作品名稱：柏拉圖問題與其延伸的研究與探討

參賽學校：康橋高中

作者：1102 楊皓丞

指導老師：許曜瀚

1.動機

有一次國文課老師在介紹蘇格拉底的時候，講到了一個蘇格拉底跟柏拉圖的故事。當時我就已經覺得這個故事很有趣且頗富哲理。我數學課學習到有關機率的課程時，老師提到了經典的柏拉圖問題，我對這個問題中的數學原理更感到好奇，經過文獻探討與一連串深入的研究、討論和證明後，找到原題目的解、此問題的延伸狀況和一般式的解。在此研究中，我嚴謹地證明通式，使用程式模擬數據來驗證其可行性，並成功連結生活上的實際應用。正因為柏拉圖問題與現實生活有強烈的連結，具有趣味性和可探討性，才能解決更多有關選擇的問題，並將這些結果廣泛地應用於生活之中。

2.研究目的

一、了解並探討柏拉圖問題的解。

二、討論柏拉圖問題的兩種延伸。

三、找到柏拉圖問題的通式。

四、將柏拉圖問題應用在生活上。

3.研究設備及器材

一、Desmos 函數圖形計算機（desmos.com/calculator）

用來寫繪製給定的函數

二、紙筆

用來推導公式及證明

三、c++程式

撰寫程式來模擬數據，藉此驗證我推導的公式

4.研究過程與方法

4.1 柏拉圖問題

4.1.1 柏拉圖拾穗的故事

蘇格拉底和柏拉圖是有名的古希臘哲人，且蘇格拉底是柏拉圖的老師。有趣的是，蘇格拉底從不直接回答學生們的問題，而是以反問或實際行動讓學生們自己領悟答案。有一天柏

拉圖向蘇格拉底請教甚麼是愛情，蘇格拉底便請柏拉圖從稻田小徑中的一端走到另一端。路上會有許多稻穗，他請柏拉圖拾起最好的一株走出來。不過，拾取一株後，就要直接走出去，不能再拾取任何其他株了；也不能往回走去拾取之前看到的稻穗。柏拉圖走進稻田，路上看到許多好的稻穗，但他覺得之後還會有更好的，因此一直沒有拾取。不知不覺的，他已經過了稻田，手上卻沒有任何稻穗。蘇格拉底早已在另一端等他，並告訴他：「這就是愛情。」

這個問題深富哲學意義，但其中其實蘊含數學於其中。若以蘇格拉底的規則，柏拉圖想要有最大機率拾取最好的稻穗，策略應為何呢？因為目標是最好的稻穗，因此柏拉圖一定只會在遇到目前為止最好的稻穗時拾取。此狀況可能會在許多不同位置遇到，那應該在何時拾取呢？

4.1.2 數學化柏拉圖問題

令稻田中總共有n株稻穗，且每株稻穗有一個隨機的相應值以代表這株稻穗有多好。若想以最大機率拾到最好的稻穗，正確的取法應為「前幾株稻穗只觀察而不拾取，之後只要一看到更好的稻穗就將它拾取並走到盡頭」。

我們令只觀察不拾取的稻穗為前k株，且此策略下拾到最好的稻穗的機率為P。則我們的目的是找到使P得到最大值的k，以及此時的P。

4.2 研究過程

4.2.1 原題目的解

定義位於第i個位置的稻穗其值為x_i，稻穗中的最大值為$x_{\max}$、第 1 株到第i株稻穗中的最大值為$x_{1^{st}}$、次大值為$x_{2^{nd}}$⋯依此類推。$\mathrm{pos}(x)$為值x的稻穗所在的位置、事件$A(i)$為「取到第i株稻穗」、策略$S(k)$為「前k株稻穗只觀察而不拾取，之後看到更好的稻穗就將其拾取並走到盡頭」、意即P為「策略$S(k)$下取到最大值的機率」、$P_{\max}$為P的最大值，列式如下：

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(x_i = x_{\max} \cap A(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \mathrm{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \mathrm{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{Prob}(\mathrm{pos}(x_{2^{nd}}) \le k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{i-1} \\
&= \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}
\end{aligned}
$$

此處，因我們前k株稻穗只觀察不取，故拾取到前k株稻穗的機率為 0

若第 1 株到第 i 株稻穗中的次大值出現在前k株稻穗，且第 i 株是最大值，才能成功拾取到第 i 株為最大值

因為所求的 k 不會是個定值，而是隨著 n 的取值而改變。因此我們想知道最大機率發生時，n 與 k 的比例，為方便計算，我們令 t 為 k 與 n 的比值，即 $\frac{k}{n}$ (此比例會是定值)。然後，我們將 n 趨近無限(也就是 k 也跟著趨近無限，即 $k=nt$)，以便求 t 的最佳值。

$$
\begin{aligned}
P &= \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&= \lim_{n\to\infty} t \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&= \lim_{n\to\infty} t \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \dots + \frac{1}{n-1} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} t \int_{k}^{n-1} \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} t \left(\ln(n-1) - \ln k \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} t \left(\ln \frac{n-1}{k} \right) \\
&= t \ln \frac{1}{t} \\
&= -t \ln t
\end{aligned}
$$

因此我們得到簡化後的式子：

$$P = -t \ln t$$

將此式一次微分後得到

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P &= \frac{d}{dt} \left(-t \ln t \right) \\
&= -\left(\ln t + 1 \right)
\end{aligned}
$$

將此式二次微分後得到

$$\frac{d^2}{dt^2}P = \frac{d}{dt}\left(-\left(\ln t+1\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{t}$$

