翻轉塗色—Thue-Morse 數列的同色 3-AP 個數

莊沅蓉

國立臺南女子高級中學

目錄

一　問題介紹

會考慮本問題是在我看完 [3] 之後所獲得的靈感。令 $A = a_1a_2\cdots a_n$ 為一長度為 n 的雙色字串，也就是任一個 $a_1, a_2, ..., a_n$ 不是 0 就是 1。如果存在正整數 i 及 d 滿足 $a_i = a_{i+d} = a_{i+2d}$，則我們稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 A 的一個同色 3-AP。本文的目的在決定長度為 2^n 的 Thue-Morse 雙色字串 $\underbrace{\underline{1}\ \underline{0}\ \underline{01}\ \underline{0110}\ \underline{01101001}\cdots}_{2^n \text{ bits}}$ 有幾個同色 3-AP。

參考文獻 [1]，[2]

二　定義列表

定義 一. 一個長度為 n 的雙色字串定義為一個二進位表示的 n 位數字。

定義 二. 令 $A = a_1a_2\cdots a_n$, $B = b_1b_2\cdots b_m$ 為兩個長度分別為 n, m 的雙色字串，定義

$$AB = a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m.$$

定義 三. 若 $A = a_1a_2\cdots a_n$ 為一個長度為 n 的雙色字串，則定義 A 的互補雙色字串為

$$\overline{A} = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n).$$

定義 四. 令 $A = a_1a_2\cdots a_n$ 為一長度為 n 的雙色字串，定義 A 的一個同色 3-AP 為一數組 $(i, i+d, i+2d)$，此數組滿足 $a_i = a_{i+d} = a_{i+2d}$，其中 d 稱為此同色 3-AP 的公差。並將 A 的所有同色 3-AP 的個數記為

$$\mathrm{AP}_3(A) = \#\{(i, i+d, i+2d) \mid a_i = a_{i+d} = a_{i+2d}\}.$$

例子 1. 假設 $A = 1001011001101001$，$(1, 4, 7)$ 為 A 的一個同色 3-AP，$(2, 8, 14)$ 為 A 的另一個同色 3-AP，

$$A = \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{array}$$

定義 五. 令 $T_0 = 1$，並對於所有的非負整數 n，定義長度為 2^n 且以 1 開頭的 Thue-Morse 雙色字串為 $T_n = T_{n-1}\overline{T_{n-1}}$。

例子 2.

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= 1\overline{1} = 10, \\ T_2 &= 10\ \overline{10} = 1001, \\ T_3 &= 1001\ \overline{1001} = 10010110, \\ T_4 &= 10010110\ \overline{10010110} = 1001011001101001, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

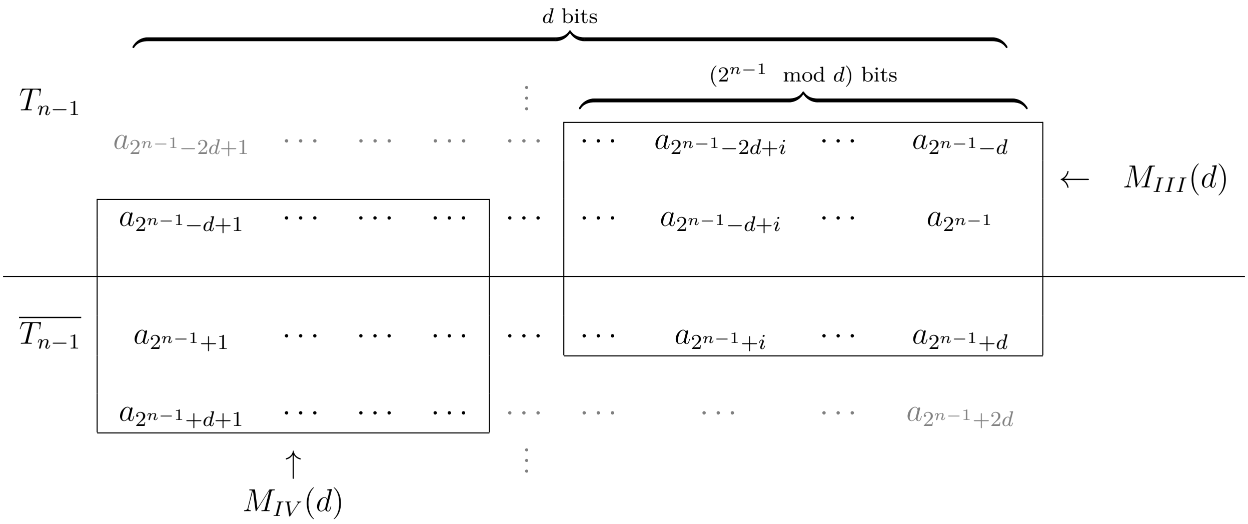
定義 六. 令 M 為一元素為二進位數字的矩陣，定義 $\mathrm{N}(M)$ 表示矩陣 M 中，全部為 0 的行數加上全部為 1 的行數。

例子 3. 例如 $\mathrm{N}(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 3.$

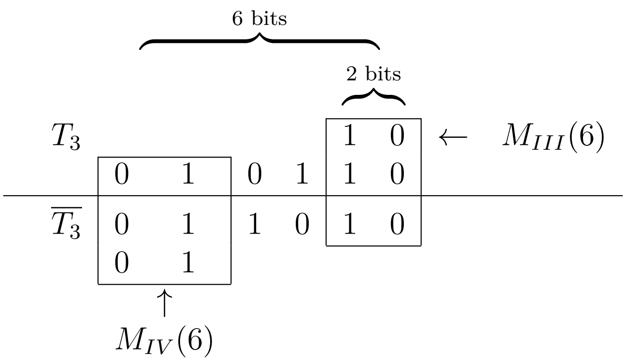
三　主要的結果—$\mathbf{AP}_3(T_n) = 4^{n-2} - 2^{n-2}$

引理 七. *T_n 不會有公差 $d = 1$ 或 $d = 2$ 或 $d > 2^{n-1} - 1$ 的同色 3-AP。*

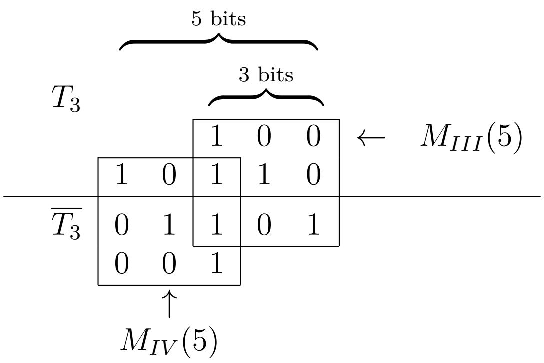
定義 八. 給定一個固定的正整數 d，其中 $3 \le d \le 2^{n-1} - 1$，我們將 T_n 按下圖的方式排列，稱為 T_n 的 d-中心排列。



