta(\mathrm{k},1) = \ k^2 - 1$之和平排列。數字表示法即為

(1,*k*+1,2*k*+1,…,(*k*–1)*k*+1, 2,*k*+2,…,(*k*–1)*k*+2,…, *k*,2*k*,…,(*k*-1)*k*)或

(*k*+1,2*k*+1,…,(*k*–1)*k*+1, 2,*k*+2,…,(*k*–1)*k*+2,…, *k*,2*k*,…,k^2)



這只是其中兩種，例如將原本所取之菱形排列水平對稱，又可得另兩種和平排列符合$f_\beta(k,1)$等。

定理 4　$f_\beta(k,k-1)=2k-1$

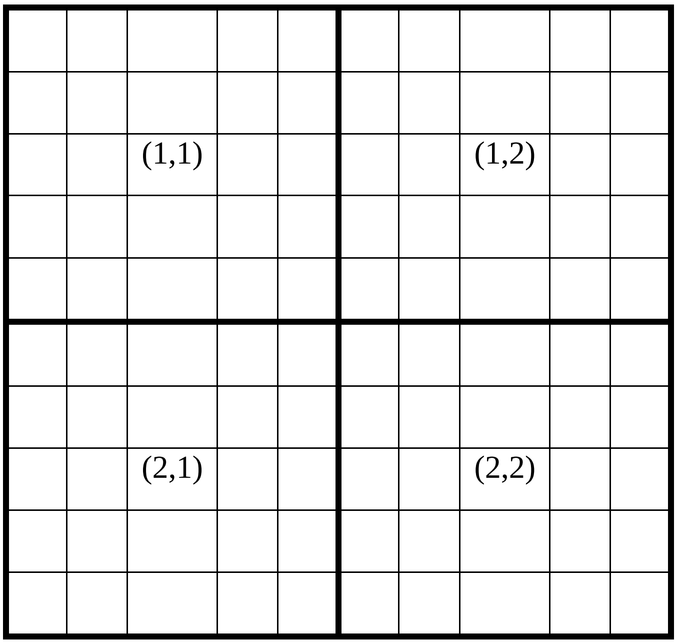
引理 7.

缺角固定在一角時，任意 *n*=2*k* 的和平排列必找得到$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形。

證明.

在 *n*=2*k* 的和平排列中，若必找得到某一固定方向的缺角正方形，則剩餘三個方向的缺角正方形也必存在。

將 2*k*×2*k* 正方形切成 4 個 *k*×*k* 正方形，分別為(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)

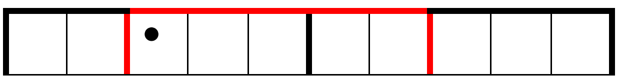


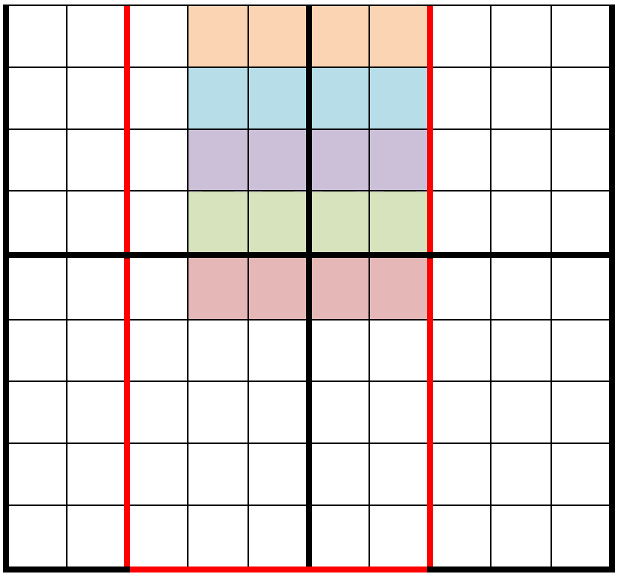
1. 不失一般性，找尋缺角在右下角缺角正方形。

   假設(1,1)內第一列存在棋子於第 p 行，則向右取與第 p 行相鄰$k-1$行成為$k\times 2k$長方形。

   我們可以在此長方形中找到 *k* 個缺角在右下角之$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形，卻只能再擺入$k-1$顆棋子，矛盾，因此第一列不可存在棋子。

2. 同理，(1,1)內第一行也不可存在棋子，但仍能取第一列第一行成為$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形，因此在 *n*=2*k* 的和平排列中，必存在缺角在右下角之$k\times k$–$(k-1)\times(k-1)$缺角正方形，也就必同時存在缺角在四個方向的缺角正方形。





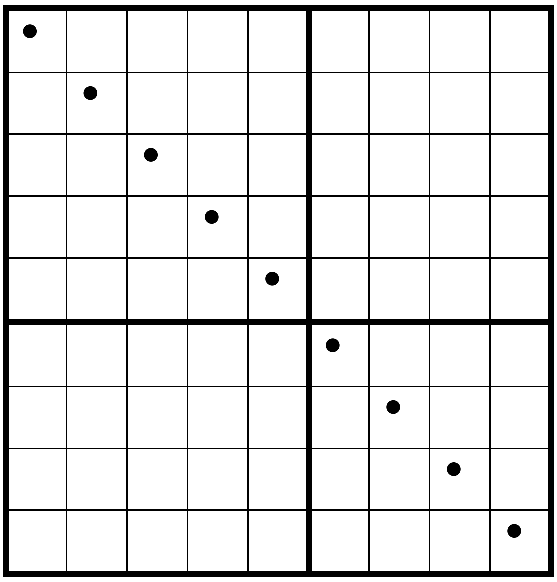
引理 8.