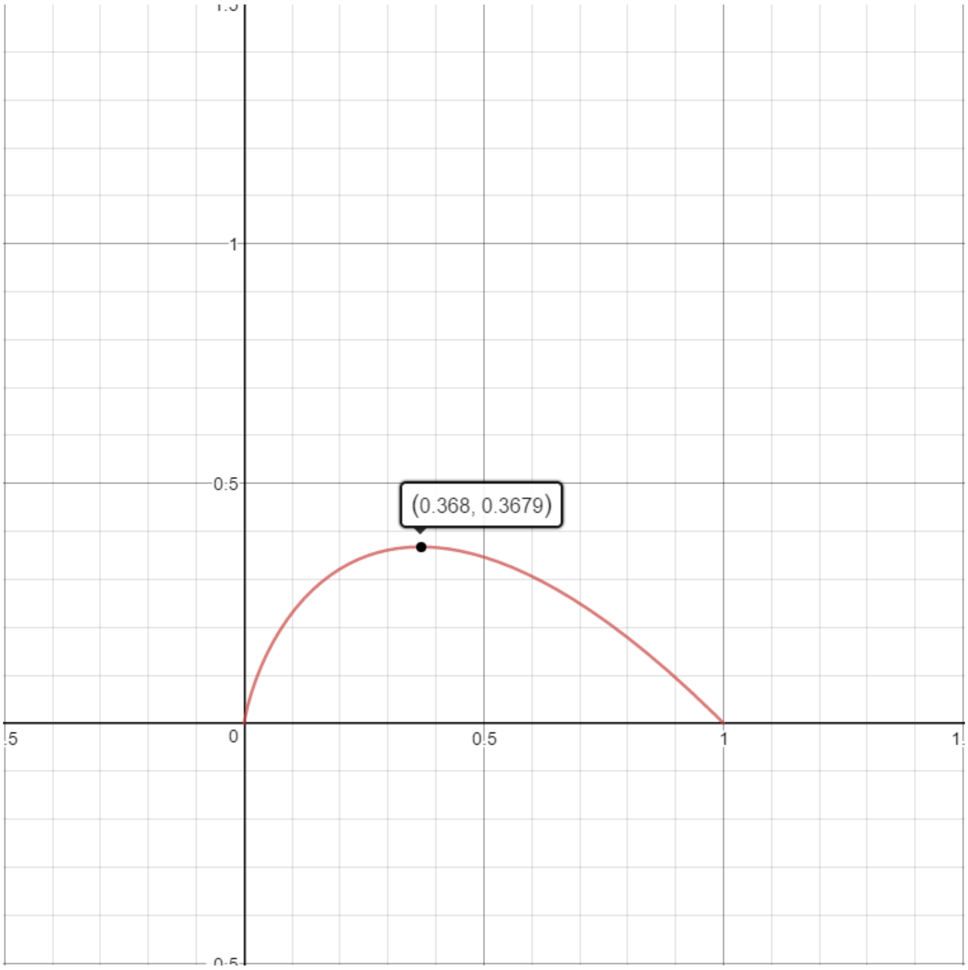
由上面式子，我們可以知道函數 P 的斜率單調遞減，因此函數 P 在斜率為 0 時，可以取到唯一最大值。

$$\frac{d}{dt}P = 0$$
$$\rightarrow \ -\left(\ln t+1\right)=0$$
$$\rightarrow \ t=e^{-1}\approx 0.368$$
$$\rightarrow \ P_{\max} = -e^{-1}\ln e^{-1}$$
$$= e^{-1}\approx 0.368$$

我們計算出當 $t=e^{-1}$ 時，成功取到最大值稻穗的機率會達到最大值 e^{-1}，也就是 36.8%。舉例來說，當 $n=8$ 時，應該要取 $k=8\times e^{-1}\approx 3$。那麼，如果 $n\times t$ 不接近任何整數呢？我們舉個例，當 $n=10$ 時，最佳的 k 應該為 $10\times e^{-1}\approx 3.68$。此時我們可以找出接近 3.68 的兩個整數 3 和 4，並將他們代回機率函數來選比較高的那個。此例中 $k=3$ 時 $P=-0.3\ln 0.3\approx 0.361$；$k=4$ 時 $P=0.4\ln 0.4\approx 0.366$。因此選擇取 $k=4$ 較好。此算法來自參考資料三，我加入了一些中間的過程及文字解釋。

在這個部分，我們成功地計算出最佳的 $t=\frac{k}{n}=e^{-1}$ 這個通式，算出任意總稻穗數的最佳 k 值。

下圖為 P 的函數圖形，本研究中使用的函數繪圖機為 Desmos 函數圖形計算機（desmos.com/calculator），可繪製出任意給定函數的圖形。



（圖 1） P 的函數圖形

我們可以從 P 的函數圖形中看出此函數在斜率為 0 時有最大值 0.368，與我們求出的解相符合。

4.2.2 柏拉圖問題的解的討論

原函數 $P=\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}$ 與估計函數 $P=-t\ln t$ 發生最大值的位置相同，但原函數尋找k值的時間與n呈正比(須帶入每一個k做計算)，估計函數尋找k值的時間則不論n為何數，都是一次乘法的時間，因此估計函數可方便的利用在此類問題中。此策略(前k個只看不取)的特點在，他的機率是不會隨著n變大而讓求解的難度提升，也不會使拿到最大值的機率變得渺茫，而是會收斂於估計函數計算出來的P_{max}。也就是，估計函數的功用有二：

1.快速計算最佳的k值($k = n \times e^{-1}$)

2.計算出取到最大值機率的下限($P_{max} = e^{-1}$)

（圖 2）$n = 8$ 與 80 時的原函數與估計函數比較

可以看出 n 越大，估計函數的圖形與原函數越相近。

我又以程式來模擬柏拉圖問題的拾取過程。首先，在隨機的範圍下隨機的產生個相異的 n 數。決定 k 值和機會數後，實際模擬並統計在 100000 次中，有幾次成功取到最大值，及取到最大值的比率。

當 $n=8$ 時，應該要在 $k=3$ 時機率得到最大，以下是程式測試結果：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.123	0.326	0.398	0.413	0.381	0.318	0.233	0.125	0