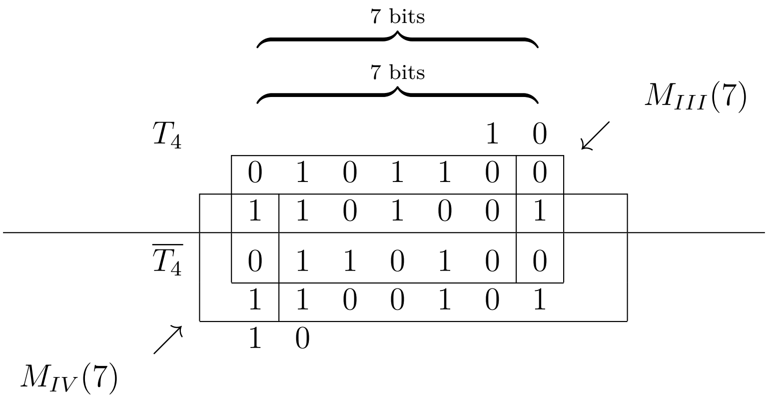
例子 4. 例如 $T_4 = 1001\ 0110 \mid 0110\ 1001$ 的 $d = 6$-中心排列為



例如 $T_4 = 1001\ 0110 \mid 0110\ 1001$ 的 $d = 5$-中心排列為



例如 $T_5 = 1001\ 0110\ 0110\ 1001 \mid 0110\ 1001\ 1001\ 0110$ 的 $d = 7$-中心排列為



觀察. 注意到，上圖中若三個 0 或三個 1 出現在同一行，就對應到 T_n 的一個公差為 d 的同色 3-AP。例如上圖中 $M_{III}(d)$ 矩陣中的一個全 0 行或全 1 行就對應到 T_n 的一個公差為 d 的同色 3-AP。利用這個 d-中心排列，我們可以把求 T_n 的同色 3-AP 的個數問題，轉化成求矩陣中全 0 行及全 1 行的個數問題。

定義 九. 在 Thue-Morse 雙色字串 $T_n = T_{n-1}\overline{T_{n-1}} = a_1a_2\cdots a_{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+1}\cdots a_{2^n}$ 中，令 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的一個同色 3-AP，

- 若 $i < i+d < i+2d \le 2^{n-1}$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 I 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 是落在 d-中心排列的上半部。
- 若 $2^{n-1} < i < i+d < i+2d$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 II 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 是落在 d-中心排列的下半部。
- 若 $i < i+d \le 2^{n-1} < i+2d$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 III 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 是落在 $M_{III}(d)$ 中的。
- 若 $i \le 2^{n-1} < i+d < i+2d$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 IV 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 是落在 $M_{IV}(d)$ 中的。

接下來我們分四個部份

- (一)：證明 $\#\{T_n \text{ 的第 I 類同色3-AP}\} = \#\{T_n \text{ 的第 II 類同色3-AP}\} = \mathrm{AP}_3(T_{n-1})$，於是我們可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}_3(T_n) &= \#\{T_n \text{ 的第 I 類同色3-AP}\} + \#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\}\\ &\quad + \#\{T_n \text{ 的第 II 類同色3-AP}\} + \#\{T_n \text{ 的第 IV 類同色3-AP}\}\\ &= 2\cdot \mathrm{AP}_3(T_{n-1}) + \#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\}\\ &\quad + \#\{T_n \text{ 的第 IV 類同色3-AP}\}\end{aligned}$$

- (二)：證明 $\#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\} = \#\{T_n \text{ 的第 VI 類同色3-AP}\}$，於是我們可以得到
$$\mathrm{AP}_3(T_n) = 2\cdot \mathrm{AP}_3(T_{n-1}) + 2\cdot \#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\}$$
- (三)：證明 $\#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\} = 4^{n-3}$，於是我們可以得到
$$\mathrm{AP}_3(T_n) = 2\cdot \mathrm{AP}_3(T_{n-1}) + 2\cdot 4^{n-3}$$
- (四)：求解遞迴方程式 $\mathrm{AP}_3(T_n) = 2\cdot \mathrm{AP}_3(T_{n-1}) + 2\cdot 4^{n-3}$，於是我們可以得到最主要的結果
$$\mathrm{AP}_3(T_n) = 4^{n-2} - 2^{n-2}.$$

(一) $\#\{T_n$ 的第 I 類同色3-AP$\} = \#\{T_n$ 的第 II 類同色3-AP$\} = \mathbf{AP}_3(T_{n-1})$

引理 十. *假設雙色字串* $A = a_1a_2\cdots a_n$*，則* $AP_3(\overline{A}) = AP_3(A)$*。*

Proof. 因為 $a_i = a_{i+d} = a_{i+2d} \Leftrightarrow \overline{a_i} = \overline{a_{i+d}} = \overline{a_{i+2d}}$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}_3(\overline{A}) &= \#\{(i, i+d, i+2d) \mid \overline{a_i} = \overline{a_{i+d}} = \overline{a_{i+2d}}\} \\ &= \#\{(i, i+d, i+2d) \mid a_i = a_{i+d} = a_{i+2d}\} = \mathrm{AP}_3(A).\end{aligned}$$

□

引理 十一. $\#\{T_n$ *的第 I 類同色*3-*AP*$\} = \#\{T_n$ *的第 II 類同色*3-*AP*$\} = AP_3(T_{n-1})$

Proof. 假設 Thue-Morse 雙色字串 $T_n = T_{n-1}\overline{T_{n-1}} = a_1a_2\cdots a_{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+1}\cdots a_{2^n}$，

$$\begin{aligned} & \#\{T_n \text{ 的第 I 類同色3-AP}\} \\ = \quad & \#\{(i, i+d, i+2d) \mid a_i = a_{i+d} = a_{i+2d},\ i < i+d < i+2d \le 2^{n-1}\} \\ = \quad & \mathrm{AP}_3(T_{n-1}) \\ \overset{\text{引理 十}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad & \mathrm{AP}_3(\overline{T_{n-1}}) \\ \overset{T_n = T_{n-1}\overline{T_{n-1}}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad & \#\{(i, i+d, i+2d) \mid a_i = a_{i+d} = a_{i+2d},\ 2^{n-1} < i < i+d < i+2d\} \\ = \quad & \#\{T_n \text{ 的第 II 類同色3-AP}\} \end{aligned}$$

□

(二) $\#\{T_n$ 的第 III 類同色3-AP$\} = \#\{T_n$ 的第 IV 類同色3-AP$\}$

由觀察 三，我們可以得到

引理 十二.

- $\#\{T_n$ *的第 III 類同色*3-*AP*$\} = \displaystyle\sum_{d=3}^{2^{n-1}-1} N(M_{III}(d))$，
- $\#\{T_n$ *的第 IV 類同色*3-*AP*$\} = \displaystyle\sum_{d=3}^{2^{n-1}-1} N(M_{IV}(d))$。

觀察.