缺角固定在一角時，存在 n=2k-1 和平排列，找不到$k \times k-(k-1) \times (k-1)$缺角正方形

證明.

此構造方式不難，只要在 n=2k-1 的棋盤中，將棋子沿對角線一一放入棋子，即為符合所求之 n=2k-1 和平排列。

數字排列形式為(1,2,3,…, 2k-1)



定理 5　$f_\alpha(k,1)=k^2-k$

在缺角所在的位置中，一開始只有考慮α(不限制缺角可能在的方向)，也因此先做了 $f_\alpha(k,1)$的值。由於 $f_\alpha(k,1)$的答案是未知的，沒辦法很快速的猜出它的值，也找不到相關的資料，因而想到寫程式來尋找這個值，而 $S_\alpha(k,1)$的元素在 k 是這些小數字時也很有規律性。

引理 9.

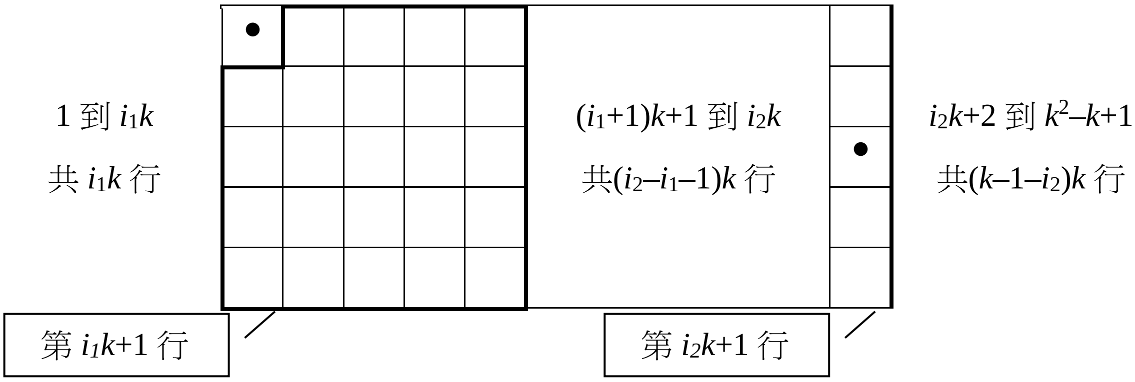
任意 $n=k^2-k+1$ 的和平排列一定找得到$(k\times k-1\times 1)$正方形

證明.

考慮 $n=k^2-k+1$ 的棋盤，利用反證法假設存在找不到$(k\times k-1\times 1)$的和平排列。

若有 $a_{i_1\times k+1}=j_1, a_{i_2\times k+1}=j_2$ $(0\le i_1<i_2\le k-1)$，則$|j_1-j_2|\ge k$。

(1)不論 j_1 和 j_2 的大小關係為何，只要$|j_1-j_2|<k$ 則我們必可在棋盤中取一$(k^2-k+1)\times k$ 的長方形，它的第一列或最後一列是第 j_1 或 j_2 列。不妨設這個長方形的第一列是第 j_1 列。



(2)如上圖所示，第 1 到 i_1k 行、第$(i_1+1)k+1$ 到 i_2k 行、第 i_2k+2 到 k^2-k+1 行三個區域，每 k 行至少要有一個棋子，故總共分別需要 i_1、(i_2-i_1-1)、$(k-1-i_2)$個棋子。

粗框區域也要有一個棋子，再加上原本第 i_1k+1 和 i_2k+1 行的棋子，故總共需有 $i_1+(i_2-i_1-1)+(k-1-i_2)+3=k+1$ 個棋子，但$(k^2-k+1)\times k$ 長方形最多只有 k 個棋子，矛盾。故可知$|j_1-j_2|\ge k$。