當 $n=80$ 時，應該要在 $k=29$ 時機率得到最大，以下是程式測試結果：

k	…	27	28	29	30	31	32	33	…
P		0.382	0.382	0.383	0.383	0.382	0.380	0.380	

這些數據皆符合上面的函數圖形，可驗證我們推導的函數的正確性。

4.2.3 柏拉圖問題的第一個延伸—複數機會柏拉圖問題

原柏拉圖問題的討論，只適用在當下只能選擇一株稻穗的情況下，所做出的選擇。

那麼，我們想知道有沒有辦法推廣柏拉圖問題到挑選過程中可以取不只一株稻穗的狀況。於是，我們決定開始探討「複數機會柏拉圖問題」。意即，找出在過程中可以取 a 株稻穗的狀況下，最佳的 k 及成功取到最大值的機率 P 。定義 $P_{a^{th}}$ 為「使用策略 $S(k)$ 時，第 a 次機會拾取的稻穗是最大值的機率」、 P_a 為「過程中可以取 a 株稻穗的狀況下使用策略 $S(k)$ 時，其中一次拾取的稻穗是最大值的機率」、 $P_{a\max}$ 為 P_a 的最大值、事件 $A(t,i)$ 為「第 t 次取

到第i株稻穗」。

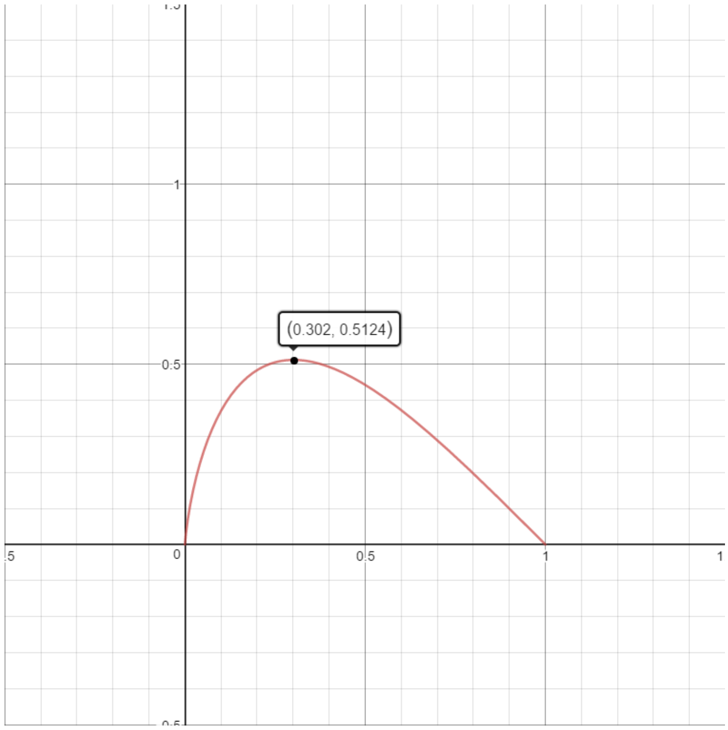
在推廣到a株稻穗的通式前，先來討論$a=2$的情況，即過程中可以取2株稻穗。

$$
\begin{aligned}
P_2 &= P_{1^{st}} + P_{2^{nd}} \\
&= P_{1^{st}} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(x_i = x_{\max} \cap A(2,i)) \\
&= P_{1^{st}} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \mathrm{Prob}(A(2,i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= P_{1^{st}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \mathrm{Prob}(A(2,i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \mathrm{Prob}(A(2,i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \mathrm{Prob}(i-1 \ge \mathrm{pos}\left(x_{2^{nd}}\right) > k \cap k \ge \mathrm{pos}\left(x_{3^{rd}}\right)) \\
&= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \mathrm{Prob}(i-1 \ge \mathrm{pos}\left(x_{2^{nd}}\right) > k) \times \mathrm{Prob}\,(k \ge \mathrm{pos}\left(x_{3^{rd}}\right) \mid i-1 \ge \mathrm{pos}\left(x_{2^{nd}}\right) > k) \\
&= P_{1^{st}} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \left(1 - \frac{k}{i-1}\right) \times \frac{k}{i-2} \\
&= P_{1^{st}} + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \frac{k}{i-2}\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \frac{k^2}{(i-1)(i-2)}\right) \\
&= P_{1^{st}} + \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \frac{1}{i-2}\right) - \left(\frac{k^2}{n} \sum_{i=k+2}^{n} \frac{1}{(i-1)(i-2)}\right) \\
&= P_{1^{st}} + \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-2} \frac{1}{i}\right) - \frac{k^2}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

為了方便計算，我們令t為k與n比值，即$\frac{k}{n}$。然後將n趨近無限，以便求t的最佳值。

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \lim_{n\to\infty}\left(P_{1^{st}} + \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-2} \frac{1}{i}\right) - \frac{k^2}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-1}\right)\right) \\
&= -t\ln t - t\ln t - t + t^2 \\
&= -2t\ln t - t + t^2
\end{aligned}
$$

同樣的，在二次微分後可看出函數P_2的斜率單調遞減，代表函數P_2在斜率為0時，可取到唯一最大值。



（圖 3） P_2 的函數圖形

$$\frac{d}{dt}P_2 = 0$$
$$\to\ -2\ln t + 2t - 3 = 0$$
$$\to\ 2\ln t = 2t - 3$$
$$\to\ t \approx 0.302$$

此處可用作圖大略找出 t 的值，或是以電腦計算機繪出 P_2 的函數圖形並直接求取 t 的值。再將 t 代回 P_2 可得到 $P_{2\max} \approx 0.512$ 。