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= 10 \\ T_2 &= 10 \mid 01 \\ T_3 &= 1001 \mid 0110 \\ &\vdots \end{aligned}$$

更一般地，想像一下在 T_n 中，T_{n-1} 與 $\overline{T_{n-1}}$ 中間有一條中心分隔線，然後考慮與中心分隔線等距的對應字元。

$$T_n = \underbrace{a_1a_2\cdots a_{2^n-j}\cdots a_{2^n-1}a_{2^n}}_{T_{n-1}} \mid \underbrace{a_{2^n+1}a_{2^n+2}\cdots a_{2^n+(j+1)}\cdots a_{2^n}}_{\overline{T_{n-1}}}$$

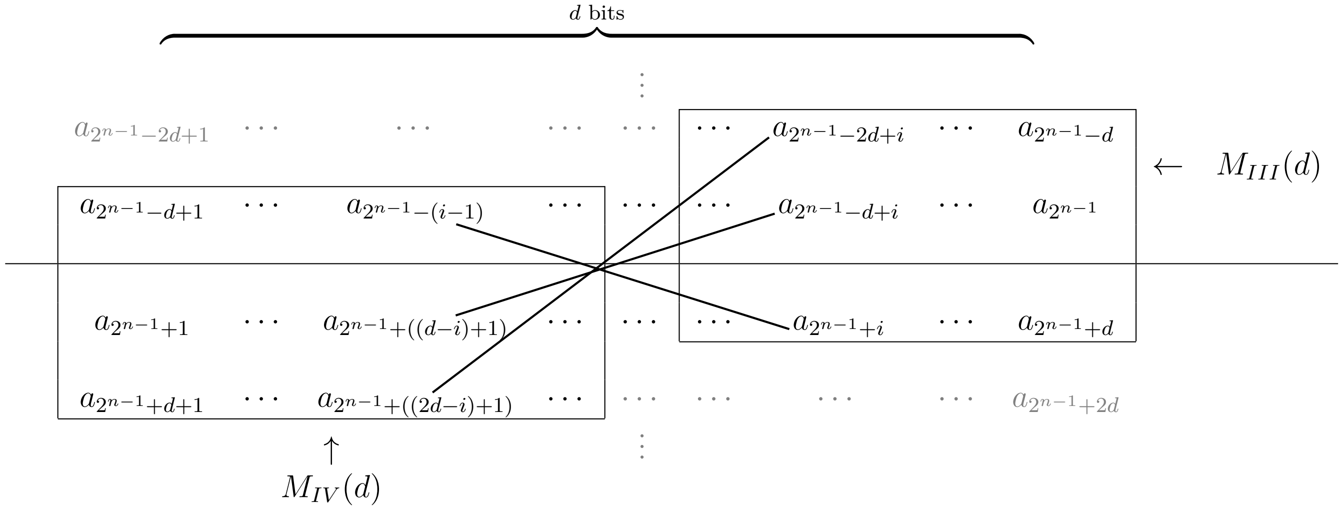
由這個觀察我們可以得到

引理 十三. *假設* $T_n = T_{n-1}\overline{T_{n-1}} = a_1a_2\cdots a_{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+1}\cdots a_{2^n}$ *，*

- *如果* n *是偶數，則有* $a_{2^{n-1}-j} = a_{2^{n-1}+(j+1)}$ *；*
- *如果* n *是奇數，則有* $a_{2^{n-1}-j} = \overline{a_{2^{n-1}+(j+1)}}$ *。*

觀察. 我們來看一下這些跨越 T_n 中心分隔線的對應字元在 d-中心排列中會如何展現。

- $a_{2^{n-1}-2d+i} = a_{2^{n-1}-(2d-i)}$ 對應到 $a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)}$。
- $a_{2^{n-1}-d+i} = a_{2^{n-1}-(d-i)}$ 對應到 $a_{2^{n-1}+((d-i)+1)}$。
- $a_{2^{n-1}+i} = a_{2^{n-1}+((i-1)+1)}$ 對應到 $a_{2^{n-1}-(i-1)}$（右到左）。



注意到 $\begin{matrix} a_{2^{n-1}-2d+i}, \\ a_{2^{n-1}-d+i}, \\ a_{2^{n-1}+i} \end{matrix}$ 三個字元在同一行上，而其分別對應的 $\begin{matrix} a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)}, \\ a_{2^{n-1}+((d-i)+1)}, \\ a_{2^{n-1}-(i-1)} \end{matrix}$ 三個字元也在同一行上，因為他們的位置公差亦為 d。

引理 十四. *如果* $a_{2^{n-1}-2d+i} = a_{2^{n-1}-d+i} = a_{2^{n-1}+i}$ *，則* $a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)} = a_{2^{n-1}+((d-i)+1)} = a_{2^{n-1}-(i-1)}$ *。也就是*

$$\begin{array}{ccc} a_{2^{n-1}-2d+i} & & a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)} \\ || & & || \\ a_{2^{n-1}-d+i} & \Rightarrow & a_{2^{n-1}+((d-i)+1)} \\ || & & || \\ a_{2^{n-1}+i} & & a_{2^{n-1}-(i-1)} \end{array}.$$

Proof. 當 n 是偶數時，

$$\begin{aligned} & a_{2^{n-1}-2d+i} = a_{2^{n-1}-d+i} = a_{2^{n-1}+i} \\ \Rightarrow\quad & a_{2^{n-1}-(2d-i)} = a_{2^{n-1}-(d-i)} = a_{2^{n-1}+((i-1)+1)} \\ \overset{\text{引理 十三}}{\Rightarrow}\quad & a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)} = a_{2^{n-1}+((d-i)+1)} = a_{2^{n-1}-(i-1)} \end{aligned}$$

當 n 是奇數時，

$$\begin{aligned}
& a_{2^{n-1}-2d+i} = a_{2^{n-1}-d+i} = a_{2^{n-1}+i} \\
\Rightarrow\ & a_{2^{n-1}-(2d-i)} = a_{2^{n-1}-(d-i)} = a_{2^{n-1}+((i-1)+1)} \\
\overset{\text{引理 十三}}{\underset{\downarrow}{\Rightarrow}}\ & \overline{a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)}} = \overline{a_{2^{n-1}+((d-i)+1)}} = \overline{a_{2^{n-1}-(i-1)}} \\
\Rightarrow\ & a_{2^{n-1}+((2d-i)+1)} = a_{2^{n-1}+((d-i)+1)} = a_{2^{n-1}-(i-1)}
\end{aligned}$$