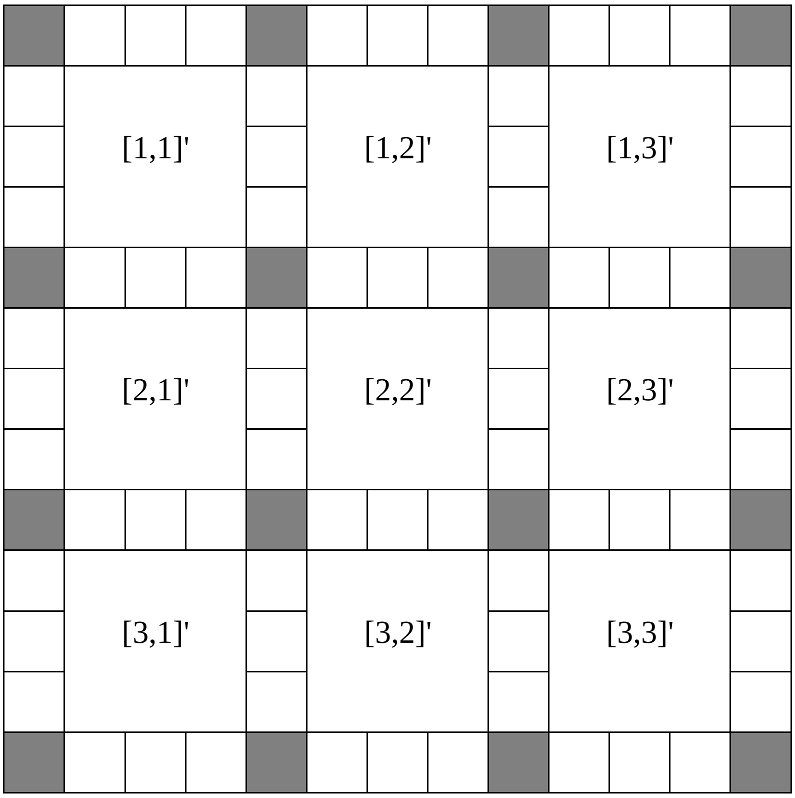
再觀察整個棋盤，將$\{a_1,a_{k+1},a_{2k+1},\ldots,a_{(k-1)k+1}\}$由小到大重排成$\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}$，有 $b_{i+1}-b_i\ge k$，故 $b_k-b_1\ge (k-1)k$。但 $b_1\ge 1$，$b_k\le k^2-k+1$，$b_k-b_1\le (k-1)k$，故只有 $b_k=b_1+(k-1)k$，從而 $b_i=(i-1)k+1$。

此時再引入$[j,i]$的符號，但這邊的$[j,i]$符號和前面的定義不同，因此記為$[j,i]'$以示區別。

這裡的$[j,i]'$是第$(i-1)k+2$ 到 ik 行，與第$(j-1)k+2$ 到 jk 列的交集所形成的$(k-1)\times(k-1)$正方形。每一個$[j,i]'$，加上其上方的$(k-1)\times 1$ 和其左方的 $1\times(k-1)$，都形成一個$(k\times k-1\times 1)$，但其上方和左方都不能放棋子，故每一個$[j,i]'$中必至少有一棋子。總共有$(k-1)^2$ 個$[j,i]'$。

又這些$[j,i]'$正方形內最多共有$(k-1)^2$ 個棋子，故知每個$[j,i]'$內恰有一個棋子。

舉 $k=4$，$n=13$ 之例子如下：



16 個塗色格子中，恰有其中 4 個有棋子；而每個$[j,i]'$內亦恰有一個棋子。

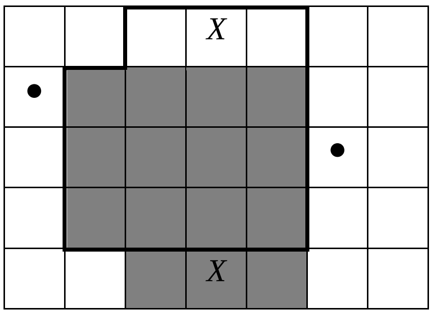
接著使用一個小引理。

引理 9.1

若$[j,1]'$內的棋子在第 p 行，則$\forall i,[j,i]'$內的棋子皆在第 p 行。

證明.

若$[j,i]'$和$[j,i+1]'$內的棋子分別在第 p 和 p'行，則 $p \geq p'$。



如上圖示例，$[j,i]'$為第 1 到 3 行、第 2 到 4 列之交集，$[j,i+1]'$為第 5 到 7 行、第 2 到 4 列之交集。$p<p'$時，因為兩個 X 位置中最多只有一個有棋子，故粗框和塗色的兩個$(k\times k-1\times 1)$內必有一個沒有棋子，矛盾。

因此有：

若$[j,i]'$和$[j,i+1]'$內的棋子分別在第 p 和 p'行，則 $p\geq p'$

若$[j,1]'$和$[j,i]'$內的棋子分別在第 p 和 p'行，則 $p\geq p'$。

有這個條件後，歸納部分即和**引理 3.1、3.2** 的證明類似，故可得證。

同理也可得：

引理 9.2

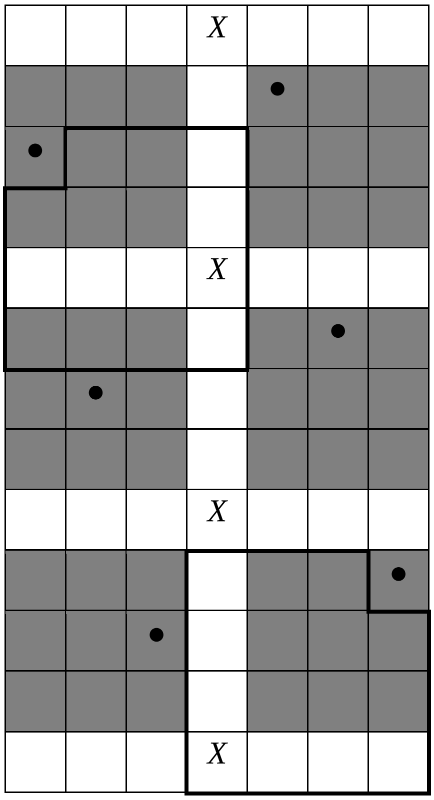
若$[1,i]'$內的棋子在第 q 列，則$\forall j,[j,i]'$內的棋子皆在第 q 列。