為了找出通式，我們決定討論$a=3$的狀況。

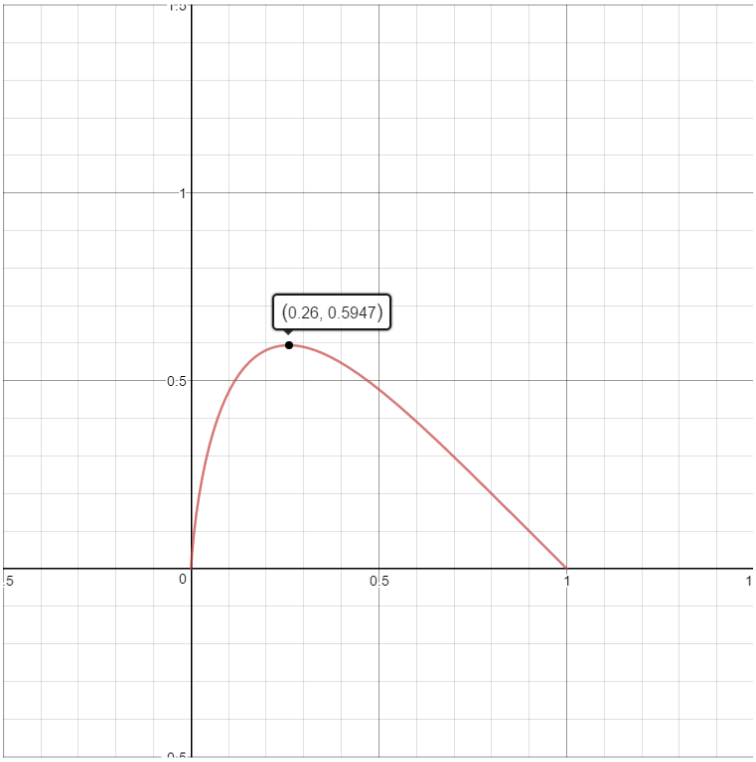
$$P_3 = P_{1^{st}} + P_{2^{nd}} + P_{3^{rd}}$$

$$\begin{aligned}
P_{3^{rd}} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}\left(x_i = x_{\max} \cap A(3,i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \mathrm{Prob}(A(3,i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^{n} \mathrm{Prob}(A(3,i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^{n} \mathrm{Prob}(i-1 \geq \mathrm{pos}\left(x_{2^{nd}}\right) > k \cap i-1 \geq \mathrm{pos}\left(x_{3^{rd}}\right) > k \cap k \geq \mathrm{pos}\left(x_{4^{th}}\right)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+3}^{n} \left(1-\frac{k}{i-1}\right) \times \left(1-\frac{k}{i-2}\right) \times \frac{k}{i-3} \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{k}{i-3}\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{k^2}{(i-1)(i-3)}\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{k^2}{(i-2)(i-3)}\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{k^3}{(i-1)(i-2)(i-3)}\right) \\
&= \left(\frac{k}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{1}{i-3}\right) - \left(\frac{k^2}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{1}{(i-1)(i-3)}\right) - \left(\frac{k^2}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{1}{(i-2)(i-3)}\right) + \left(\frac{k^3}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{1}{(i-1)(i-2)(i-3)}\right) \\
&= \left(\frac{k}{n}\sum_{i=k+3}^{n}\frac{1}{i-3}\right) - \frac{k^2}{2n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) - \frac{k^2}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-2}\right) + \frac{k^3}{2n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\right)
\end{aligned}$$

為了方便計算，我們令t為k與n比值，即$\frac{k}{n}$。然後將n趨近無限，以便求t的最佳值。

$$\begin{aligned}
P_3 &= \lim_{n\to\infty}\left(P_2 + P_{3^{rd}}\right) \\
&= \left(-2t\ln t - t + t^2\right) - t\ln t - 2\left(t - t^2\right) + \frac{1}{2}\left(t - t^3\right) \\
&= -3t\ln t - \frac{5}{2}t + 3t^2 - \frac{1}{2}t^3
\end{aligned}$$

根據同樣的方法可得到P_3的斜率單調遞減，因此會在斜率為 0 時取到最大值。用作圖或電腦繪圖機可求取斜率為 0 時，$t \approx 0.260$ ，代回機率函數得到$P_{3\max} \approx 0.595$



（圖 4）P_3 的函數圖形

4.2.4 尋找複數機會柏拉圖問題的通式

經過複數機會柏拉圖問題中 $a=2$ 、$a=3$ 的討論，我們決定觀察其中的規律並以數學方法試圖尋找通式。我們利用前面的方法列出了 $P_1 \sim P_5$ 的機率函數，並列表討論係數之間的關係。

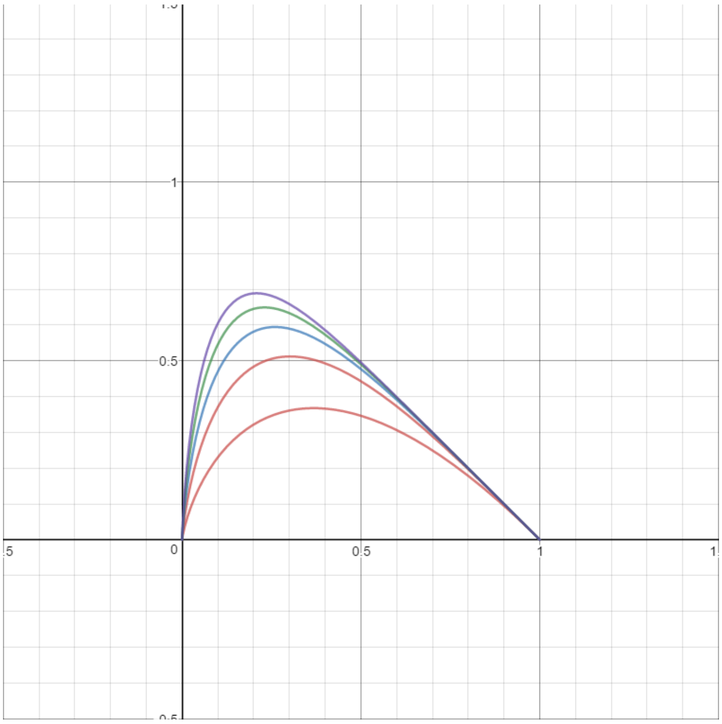
$$P_1 = -t\ln t$$

$$P_2 = -2t\ln t - \left(t - t^2\right)$$

$$P_3 = -3t\ln t - 3\left(t - t^2\right) + \frac{1}{2}\left(t - t^3\right)$$

$$P_4 = -4t\ln t - 6\left(t - t^2\right) + 2\left(t - t^3\right) - \frac{1}{3}\left(t - t^4\right)$$