□

引理 十四表明了，$M_{III}(d)$ 中全 0 行及全 1 行的個數與 $M_{IV}(d)$ 中全 0 行及全 1 行的個數會是相等的，也就是 $\mathrm{N}(M_{III}(d)) = \mathrm{N}(M_{IV}(d))$。於是再由引理 十二，可以得到

$$\begin{aligned}
\#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\} & \overset{\text{引理 十四}}{\underset{}{\overset{\downarrow}{=}}} \sum_{d=3}^{2^{n-1}-1} \mathrm{N}(M_{III}(d)) \\
& \overset{\text{引理 十二}}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{d=3}^{2^{n-1}-1} \mathrm{N}(M_{IV}(d)) \overset{\text{引理 十四}}{\overset{\downarrow}{=}} \#\{T_n \text{ 的第 IV 類同色3-AP}\}
\end{aligned}$$

(三) $\#\{T_n$ 的第 III 類同色3-AP$\} = 4^{n-3}$

由引理 十二，我們有 $\#\{T_n$ 的第 III 類同色3-AP$\} = \sum\limits_{d=3}^{2^{n-1}-1} \mathrm{N}(M_{III}(d))$，所以我們來計算 $\mathrm{N}(M_{III}(d))$。

1 觀察 $M_{III}(d)$ 並分組

定義 十五. 令 $T_m(a_i, a_j)$ 表示 Thue-Morse 雙色字串 T_m 中，第 i 個字元到第 j 個字元組成的雙色字串。

我們觀察 $M_{III}(d)$，發現可將其按照 d 的值分成三類，

觀察.

$$M_{III}(d) = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_{n-1}(a_1, a_s) \\ T_{n-1}(a_{2^{n-1}-s+1}, a_{2^{n-1}}) \\ \overline{T_{n-1}}(a_{2^{n-1}-2s+1}, a_{2^{n-1}-s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \in S_1 = \{2^{n-1} - s \mid s = 1, 2, ..., 2^{n-2}\}; \\ \begin{pmatrix} T_{n-2k}(a_{2s+1}, a_{2^{n-2k}}) & \overline{T_{n-2k}}(a_1, a_s) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_{s+1}, a_{2^{n-2k}-s}) & \overline{T_{n-2k}}(a_{2^{n-2k}-s+1}, a_{2^{n-2k}}) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_1, a_{2^{n-2k}-2s}) & \overline{T_{n-2k}}(a_{2^{n-2k}-2s+1}, a_{2^{n-2k}-s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \in S_2 = \left\{2^{n-2k} - s \mid {}^{k=1,2,\ldots,\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}_{s=1,2,\ldots,2^{n-2k-1}}\right\}; \\ \begin{pmatrix} \overline{T_{n-2k+1}}(a_{2s+1}, a_{2^{n-2k+1}}) & T_{n-2k+1}(a_1, a_s) \\ T_{n-2k+1}(a_{s+1}, a_{2^{n-2k+1}-s}) & T_{n-2k+1}(a_{2^{n-2k+1}-s+1}, a_{2^{n-2k+1}}) \\ \overline{T_{n-2k+1}}(a_1, a_{2^{n-2k+1}-2s}) & \overline{T_{n-2k+1}}(a_{2^{n-2k+1}-2s+1}, a_{2^{n-2k+1}-s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \in S_3 = \left\{2^{n-2k+1} - s \mid {}^{k=2,\ldots,\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}_{s=1,2,\ldots,2^{n-2k}}\right\}. \end{cases}$$

2 思考如何計算 $\mathrm{N}(M_{III}(d))$

定義 十六. 假設雙色字串 $A = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$，定義 A 的逆向雙色字串 $\overleftarrow{A} = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$。

引理 十七. *假設 Thue-Morse 雙色字串* $T_n = a_1 a_2 \cdots a_{2^n-1} a_{2^n}$ *，且假設* $\overleftarrow{T_n} = b_1 b_2 \cdots b_{2^n-1} b_{2^n} = a_{2^n} a_{2^n-1} \cdots a_2 a_1$ *，則* $b_i = a_{2^n-i+1}$ *，其中* $i \le 2^n$ *。特別地，我們有* $T_m(a_i, a_j) = \overleftarrow{T_m}(a_{2^m-j+1}, a_{2^m-i+1})$ *。*

Proof.

$$\begin{aligned} T_m(a_i, a_j) &= \overleftarrow{T_m}(a_j, a_i) \\ &= \overleftarrow{T_m}(b_j, b_i) \\ &= \overleftarrow{T_m}(b_{2^m-j+1}, b_{2^m-i+1}) \\ &\overset{\text{重新命名}\overleftarrow{T_m}\text{ 的字元}}{\overset{\downarrow}{=}} \overleftarrow{T_m}(a_{2^m-j+1}, a_{2^m-i+1}) \end{aligned}$$

□

觀察. 因為我們是考慮 $\mathrm{N}(M_{III}(d))$，所以我們可以對 $M_{III}(d)$ 做下面兩種動作而不影響 $\mathrm{N}(M_{III}(d))$ 的值，

- 同時將 $M_{III}(d)$ 的每一列取逆向或互補，
- 做矩陣列互換的動作，

所以

當 $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{S_1}$ 時，

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(M_{III}(d)) \quad &= \quad \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_{n-1}(a_1, a_s) \\ T_{n-1}(a_{2^{n-1}-s+1}, a_{2^{n-1}}) \\ \overline{T_{n-1}}(a_{2^{n-1}-2s+1}, a_{2^{n-1}-s}) \end{pmatrix}) \overset{\text{引理}}{\overset{\downarrow}{=}} \mathrm{N}(\begin{pmatrix} \overleftarrow{T_{n-1}}(a_{2^{n-1}}, a_{2^{n-1}-s+1}) \\ \overleftarrow{T_{n-1}}(a_s, a_1) \\ \overleftarrow{\overline{T_{n-1}}}(a_{2s}, a_{s+1}) \end{pmatrix}) \\
&\overset{\text{標號逆向而已}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \mathrm{N}(\begin{pmatrix} \overleftarrow{T_{n-1}}(a_{2^{n-1}-s+1}, a_{2^{n-1}}) \\ \overleftarrow{T_{n-1}}(a_1, a_s) \\ \overleftarrow{\overline{T_{n-1}}}(a_{s+1}, a_{2s}) \end{pmatrix}) \overset{\text{1, 3 列互換}}{\overset{\downarrow}{=}} \mathrm{N}(\begin{pmatrix} \overleftarrow{\overline{T_{n-1}}}(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overleftarrow{T_{n-1}}(a_1, a_s) \\ \overleftarrow{T_{n-1}}(a_{2^{n-1}-s+1}, a_{2^{n-1}}) \end{pmatrix}) \\
&\overset{\text{化簡}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_{n-1}(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_{n-1}}(a_1, a_s) \\ \overline{T_{n-1}}(a_{2^{n-1}-s+1}, a_{2^{n-1}}) \end{pmatrix}) \overset{\text{我們定義}}{\overset{\downarrow}{=}} \mathrm{N}(ABB(n-1, s)).
\end{aligned}$$