所以我們一樣可令$[j,i]'$內的棋子位於第 p_j 行第 q_i 列，記為(p_j,q_i)。

令 $p_{j1}=1,p_{j2}=k-1$。則觀察$[j_1,1]'$和$[j_2,2]'$，以$[j_1,1]'$中的棋子為左上(或左下)角，畫一缺角在左上(或左下)的$(k\times k-1\times 1)$；

以$[j_2,2]'$中的棋子為右上(或右下)角，畫一缺角在右上(或右下)的$(k\times k-1\times 1)$。這兩個缺角正方形中，棋子只可能出現在第 $k+1$ 行，但第 $k+1$ 行只有一棋子，故必有至少一個缺角正方形內無棋子，矛盾。證畢

底下為 $n=13$，$k=4$，$j_1=1$，$j_2=3$ 之例子。

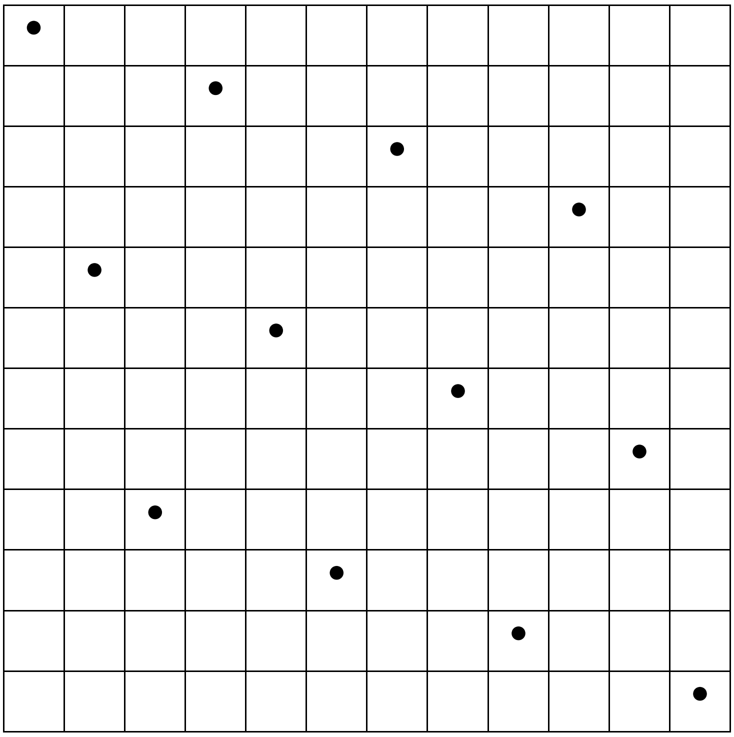


引理 10

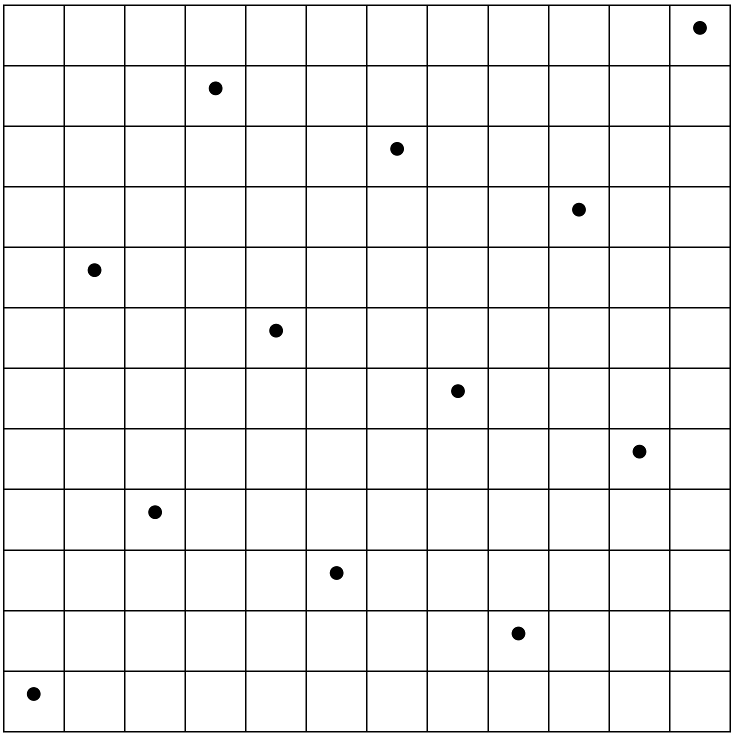
存在$n = k^2 - k$和平排列，找不到$(k \times k-1 \times 1)$缺角正方形

證明.