$$P_5 = -5t\ln t - 10\left(t - t^2\right) + 5\left(t - t^3\right) - \frac{5}{3}\left(t - t^4\right) + \frac{1}{4}\left(t - t^5\right)$$



（圖 5）$P_1 \sim P_5$ 的函數圖形

我們將係數列成下列表格，觀察並找尋其規律。我們經過觀察後發現係數的增量和 a 的關係與巴斯卡三角形有關。

（表 1）項次與係數增量之關係表

係數	$t\ln t$	增量	$t-t^2$	增量	$t-t^3$	增量	$t-t^4$	增量	$t-t^5$	增量
$a=1$	-1	-1								
$a=2$	-2	-1	-1	-1						
$a=3$	-3	-1	-3	-2	1/2	1/2				
$a=4$	-4	-1	-6	-3	2	3/2	-1/3	-1/3		
$a=5$	-5	-1	-10	-4	5	6/2	-5/3	-4/3	1/4	1/4

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

.

（圖 6）巴斯卡三角形

當 $a=3$ 時，各項增量分別為 $-C_0^2$ 、 $-C_1^2$ 、 $\frac{1}{2}C_2^2$ 。

當 $a=4$ 時，各項增量分別為 $-C_0^3$ 、 $-C_1^3$ 、 $\frac{1}{2}C_2^3$ 、 $-\frac{1}{3}C_3^3$ 。

當 $a=5$ 時，各項增量分別為 $-C_0^4$ 、 $-C_1^4$ 、 $\frac{1}{2}C_2^4$ 、 $-\frac{1}{3}C_3^4$ 、 $\frac{1}{4}C_4^4$ 。

因此我們可以推測：

當 $a=6$ 時，各項增量分別為 $-C_0^5$ 、 $-C_1^5$ 、 $\frac{1}{2}C_2^5$ 、 $-\frac{1}{3}C_3^5$ 、 $\frac{1}{4}C_4^5$ 、 $-\frac{1}{5}C_5^5$ 。

所以，當 $a=\alpha$ 時， P_α 中 $t\ln t$ 的係數為 $-\sum_{i=0}^{\alpha-1}C_0^i=-C_1^\alpha=-\alpha$ ； $t-t^2$ 的係數為 $-\sum_{i=1}^{\alpha-1}C_1^i=-C_2^\alpha$ ； $t-t^3$ 的係數為 $\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\alpha-1}C_2^i=\frac{1}{2}C_3^\alpha$ ； $t-t^4$ 的係數為 $-\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{\alpha-1}C_3^i=-\frac{1}{3}C_4^\alpha$ …依此類推。

最後我們整理出通式：

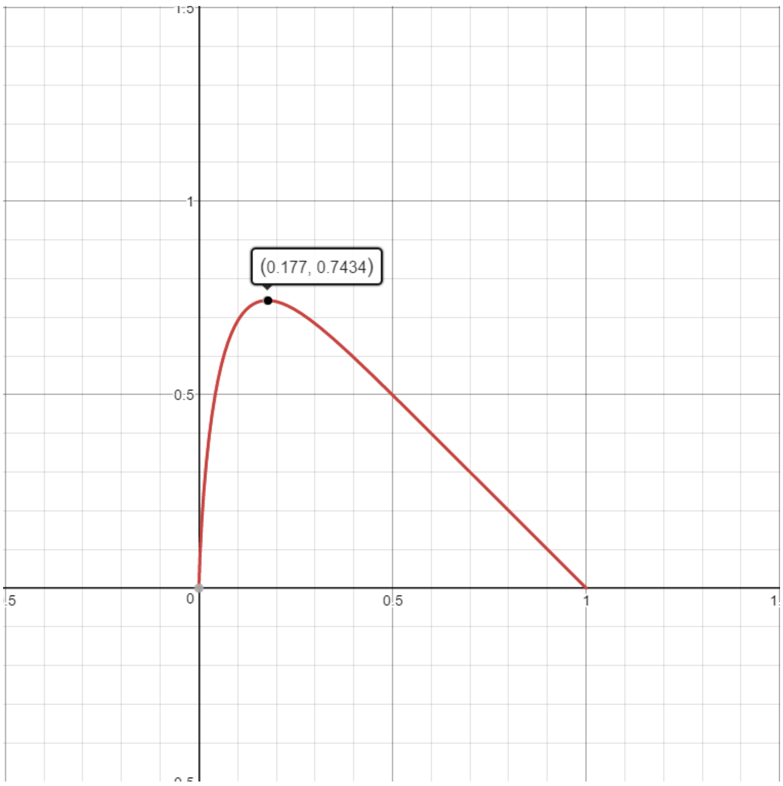
$$P_a=-at\ln t+\sum_{i=2}^{a}\frac{C_i^a\left(t-t^i\right)}{(i-1)(-1)^{i-1}}$$