當 $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{S_2}$ 時，

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(M_{III}(d)) \quad &= \quad \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_{n-2k}(a_{2s+1}, a_{2s}) & \overline{T_{n-2k}}(a_1, a_s) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_{s+1}, a_{2^{n-2k}-s}) & \overline{T_{n-2k}}(a_{2^{n-2k}-s+1}, a_{2^{n-2k}}) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_1, a_{2^{n-2k}-s}) & \overline{T_{n-2k}}(a_{2^{n-2k}-2s+1}, a_{2^{n-2k}-s}) \end{pmatrix}) \\
&= \quad \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_{n-2k}(a_{2s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_{s+1}, a_{2^{n-2k}-s}) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_1, a_{2^{n-2k}-s}) \end{pmatrix}) + \mathrm{N}(\begin{pmatrix} \overline{T_{n-2k}}(a_1, a_s) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_{2^{n-2k}-s+1}, a_{2^{n-2k}}) \\ \overline{T_{n-2k}}(a_{2^{n-2k}-2s+1}, a_{2^{n-2k}-s}) \end{pmatrix}) \\
&\overset{\text{我們定義}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \mathrm{N}(\gamma(n-2k, s)) + \mathrm{N}(AAA(n-2k, s)).
\end{aligned}$$

當 $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{S_3}$ 時，類似地，

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(M_{III}(d)) \quad &= \quad \mathrm{N}(\begin{pmatrix} \overline{T_{n-2k+1}}(a_{2s+1}, a_{2^{n-2k+1}}) & T_{n-2k+1}(a_1, a_s) \\ T_{n-2k+1}(a_{s+1}, a_{2^{n-2k+1}-s}) & T_{n-2k+1}(a_{2^{n-2k+1}-s+1}, a_{2^{n-2k+1}}) \\ \overline{T_{n-2k+1}}(a_1, a_{2^{n-2k+1}-2s}) & \overline{T_{n-2k+1}}(a_{2^{n-2k+1}-2s+1}, a_{2^{n-2k+1}-s}) \end{pmatrix}) \\
&\overset{\text{我們定義}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \mathrm{N}(\phi(n-2k+1, s)) + \mathrm{N}(ABB(n-2k+1, s)).
\end{aligned}$$

定義 十八. 定義

- $ABB(m, s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_s) \\ \overline{T_m}(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}.$
- $\gamma(m, s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{2s+1}, a_{2^m}) \\ \overline{T_m}(a_{s+1}, a_{2^m-s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_{2^m-2s}) \end{pmatrix}.$
- $AAA(m, s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ T_m(a_1, a_s) \\ T_m(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}.$
- $\phi(m, s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{2s+1}, a_{2^m}) \\ \overline{T_m}(a_{s+1}, a_{2^m-s}) \\ T_m(a_1, a_{2^m-2s}) \end{pmatrix}.$

定義 十九.

- $ABB(m) = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(ABB(m, s)).$
- $\gamma(m) = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\gamma(m, s)).$
- $AAA(m) = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(AAA(m, s)).$
- $\phi(m) = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\phi(m, s)).$

注意到 $\gamma(m, s)$ 是矩陣，$\gamma(m)$ 是數值，其他符號也是類似地。

引理 二十.

$$\#\{T_n \text{ 的第 III 類同色3-AP}\} = \sum_{d=3}^{2^{n-1}-1} N(M_{III}(d))$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{d\in S_1} N(ABB(n,s)) \\ + \\ \sum\limits_{d\in S_1} [N(\gamma(n-2k,s)) + N(AAA(n-2k,s))] \\ + \\ \sum\limits_{d\in S_1} [N(\phi(n-2k+1,s)) + N(ABB(n-2k+1,s))] \end{cases} = \begin{cases} ABB(n-1) \\ + \\ \sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} [\gamma(n-2k) + AAA(n-2k)] \\ + \\ \sum\limits_{k=1}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} [\phi(n-2k+1) + ABB(n-2k+1)] \end{cases}.$$

3 計算 $ABB(m), AAA(m), \gamma(m), \phi(m)$ 的公式（巧解八個遞迴式）

定義 二十一. 定義

- $ABB(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_s) \\ \overline{T_m}(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}$.
- $\gamma(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{2s+1}, a_{2^m}) \\ \overline{T_m}(a_{s+1}, a_{2^m-s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_{2^m-2s}) \end{pmatrix}$.
- $AAB(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ T_m(a_1, a_s) \\ \overline{T_m}(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}$.
- $\theta(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{2s+1}, a_{2^m}) \\ T_m(a_{s+1}, a_{2^m-s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_{2^m-2s}) \end{pmatrix}$.
- $AAA(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ T_m(a_1, a_s) \\ T_m(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}$.
- $\phi(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{2s+1}, a_{2^m}) \\ \overline{T_m}(a_{s+1}, a_{2^m-s}) \\ T_m(a_1, a_{2^m-2s}) \end{pmatrix}$.
- $ABA(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_s) \\ T_m(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}$.
- $\delta(m,s) = \begin{pmatrix} T_m(a_{2s+1}, a_{2^m}) \\ T_m(a_{s+1}, a_{2^m-s}) \\ T_m(a_1, a_{2^m-2s}) \end{pmatrix}$.

定義 二十二.

- $ABB(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(ABB(m,s))$.
- $\gamma(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\gamma(m,s))$.
- $AAB(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(AAB(m,s))$.
- $\theta(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\theta(m,s))$.
- $AAA(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(AAA(m,s))$.
- $\phi(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\phi(m,s))$.
- $ABA(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(ABA(m,s))$.
- $\delta(m) = \sum\limits_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\delta(m,s))$.

注意到 $\gamma(m,s)$ 是矩陣，$\gamma(m)$ 是數值，其他符號也是類似地。

引理 二十三.

$$
\begin{pmatrix} ABB(n) \\ AAB(n) \\ AAA(n) \\ ABA(n) \\ \gamma(n) \\ \theta(n) \\ \phi(n) \\ \delta(n) \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
\cdot
\begin{pmatrix} ABB(n-1) \\ AAB(n-1) \\ AAA(n-1) \\ ABA(n-1) \\ \gamma(n-1) \\ \theta(n-1) \\ \phi(n-1) \\ \delta(n-1) \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 2^{n-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2^{n-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Proof. 我們只證明第一個與第五個遞迴關係式，其餘的遞迴關係式證明方法皆類似。