引用**定理 5**之構造方法，可得以下這個和平排列，此和平排列找不到$(k \times k-1 \times 1)$缺角正方形



上圖代表的是(1,*k*+1,…,(*k*–2)*k*+1, 2,*k*+2,…,(*k*–2)*k*+2,…, *k*,2*k*,…,(*k*–1)*k*)，它和它的類似排列(順時針旋轉 90 度；水平對稱；以左上—右下對角線對稱)共 4 種，皆為 $S_\alpha(k,1)$中的元素。



上圖代表的是(**(*k*–1)*k***,*k*+1,…,(*k*–2)*k*+1, 2,*k*+2,…,(*k*–2)*k*+2,…, *k*,2*k*,…,(*k*–2)*k*,**1**)，它和它的

類似排列(順時針旋轉 90 度；水平對稱；以左上─右下對角線對稱)，皆為 $S_\alpha(k,1)$中的元素，這一類和上一類很類似，只差在 a_1 和 $a_{k(k-1)}$不同而已。

我們猜測當 k>3 時 $S_\alpha(k,1)$中的元素都只有這 8 個，亦即$\boxed{\forall k>3, |S_\alpha(k,1)|=8}$。

雖然在 k 較小的時候都已經經過程式驗證，但仍未證明出來。

定理 7　$f_\alpha(k,\frac{k}{2}) = \frac{k^2}{2}$

我們注意到 $f_\alpha(2,1)=2$, $f_\alpha(4,2)=8$, $f_\alpha(6,3)=18$,於是猜測$f_\alpha(k,\frac{k}{2}) = \frac{k^2}{2}$。

引理

任意 $n=\frac{k^2}{2}+1$ 的和平排列一定找得到$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形

證明.

將 k×k 正方形切割成四塊的小正方形，利用反證法，假設一顆棋子能使 k×k 正方形內找不到$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形，視棋子所在的小正方形為缺角，另外三個$\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$小正方形便可組成$\left(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\right)$缺角正方形，矛盾。

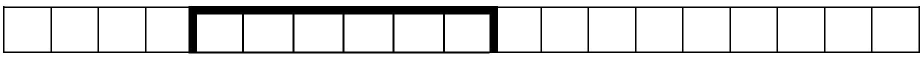
故每個 k×k 正方形須至少兩枚棋子方能滿足要求，而此時兩顆或以上的棋子需在不同的$\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$小正方形。

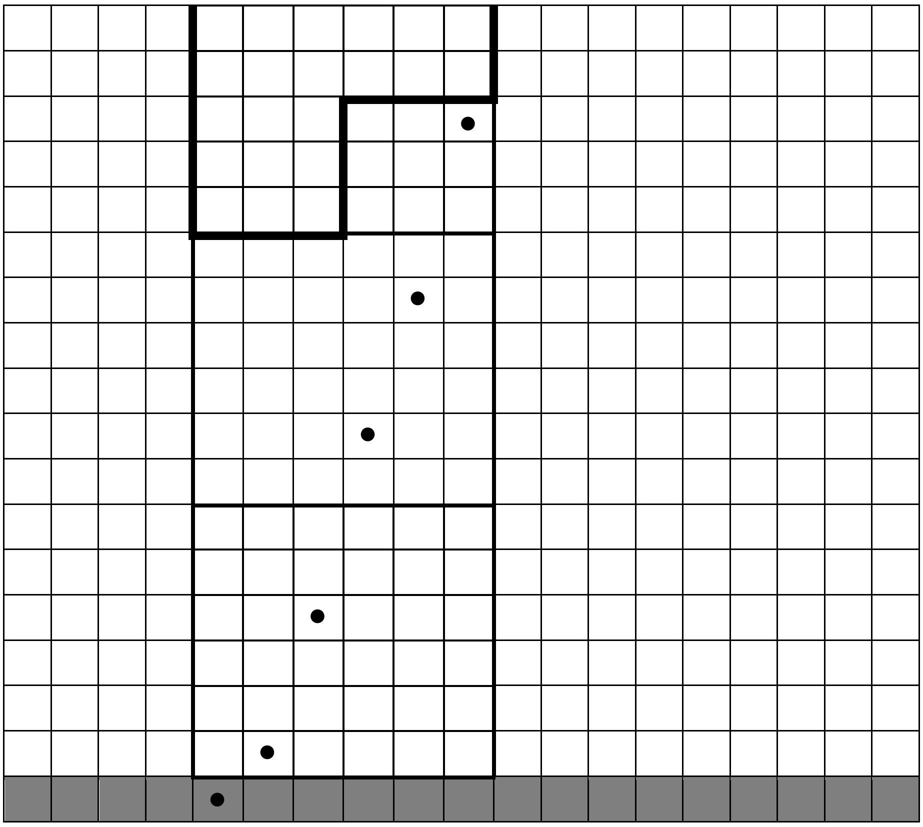
在$\left(\frac{k^2}{2}+1\right)\times\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$的正方形中，假設第 $\frac{k^2}{2}+1$列的棋子位於第 p 行，可以取第 p 行和其臨近的 k–1 行，為一$k\times\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$的長方形。