舉個例來說，想要知道共有 80 株稻穗且有七次的機會可以取稻穗時，應該取 k 值為何，以及此時取得最佳稻穗的機率，就先以通式列出機率函式

$$P_7=-7t\ln t-C_2^7\left(t-t^2\right)+\frac{1}{2}C_3^7\left(t-t^3\right)-\frac{1}{3}C_4^7\left(t-t^4\right)+\frac{1}{4}C_5^7\left(t-t^5\right)-\frac{1}{5}C_6^7\left(t-t^6\right)+\frac{1}{6}C_7^7\left(t-t^7\right)$$

$$=-7t\ln t-\frac{223}{20}t+21t^2-\frac{35}{2}t^3+\frac{35}{3}t^4-\frac{21}{4}t^5+\frac{7}{5}t^6-\frac{1}{6}t^7$$

接著，用電腦繪圖機計算出函數取到最大值時 $t\approx0.177$ ，代回機率函數得到 $P_{7\max}\approx0.743$ 。再算出 $k=n\times t\approx80\times0.177=14.16$ ，得到 $k=14$ 時取到最大值的機率最高。



（圖 7） P_7 的函數圖形

4.2.5 複數機會柏拉圖問題-通式的證明

$$\begin{aligned}
P_{\alpha^{th}} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}\left(x_i = x_{\max} \cap 第\alpha次取到第i株稻穗\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(x_i = x_{\max}) \times \mathrm{Prob}(第\alpha次取到第i株稻穗 \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \mathrm{Prob}(第\alpha次取到第i株稻穗 \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\prod_{j=1}^{\alpha-1} 1 - \frac{k}{i-j} \right) \times \frac{k}{i-\alpha}
\end{aligned}$$

觀察後得到，展開後分子為k^{β}次方的有$C_{\beta-1}^{\alpha-1}$項，若能證明對於任何β，這$C_{\beta-1}^{\alpha-1}$項取極限後都相同且符合前面觀察的係數增量關係，就能完成證明。

1. $\beta = 1$時，這些項取極限皆等於$-t \ln t$

$\beta = 1$時，也就是分子為k的只有一項，$\frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \frac{k}{i-\alpha}$，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \frac{k}{i-\alpha} = -t \ln t$，證畢。

2. $\beta > 1$時，這些項取極限皆等於$(-1)^{\beta-1} \frac{1}{\beta-1}(t - t^{\beta})$

$\beta > 1$時，也就是分子為k的有$C_{\beta-1}^{\alpha-1}$項，令這些項的集合為$B(\beta)$，且$B(\beta)$中最小的一項為

$\frac{k^{\beta}}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\frac{1}{i-\alpha} \prod_{j=1}^{\beta-1} \frac{1}{i-j} \right)$，最大的一項為$\frac{k^{\beta}}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\prod_{j=\alpha-\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{i-j} \right)$，則有：

$$\forall x \in B(\beta) \left[\frac{k^{\beta}}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\prod_{j=1}^{\beta} \frac{1}{i-j} \right) \le x \le \frac{k^{\beta}}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\prod_{j=\alpha-\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{i-j} \right) \right]$$

$$\to \quad \forall x \in B(\beta) \left[\lim_{n\to\infty} \frac{k^{\beta}}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\prod_{j=1}^{\beta} \frac{1}{i-j} \right) \le \lim_{n\to\infty} x \le \lim_{n\to\infty} \frac{k^{\beta}}{n} \sum_{i=k+\alpha}^{n} \left(\prod_{j=\alpha-\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{i-j} \right) \right]$$

$$\to \quad \forall x \in B(\beta) \left[\frac{1}{\beta-1}\left(t - t^{\beta}\right) \le \lim_{n\to\infty} x \le \frac{1}{\beta-1}\left(t - t^{\beta}\right) \right]$$

$$\to \quad \forall x \in B(\beta) \left[\lim_{n\to\infty} x = \frac{1}{\beta-1}\left(t - t^{\beta}\right) \right]$$

證畢。

綜合 1.與 2.的證明，通式證畢。

再來要證明對於任何a，P_a都會是一個單極值函數，如此就可以確定函數上斜率為 0 處即為最大值。這等價於證明P_a的二階導函數恆負。

$$P_a=-at\ln t+\sum_{i=2}^{a}\frac{C_i^a\left(t-t^i\right)}{(i-1)(-1)^{i-1}}$$

$$\frac{d}{dt}P_a=-a\left(\ln t+1\right)+\sum_{i=2}^{a}\frac{C_i^a\left(1-it^{i-1}\right)}{(i-1)(-1)^{i-1}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d^2t}P_a&=-\frac{a}{t}+\sum_{i=2}^{a}(-1)^i C_i^a it^{i-2}\\&=-\frac{a}{t}+\sum_{i=2}^{a}(-1)^i C_i^a it^{i-2}\\&=\sum_{i=0}^{a}(-1)^i C_i^a it^{i-2}\\&=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{a}(-1)^i C_i^a it^{i-1}\end{aligned}$$

又a為奇數時，$\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{a}(-1)^i C_i^a it^{i-1}=\frac{1}{t}\left(-\frac{d}{dt}(t-1)^a\right)=-\frac{a}{t}(t-1)^{a-1}\leq 0$ ；

且a為偶數時，$\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{a}(-1)^i C_i^a it^{i-1}=\frac{1}{t}\left(\frac{d}{dt}(t-1)^a\right)=\frac{a}{t}(t-1)^{a-1}\leq 0$ 。

得證。

4.2.6 柏拉圖問題的第二個延伸—複數目標柏拉圖問題

在原題目及第一個延伸的討論中，都執著在必須要取到最大值的機率函數。

那麼，如果我們不這麼執著，結果又會怎麼樣呢？也就是說，我們一樣只能拾取一株，但可以接受的稻穗不只最大的呢？我決定開始探討「複數目標柏拉圖問題」-可接受前b大值的狀況下，最佳的k及成功的機率P。定義$P^{b^{th}}$為「使用策略$S(k)$時，拾取到的稻穗是第b大值的機率」、P^b為「可接受前b大值的狀況下使用策略$S(k)$時，拾取到的稻穗是最大值的機率」、$P^{b\max}$為P^b的最大值、x_{r2}為稻田中第二大的稻穗、x_{r3}為稻田中第三大的稻穗，依此類推。