$$
\begin{aligned}
& ABB(m) \\
= \ & \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(ABB(m,s)) \\
= \ & \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_m(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_m}(a_1, a_s) \\ \overline{T_m}(a_{2^m-s+1}, a_{2^m}) \end{pmatrix}) \\
= \ & \begin{cases}
\sum\limits_{s<2^{m-2}} \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_{m-1}(a_{s+1}, a_{2s}) \\ \overline{T_{m-1}}(a_1, a_s) \\ T_{m-1}(a_{2^{m-1}-s+1}, a_{2^{m-1}}) \end{pmatrix}) \\
\quad + \\
\sum\limits_{s=2^{m-1}} \mathrm{N}(\begin{pmatrix} T_{m-1}(a_{2^{m-2}+1}, a_{2^{m-1}}) \\ \overline{T_{m-1}}(a_1, a_{2^{m-2}}) \\ T_{m-1}(a_{2^{m-2}+1}, a_{2^{m-1}}) \end{pmatrix}) \\
\quad + \\
\sum\limits_{s>2^{m-2}} \mathrm{N}(\begin{pmatrix} [c|c]T_{m-1}(a_{s+1}, a_{2^{m+1}}) & \overline{T_{m-1}}(a_1, a_{2s-2^{m-1}}) \\ \overline{T_{m-1}}(a_1, a_{2^{m-1}-s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-1}-s+1}, a_s) \\ T_{m-1}(a_{2^{m-1}-s+1}, a_{2^m-2s}) & T_{m-1}(a_{2^{m-1}-2s+1}, a_{2^{m-1}}) \end{pmatrix})
\end{cases} \\
= \ & \begin{cases}
\sum\limits_{s<2^{m-2}} [\mathrm{N}(ABA(m-1,s))] \\
\quad + \\
2^{m-2} \\
\quad + \\
\sum\limits_{s>2^{m-2}} [\mathrm{N}(ABA(m-1, 2^{m-2}-s) + \mathrm{N}(\gamma(m-1, 2^{m-2}-s))]
\end{cases} \\
= \ & 2 \cdot ABA(m-1) + \gamma(m-1) + 2^{m-2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma(m)\\
=\quad&\sum_{s=1}^{2^{m-1}}\mathrm{N}(\gamma(m,s))\\
=\quad&\sum_{s=1}^{2^{m-1}}\mathrm{N}(\begin{pmatrix}T_m(a_{2s+1},a_{2^m})\\ \overline{T_m}(a_{s+1},a_{2^m-s})\\ \overline{T_m}(a_1,a_{2^m-2s})\end{pmatrix})\\
=\quad&\begin{cases}
\sum\limits_{s<2^{m-2}}\mathrm{N}(\begin{pmatrix}T_{m-1}(a_{2s+1},a_{2^{m-1}}) & \overline{T_{m-1}}(a_1,a_s) & \overline{T_{m-1}}(a_{s+1},a_{2s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2s+1},a_{2^{m-1}})\\ \overline{T_{m-1}}(a_{s+1},a_{2^{m-1}-s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-1}-s+1},a_{2^{m-1}}) & T_{m-1}(a_1,a_s) & T_{m-1}(a_{s+1},a_{2^{m-1}-s})\\ \overline{T_{m-1}}(a_1,a_{2^{m-1}-2s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-1}-2s+1},a_{2^{m-1}-s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-1}-s+1},a_{2^{m-1}}) & T_{m-1}(a_1,a_{2^{m-1}-2s})\end{pmatrix})\\
+\\
\sum\limits_{s=2^{m-1}}\mathrm{N}(\begin{pmatrix}\overline{T_{m-1}}(a_1,a_{2^{m-2}}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-2}+1},a_{2^{m-1}})\\ \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-2}+1},a_{2^{m-1}}) & T_{m-1}(a_1,a_{2^{m-2}})\\ \overline{T_{m-1}}(a_1,a_{2^{m-2}}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-2}+1},a_{2^{m-1}})\end{pmatrix})\\
+\\
\sum\limits_{s>2^{m-2}}\mathrm{N}(\begin{pmatrix}\overline{T_{m-1}}(a_{2s+1},a_{2^{m-1}+s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-1}+s+1},a_{2^m})\\ \overline{T_{m-1}}(a_{s+1},a_{2^{m-1}}) & T_{m-1}(a_{2^{m-1}+1},a_{2^m-s})\\ \overline{T_{m-1}}(a_1,a_{2^{m-1}-s}) & \overline{T_{m-1}}(a_{2^{m-1}-s+1},a_{2^m-2s})\end{pmatrix})
\end{cases}\\
=\quad&\begin{cases}
\sum\limits_{s<2^{m-2}}[\mathrm{N}(\gamma(m-1,s))+\mathrm{N}(AAA(m-1,s))+\mathrm{N}(ABA(m-1,s))+\mathrm{N}(\gamma(m-1,s))]\\
+\\
2\cdot 2^{m-2}\\
+\\
\sum\limits_{s>2^{m-2}}\left[\mathrm{N}(AAA(m-1,2^{m-2}-s)+\mathrm{N}(ABA(m-1,2^{m-2}-s))\right]
\end{cases}\\
=\quad&2\cdot\gamma(m-1)+2\cdot AAA(m-1)+2\cdot ABA(m-1)+2^{m-2}.
\end{aligned}
$$

□

引理 二十四 (巧解).

- $ABB(m)=2\cdot 4^{m-3}+2^{m-3}$.
- $AAB(m)=2\cdot 4^{m-3}-2^{m-3}$.
- $AAA(m)=2\cdot 4^{m-3}-2^{m-3}$.
- $ABA(m)=2\cdot 4^{m-3}-2^{m-3}$.
- $\gamma(m)=4^{m-2}$.
- $\theta(m)=4^{m-2}$.
- $\phi(m)=4^{m-2}$.
- $\delta(m)=4^{m-2}-2^{m-2}$.

Proof. 證略。 □

最後，把引理 二十四代回引理 二十，可以得到

引理 二十五. *$\#\{T_n$ 的第 III 類同色3-AP$\}=4^{n-3}$ 。*

(四) 求解遞迴方程式 $\mathbf{AP}_3(T_n)=2\cdot\mathbf{AP}_3(T_{n-1})+2\cdot 4^{n-3}$

引理 二十六. *如果 $AP_3(T_n)=2\cdot AP_3(T_{n-1})+2\cdot 4^{n-3}$，則 $AP_3(T_n)=4^{n-2}-2^{n-2}$ 。*