長方形中，第 1 列到第$\frac{k^2}{2}$列可分割為$\frac{k}{2}$個 k×k 正方形，分別為第 jk+1 到$(j+1)k$ 列，$j=0,1,\ldots,\frac{k}{2}-1$。第 $\frac{k^2}{2}+1$ 列有 1 顆棋子，而整個$k\times\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$的長方形有 k 顆棋子，故此 $\frac{k}{2}$ 個正方形有 k-1 顆棋子。

由鴿籠原理可知必有一個 k×k 正方形內僅有一顆或沒有棋子，得證。

以下舉例 k=6，n=19 的情況。



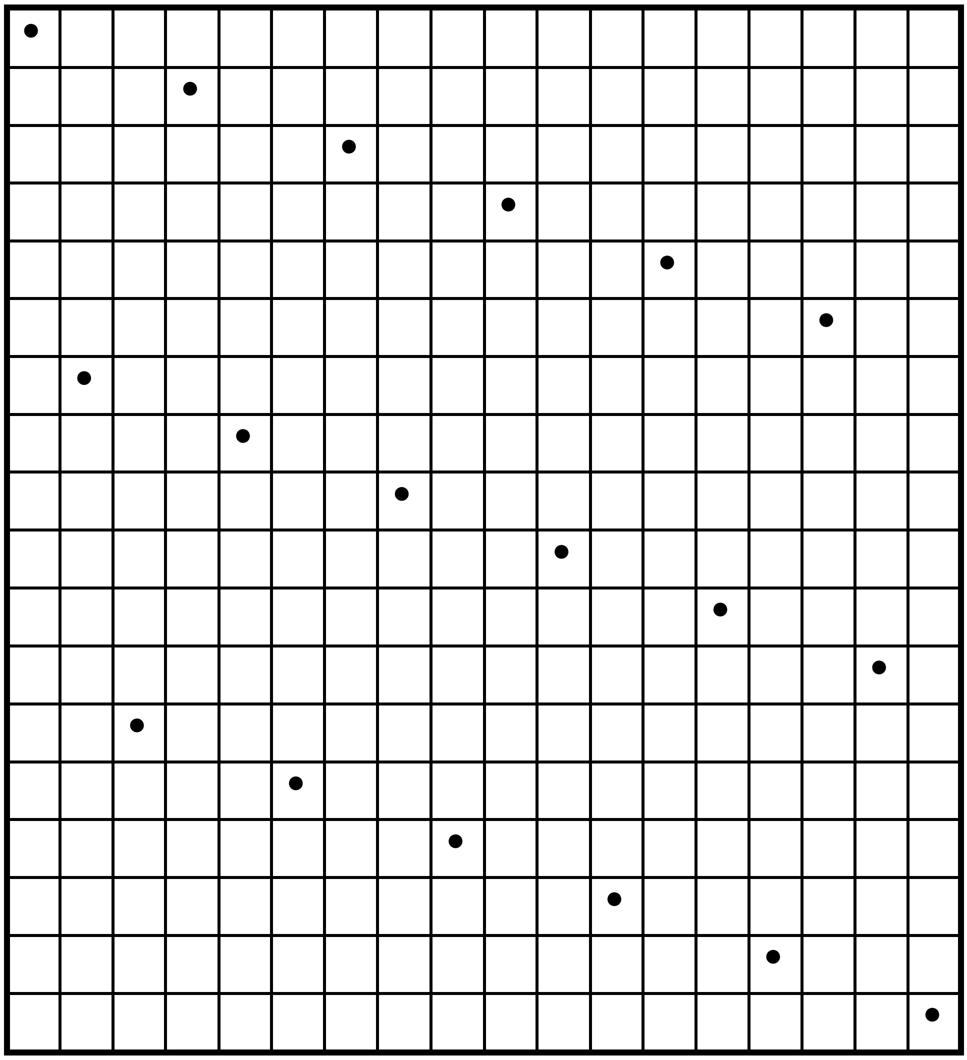


引理

存在 $n=\frac{k^2}{2}$的和平排列，找不到$(k\times k-\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}\ )$缺角正方形

證明.

引用定理 5 之構造方法，可構造出如下圖



這只是其中一種構造法，我們尚未確定$f_\alpha(k,\frac{k}{2})$所有的構造法。利用程式的輔助下，我們得知 $S_\alpha(2,1)=2$，$S_\alpha(4,2)=38$，$S_\alpha(6,3)=232$，由於隨著 k 值的增加，其總數會如指數函數般增大，我們很難去確認每一種排列方式。

3　研究結果與未來展望

目前的研究結果整理如下：

3.1　m=0 時：$f(k,0)=k^2$，$|S(k,0)|=2$，$S(k,0)$中元素為

$(1,k+1,2k+1,\ldots,(k-1)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-1)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,k^2)$和它的類似排列。