先討論$b=2$的狀況：

$$P^2 = P + P^{2^{nd}}$$

$$\begin{aligned}
P^{2^{nd}} &= \sum_{i=1}^{n} \text{Prob}(x_i = x_{r2} \cap A(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \text{Prob}(x_i = x_{r2}) \times \text{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \text{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{r2}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \text{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{r2}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{2^{nd}}) \le k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i) \times \text{Prob}(\text{pos}(x_{2^{nd}}) \le k \mid \text{pos}(x_{\max}) > i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} (1 - \frac{i-1}{n-1}) \times \frac{k}{i-1} \\
&= \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1} - \frac{1}{n-1} \\
&= (\frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$P^2 = (\frac{2k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

同樣令$t = \dfrac{k}{n}$，n趨近無限，可得到

$$\begin{aligned}
P^2 &= \lim_{n \to \infty} \left(\left(\frac{2k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1} \right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \right) \\
&= -2t \ln t - t(1-t) \\
&= -2t \ln t - t + t^2
\end{aligned}$$

我們發現P^2所推導出的函數跟P_2是一樣的，因此k的取值及$P^{2\max}$都跟複數機會柏拉圖問題中$a = 2$的狀況時是一樣的。

再來討論$b = 3$的狀況：

$$
\begin{aligned}
P^3 &= P + P^{2^{nd}} + P^{3^{rd}} \\
P^{3^{rd}} &= \sum_{i=1}^{n} \text{Prob}(x_i = x_{r3} \cap A(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \text{Prob}(x_i = x_{r3}) \times \text{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{\max}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \text{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{r3}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \text{Prob}(A(i) \mid x_i = x_{r3}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{r2}) > i \cap \text{pos}(x_{2^{nd}}) \le k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \text{Prob}(\text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{r2}) > i) \times \text{Prob}(\text{pos}(x_{2^{nd}}) \le k \mid \text{pos}(x_{\max}) > i \cap \text{pos}(x_{r2}) > i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n-1}\right) \times \left(1 - \frac{i-1}{n-2}\right) \times \frac{k}{i-1} \\
&= \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{n-1}\right) \times \left(1 - \frac{i-1}{n-2}\right) \\
&= \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}\right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{i-1}{(n-1)(n-2)} \\
&= \left(\frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}\right) - \frac{k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k(k+n-1)(n-k)}{2n(n-1)(n-2)} \\
P^3 &= \left(\frac{3k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}\right) - \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k(k+n-1)(n-k)}{2n(n-1)(n-2)}
\end{aligned}
$$

同樣令 $t = \dfrac{k}{n}$ ， n 趨近無限，我們可得到

$$
\begin{aligned}
P^3 &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}\right) - \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k(n-k)}{n(n-2)} + \frac{k(k+n-1)(n-k)}{2n(n-1)(n-2)} \\
&= -3t\ln t - 3t(1-t) + \frac{1}{2}t(t+1)(1-t) \\
&= -3t\ln t - \frac{5}{2}t + 3t^2 - \frac{1}{2}t^3
\end{aligned}
$$

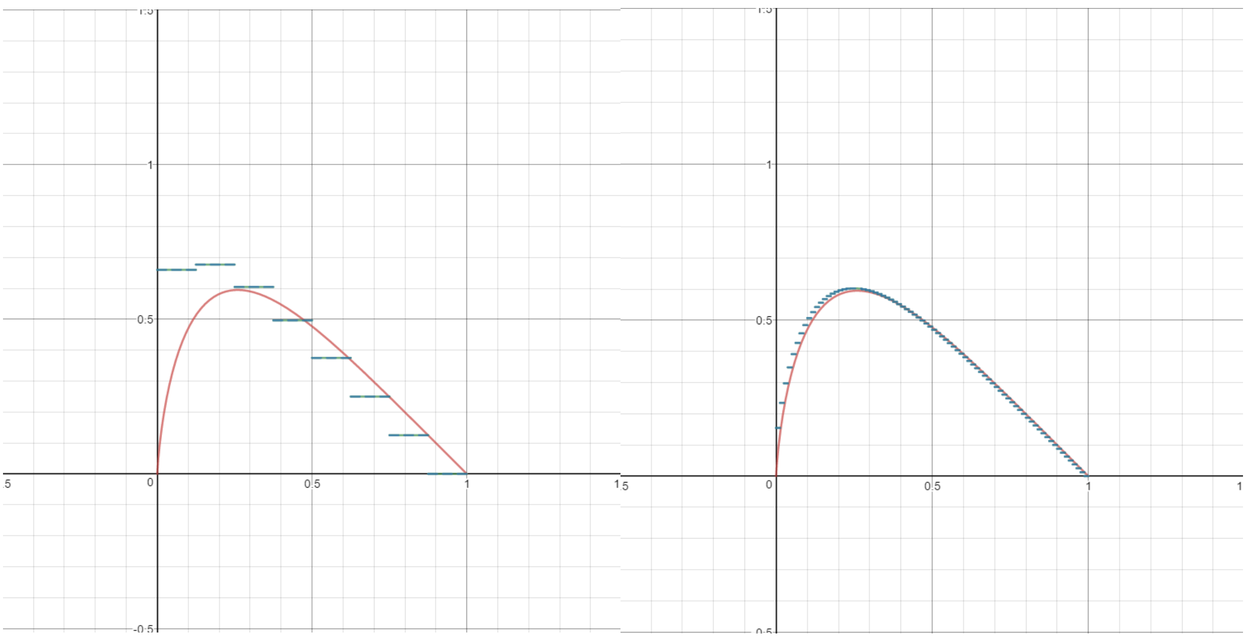
同樣的，我們發現 P^3 推導出的函數跟 P_3 是一樣的，因此 k 的取值及 $P^{3\max}$ 都跟複數機會柏拉圖問題中 $a=3$ 的狀況時是一樣的。在經過 $b=2$ 、$b=3$ 的推導，我們相信對於任何正