Proof. 證略。 □

最後，得到我們最主要的結果

定理 二十七. *對於正整數 $n\geq 2$，$AP_3(T_n)=4^{n-2}-2^{n-2}$.*

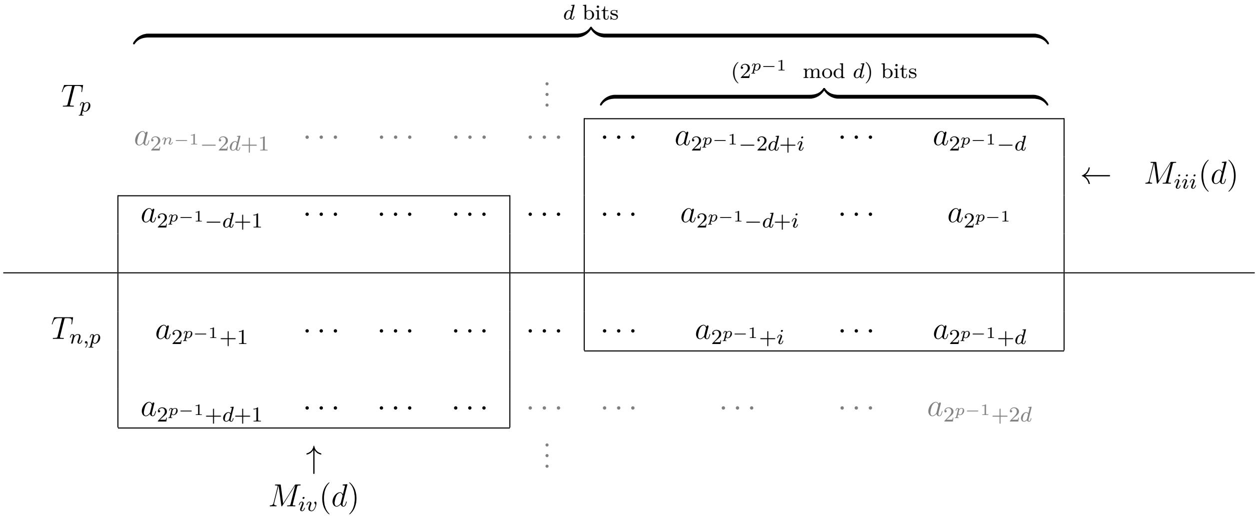
四 推廣的結果—$\mathbf{AP}_3(T_{n,p})$

在上一小節，我們解決了一個問題，就是如果給我們一個 Thue-Morse 雙色字串 T_n，我們有一個公式可以算出其中有幾個同色 3-AP，也就是 $\mathrm{AP}_3(T_n)=4^{n-2}-2^{n-2}$。我們在這裡做的推廣是，Thue-Morse 雙色字串截去前面一個較短的 Thue-Morse 雙色字串，則我們依然可以算剩下的字串的同色 3-AP 的個數。

定義 二十八. 考慮 Thue-Morse 雙色字串 T_n，注意到前 2^p 個字元也是 Thue-Morse 雙色字串 T_p。令 $T_{n,p}$ 表示 Thue-Morse 雙色字串 T_n 截去前面的 Thue-Morse 雙色字串 T_p 後剩下的雙色字串，也就是說，$T_n = T_pT_{n,p}$。

注意到 $T_{n,p}$ 不一定是 Thue-Morse 雙色字串。

定義 二十九. 給定一個固定的正整數 d，其中 $2^2 \le d \le 2^{p-1}-1$，我們將 T_n 按下圖的方式排列，稱為 T_n 的 d-偏心排列。



定義 三十. 在 Thue-Morse 雙色字串 $T_n = T_pT_{n,p} = a_1a_2\cdots a_{2^p}a_{2^p+1}\cdots\cdots a_{2^n}$ 中，令 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的一個同色 3-AP，

- 若 $i < i+d < i+2d \le 2^p$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 i 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 是落在 T_p 中的。
- 若 $2^p < i < i+d < i+2d$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 ii 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 是落在 $T_{n,p}$ 中的。
- 若 $i < i+d \le 2^p < i+2d$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 iii 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 的前兩個是落在 T_p 中，最後一個是落在 $T_{n,p}$ 中。
- 若 $i \le 2^p < i+d < i+2d$，則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_n 的第 iv 類同色 3-AP。直覺來看，表示這個 3-AP 的第一個是落在 T_p 中，最後兩個是落在 $T_{n,p}$ 中。

接下來我們分兩個部份，

- 第一個部份是證明 $\#\{T_n \text{ 的第 iii 類同色3-AP}\} = \#\{T_{p+1} \text{ 的第 III 類同色3-AP}\}$，再由引理 二十五，知道 $\#\{T_{p+1} \text{ 的第 III 類同色3-AP}\} = 4^{(p+1)-3}$，於是我們可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}_3(T_n) &= \#\{T_n \text{ 的第 i 類同色3-AP}\} + \#\{T_n \text{ 的第 iii 類同色3-AP}\} \\
&\quad + \#\{T_n \text{ 的第 ii 類同色3-AP}\} + \#\{T_n \text{ 的第 iv 類同色3-AP}\} \\
&= \mathrm{AP}_3(T_p) + \#\{T_n \text{ 的第 iii 類同色3-AP}\} \\
&\quad + \mathrm{AP}_3(T_{n,p}) + \#\{T_n \text{ 的第 iv 類同色3-AP}\}
\end{aligned}$$

  移項整理一下，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}_3(T_{n,p}) &= \mathrm{AP}_3(T_n) - \mathrm{AP}_3(T_p) - \#\{T_n \text{ 的第 iii 類同色3-AP}\} - \#\{T_n \text{ 的第 iv 類同色3-AP}\} \\
&= \mathrm{AP}_3(T_n) - \mathrm{AP}_3(T_p) - 4^{p-2} - \#\{T_n \text{ 的第 iv 類同色3-AP}\}
\end{aligned}$$

- 第二個部份是證明 $\#\{T_n \text{ 的第 iv 類同色3-AP}\}$ 的個數，於是我們可以得到定理 二十七，就可以得到我們所推廣的結果 $T_{n,1} = 4^{n-2} - 2\cdot 2^{n-2} + 1$ 以及 $T_{n,2} = 4^{n-2} - \frac{8}{3}\cdot 2^{n-2} + \frac{1}{6}(9+(-1)^n)$。

(一) $\#\{T_n$ 的第 iii 類同色3-AP$\} = \#\{T_{p+1}$ 的第 III 類同色3-AP$\}$

$$
\begin{aligned}
& \#\{T_n \text{ 的第 iii 類同色3-AP}\} \\
\overset{\text{定義 三十}}{\overset{\downarrow}{=}} \ & \#\{(i, i+d, i+2d) \mid a_i = a_{i+d} = a_{i+2d},\ i < i+d \leq 2^p < i+2d\} \\
= \ & \#\{(i, i+d, i+2d) \mid a_i = a_{i+d} = a_{i+2d},\ i < i+d \leq 2^{(p+1)-1} < i+2d\} \\
\overset{\text{定義 九}}{\overset{\downarrow}{=}} \ & \#\{T_{p+1} \text{ 的第 III 類同色3-AP}\}.
\end{aligned}
$$

(二) $\#\{T_n$ 的第 iv 類同色3-AP$\}$

1 $d \leq 2^p$

我們觀察 $M_{iv}(d)$，發現可將其按照 d 的值分成三類，

觀察.