3.2　m=1 時：

3.2.1　$f_\beta(k,1)=k^2-1$。

3.2.2　$f_\alpha(2,1)=2$，$|S_\alpha(2,1)|=2$，$S_\alpha(2,1)$中元素為(1,2)和(2,1)。

3.2.3　$f_\alpha(3,1)=6$，$|S_\alpha(3,1)|=6$，$S_\alpha(3,1)$中元素為(1,4,2,5,3,6)和(1,5,3,4,2,6)，和它們的類似排列。

3.2.4　$\forall k>3$，$f_\alpha(k,1)=k^2-k$，推測$|S_\alpha(k,1)|=8$，$S_\alpha(k,1)$中元素為

$(1,k+1,\ldots,(k-2)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-2)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,(k-1)k)$、

$(\boldsymbol{(k-1)k},k+1,\ldots,(k-2)k+1,\ 2,k+2,\ldots,(k-2)k+2,\ldots,\ k,2k,\ldots,(k-2)k,\mathbf{1})$和它們類似排列。

3.3　$\mathrm{f}_\alpha(k,\frac{k}{2})=\frac{k^2}{2}$

3.4　$f_\beta(k,k-1)=2k-1$

4　結論

在報告中，主要是由證明每個$(n+1)\times(n+1)$的和平排列都找的到，以及構造 $n\times n$ 的和平排列找不到(缺角)正方形為骨幹，不管是$f_\alpha(k,1)$、 $f_\beta(k,1)$、$f_\beta(k,k-1)$、$f_\alpha(k,\frac{k}{2})$都是如此，研究過程中，憑空證明及構造實屬不易，於是我們請同學幫我們寫程式，因此得出了$f_\alpha(k,m)$和$f_\beta(k,m)$的值，藉由尋找規律得出通式後，再利用一些組合的方法證明及構造。然而我們尚未完全確定 $S_\alpha(k,1)$內的所有元素，這部分是我們之後首先要證明的，接著我們也期望將二維的$n\times n$棋盤、$(k\times k-m\times m)$缺角正方形，拓展至三維的$n\times n\times n$立體棋盤、$(k\times k\times k-m\times m\times m)$缺角立方體。

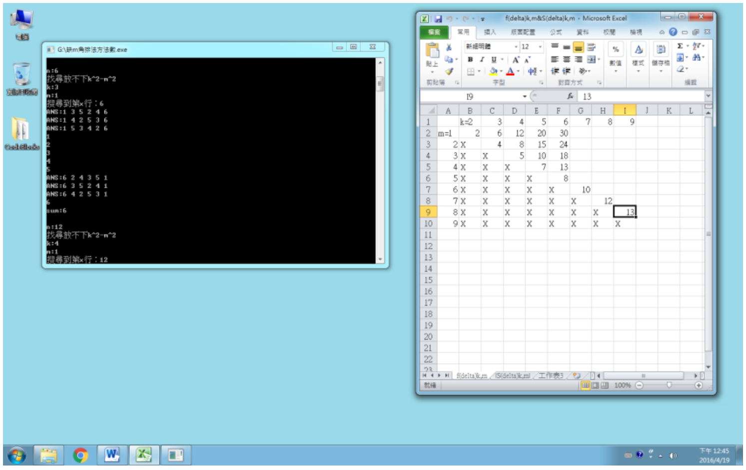
5　參考資料及其他

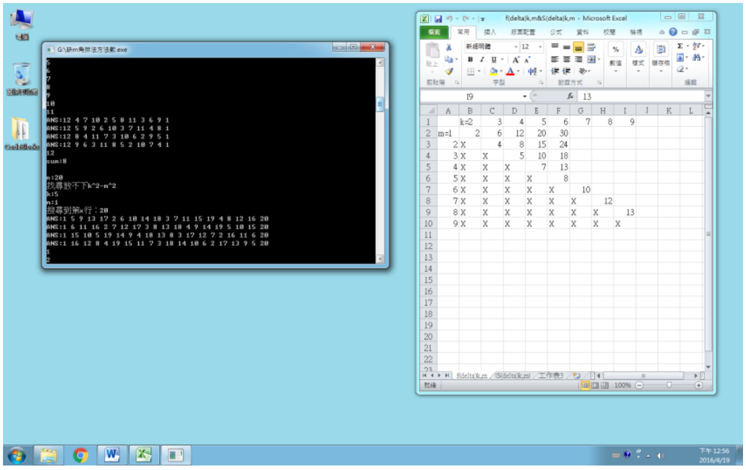
原題目來源則是 2014 年第 55 屆 IMO 試題 P2，題目參考網址：

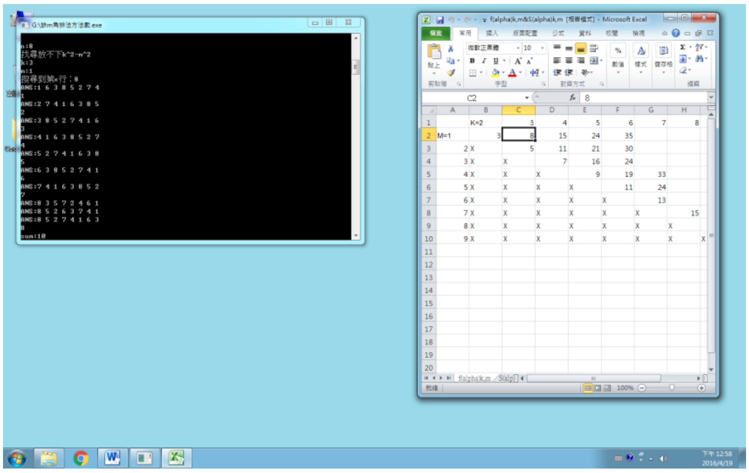
http://www.artofproblemsolving.com/community/c3841_2014_imo