整數c，會有$P^c = P_c$；如此一來，複數機會柏拉圖問題的通式就是複數目標柏拉圖問題的通式。回去觀察$b = 2$、$a = 2$的原函數後，發現雖然過程不同，但展開後原本就是一樣的函數， $b = 3$、$a = 3$ 的亦同，所以理所當然推導出的估計函數也相同。

至於詳細嚴謹的證明，需要使用到連續正整數的k次方和，我們目前還在了解與學習。不過在下面我們會用大量資料分析的方式說明此假設的正確性。

4.2.7 柏拉圖問題之延伸的討論

我繪出$c = 3$時，複數機會及複數目標的原函數圖形及估計函數圖形。



（圖 8）$a = 2$、$n = 8$ 與 80 時的原函數與估計函數比較

可以看出跟原本的柏拉圖問題一樣，最大值的位置發生處相同，而且準確度隨著n上升而跟著上升。再次用程式模擬來驗證：

複數機會柏拉圖問題中，當$n = 80$時，$a = 7$時應該要在$k = 14$時機率得到最大，以下是程式測試結果：

k	…	11	12	13	14	15	16	17	…
P		0.755	0.760	0.760	0.761	0.760	0.756	0.752	

複數目標柏拉圖問題中，當$n = 80$時，$b = 7$時應該要在$k = 14$時機率得到最大，以下是程式測試結果：

k	…	11	12	13	14	15	16	17	…
P		0.752	0.757	0.758	0.761	0.759	0.756	0.752	

可以看出數據資料和函數圖形是符合的。

4.3 柏拉圖問題的應用

在生活中，不乏柏拉圖問題可以應用之處，舉幾個例子如下：

1、秘書問題：公司要聘請秘書時，如果已知總求職人數，且必須要當下決定是否錄取，就可使用柏拉圖問題的解來處理。例如：有 100 名求職者的話，應該要取 $k=100\times0.368=36.8$，取最接近的整數 37。前 37 位觀察其能力，但不錄取，後面一看到能力更強者就錄取，能有最大機率錄取最好的人。

2、適婚期問題：由於時間不可能倒退，因此若要決定是否要在某年齡時與某人結婚，可以用柏拉圖問題來討論。假如一個人適合結婚成家的年齡範圍為 20 至 40 歲，並且這段時間會遇到許許多多的交往對象，那我們應該在什麼時候結婚呢？取 $k=20\times0.368=7.360$，因此應該在 27 歲後再挑選伴侶結婚。

3、商店街問題：時間不等人，假如一個人在逛一排有 100 個商品的商店街，但打烊時間迫在眉睫，時間只允許該人從入口走到出口一次，不能折返，且所有商品價錢相等。並且這個人身上帶的錢只夠買一樣商品，那他該如何選擇呢？取 $k=100\times0.368=36.8$，因此應該在第 37 個商品之後開始選擇是否購買。如果這個人身上的錢可以購買超過一種商品，且他的目標是買到其中最好的商品，那就要套用複數機會柏拉圖問題的解。

4、若想要有 70%的機率取到最大值，要怎麼知道需要幾次機會呢?我們用通式找出了以下幾個指標性的機率，以便參考與應用。

目標機率	30%	50%	70%	80%	90%
需要機會數	1	2	6	11	30

5、在 1~3 的應用中，如果我們並不要求要拿到最好的，只要是前 3 好(或前 5 好、前 10 好)就可以接受，那麼就可以使用複數目標柏拉圖問題的解。

5.結論

5.1 柏拉圖問題的解

經過推導，我們得知機率函數 $P=-t\ln t$ ，而最佳的 t 值為 $e^{-1}\approx 0.368$ ，此時取到最佳稻穗的機率 $P_{\max}=e^{-1}\approx 0.368$ 。簡單的選擇問題，如秘書及適婚問題，可以用這個方式算出。

5.2 複數機會柏拉圖問題的解

此部分在討論柏拉圖問題中，當可以拾取超過一株稻穗時要如何處理。經過計算、觀察、與推導，我們終於找到複數機會柏拉圖問題的通式。

$$P_{\alpha}=-\alpha t\ln t+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{C_i^{\alpha}\left(t-t^i\right)}{\left(i-1\right)\left(-1\right)^{i-1}}$$

由此通式可以找出當能拾取超過一次時的最佳 t 值與取到最佳稻穗的機率 $P_{\max}$ 。較複雜的選擇問題，如商店街問題，可以用這個方式算出。

5.3 複數目標柏拉圖問題的解

此部分在討論柏拉圖問題中，當可以接受不只最好的稻穗時要如何處理。 b 較小時我們證明會與複數機會柏拉圖問題得到相同函數，且在 b 較大時用大量的程式測試發現數據也是互相符合的。所以我們認為複數目標柏拉圖問題的通式就是複數機會柏拉圖問題的通式。

6.參考資料

1.C. Adams、J. Hass、A. Thompson（2010）。微積分之屠龍寶刀。天下文化。
2.許介彥。最好的時機。2015 年 12 月 1 號，取自
http://beaver.ncnu.edu.tw/projects/emag/article/200602/%E6%9C%80%E5%A5%BD%E7%9A%84%E6%99%82%E6%A9%9F.pdf
3.台大數學系杜鵑花節師生籌備團隊（2015）。淺談超越數與圓周率 π 。
4. 陳伯恩。 The Secretary Problem: Two-Player Extensions and Going Back。取自
http://www.math.ntu.edu.tw/~shing_tung/PDF/1st/Chen(US).pdf