$$
M_{iv}(d) = \begin{cases}
\begin{pmatrix} T_{p-1}(a_1, a_s) \\ T_{p-1}(a_{2^{p-1}-s+1}, a_{2^{p-2k}}) \\ \overline{T_{p-1}}(a_{2^{p-1}-2s+1}, a_{2^{p-2k}-s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \in X_1 = \{2^{p-1} - s \mid s = 1, 2, ..., 2^{p-2}\}; \\
\begin{pmatrix} T_{p-2k}(a_{2s+1}, a_{2^{p-2k}}) & \overline{T_{p-1}}(a_1, a_s) \\ \overline{T_{p-2k}}(a_{s+1}, a_{2^{p-2k}-s}) & \overline{T_{p-1}}(a_{2^{p-2k}-s+1}, a_{2^{p-2k}}) \\ \overline{T_{p-2k}}(a_1, a_{2^{p-2k}-2s}) & \overline{T_{p-1}}(a_{2^{p-2k}-2s+1}, a_{2^{p-2k}-s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \in X_2 = \left\{2^{p-2k} - s \mid {}^{k=1,2,\ldots,\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor}_{s=1,2,\ldots,2^{p-2k-1}}\right\}; \\
\begin{pmatrix} \overline{T_{p-2k+1}}(a_{2s+1}, a_{2^{p-2k+1}}) & T_{p-1}(a_1, a_s) \\ T_{p-2k+1}(a_{s+1}, a_{2^{p-2k+1}-s}) & T_{p-1}(a_{2^{p-2k}-s+1}, a_{2^{p-2k+1}}) \\ \overline{T_{p-2k+1}}(a_1, a_{2^{p-2k+1}-2s}) & \overline{T_{p-1}}(a_{2^{p-2k+1}-2s+1}, a_{2^{p-2k+1}-s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \in X_3 = \left\{2^{p-2k+1} - s \mid {}^{k=2,\ldots,\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor}_{s=1,2,\ldots,2^{p-2k}}\right\}.
\end{cases}
$$

2 $d > 2^p$

同樣地，我們發現可將其按照 d 的值分成四類，而每一類中又按照 s 的值分成兩個小類。

觀察. 如果 $d > 2^p$ 且 $d = m \cdot 2^p - s$，則

$$
M_{iv}(d) = \begin{cases}
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2s}) & T_p(a_{2s+1}, a_{2^p}) \\ \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_s) & \overline{T_p}(a_{s+1}, a_{2^p-s}) \\ T_p(a_{2^p-2s+1}, a_{2^p-s}) & T_p(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} 4 \mid d \text{ 或} d = 2 \cdot 2^p - s \text{ 且} 2s \leq 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_{2s-2^p}) & T_p(a_{2s-2^p+1}, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2^p}) \\ \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_s) & \overline{T_p}(a_{s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-s}) \\ \overline{T_p}(a_{2^{p+1}-2s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_{2^p-s}) & T_p(a_{2^p-s+1}, a_{2^{p+1}-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} 4 \mid d \text{ 或} d = 2 \cdot 2^p - s \text{ 且} 2s > 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2s}) & T_p(a_{2s+1}, a_{2^p}) \\ \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2^p-s}) \\ T_p(a_{2^p-2s+1}, a_{2^p-s}) & T_p(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_{2^p-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \equiv 1 \pmod 4 \text{ 或} d = 3 \cdot 2^p - s \text{ 且} 2s \leq 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_{2s-2^p}) & T_p(a_{2s-2^p+1}, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2^p}) \\ \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_s) & \overline{T_p}(a_{s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-s}) \\ \overline{T_p}(a_{2^{p+1}-2s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_{2^p-s}) & T_p(a_{2^p-s+1}, a_{2^{p+1}-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \equiv 1 \pmod 4 \text{ 或} d = 3 \cdot 2^p - s \text{ 且} 2s > 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_{2s-2^p}) & T_p(a_{2s-2^p+1}, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2^p}) \\ T_p(a_{2^p-s+1}, a_s) & \overline{T_p}(a_{s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-s}) \\ \overline{T_p}(a_{2^{p+1}-2s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-s}) & \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_{2^{p+1}-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \equiv 2 \pmod 4 \text{ 且} 2s \leq 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2s}) & T_p(a_{2s+1}, a_{2^p}) \\ T_p(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_s) & \overline{T_p}(a_{s+1}, a_{2^p-s}) \\ T_p(a_{2^p-2s+1}, a_{2^p-s}) & \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \equiv 2 \pmod 4 \text{ 且} 2s > 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2s}) & T_p(a_{2s+1}, a_{2^p}) \\ T_p(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2^p-s}) \\ \overline{T_p}(a_{2^p-2s+1}, a_{2^p-s}) & \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_{2^p-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \equiv 3 \pmod 4 \text{ 或} d = 4 \cdot 2^p - s \text{ 且} 2s \leq 2^p \\
\begin{pmatrix} T_p(a_1, a_{2s-2^p}) & T_p(a_{2s-2^p+1}, a_s) & T_p(a_{s+1}, a_{2^p}) \\ T_p(a_{2^p-s+1}, a_s) & \overline{T_p}(a_{s+1}, a_{2^p}) & T_p(a_1, a_{2^p-s}) \\ T_p(a_{2^{p+1}-2s+1}, a_{2^p}) & \overline{T_p}(a_1, a_{2^p-s}) & \overline{T_p}(a_{2^p-s+1}, a_{2^{p+1}-2s}) \end{pmatrix} & \text{當} d \equiv 3 \pmod 4 \text{ 或} d = 4 \cdot 2^p - s \text{ 且} 2s > 2^p
\end{cases}
$$

$$M_{iv}(d) = \begin{cases} 4 \cdot ABA(p) + 2 \cdot \gamma(p) & \text{當} 4 \mid d \text{ 或} d = 2 \cdot 2^p - s; \\ 2 \cdot AAA(p) + 2 \cdot ABA(p) + \gamma(p) + \delta(p) & \text{當} d \equiv 1 \pmod 4 \text{ 或} d = 3 \cdot 2^p - s; \\ 2 \cdot ABB(p) + 2 \cdot AAB(p) + \gamma(p) + \delta(p) & \text{當} d \equiv 2 \pmod 4; \\ 2 \cdot ABB(p) + 2 \cdot AAB(p) + 2\delta(p) & \text{當} d \equiv 3 \pmod 4 \text{ 或} d = 4 \cdot 2^p - s. \end{cases}$$

以上 1.、2. 結果適用所有 $d < 13 \cdot 2^p$ 時的情形，可以代入先前 8 個遞迴式所得到的結果，得到

定理 三十一. $T_{n,1} = 4^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-2} + 1$

定理 三十二. $T_{n,2} = 4^{n-2} - \frac{8}{3} \cdot 2^{n-2} + \frac{1}{6}(9 + (-1)^n)$

。

参考文献

[1] Tom C. Brown and Bruce M. Landman. Monochromatic arithmetic progressions with large differences. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 60:21–35, 1999.

[2] Steve Butler, Ron Graham, and Linyuan Lu. Finding patterns avoiding many monochromatic constellations. *Experimental Mathematics*, 19:399–411, 2010.

[3] Steve Butler, Ron Graham, and Linyuan Lu. Unrolling residues to avoid progression. *Mathematics Magazine*, 87:83–94, 2014.