6 附件

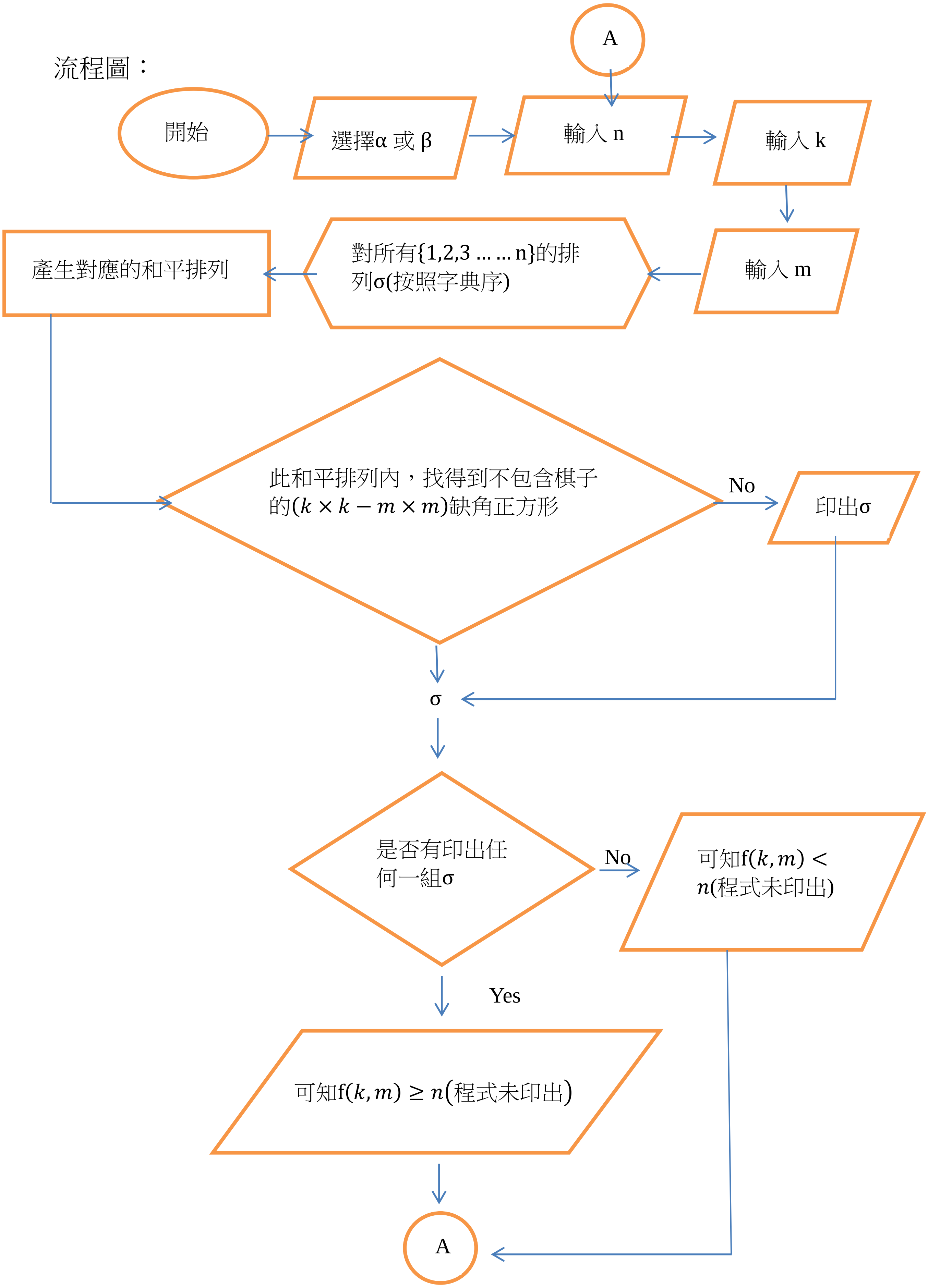
執行檔：







流程圖：



A
開始
選擇α 或 β
輸入 n
輸入 k
輸入 m
對所有{1,2,3 … … n}的排列σ(按照字典序)
產生對應的和平排列
此和平排列內，找得到不包含棋子的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形
No
印出σ
σ
是否有印出任何一組σ
No
可知f$(k, m) <$ n(程式未印出)
Yes
可知f$(k, m) \geq n$(程式未印出)
A