拉丁「圍」機

高暐竣

國立台中第一高級中學

指導老師：梁勇能

Abstract

An $n\times n$ square is called an m–binary latin square if each row and column of it filled with exactly m “1”s and $(n–m)$ “0”s. We are going to study the following question: Find the smallest integer a, such that for all $n\times n$ m–binary latin square, there is a $k\times k$ square in which no more than a “1”s exist. The situations that $m=1$, $m=2$, or $k \mid n$ have been solved so far. We will work on the more general results, that is, whenever any n,m,k are given, we can get an answer.

摘要

每行每列恰有 m 個格子填入 1，其他的格子皆填入 0 的方陣，稱為 m–(1,0)拉丁方陣。本研究要探討以下問題：求最小的非負整數 a，使得所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣中，都存在一個 $k\times k$ 正方形，其內數字和不超過 a。目前解決了 $m=1$ 和 $m=2$，或者 $k \mid n$ 的情形。未來將繼續著手處理更一般化的結果，也就是當給定任意 n,m,k 時，都能得到答案。

1 簡介

1.1 研究動機

本研究發想於 2014 年 *IMO* 的第二題：「求最大的正整數 k，使得所有在每行每列恰有一顆棋子的 $n\times n$ 棋盤中，都有一個 $k\times k$ 正方形，其內沒有任何棋子。」在解完原本的題目後，我聯想到更廣的問題：「求最小的非負整數 a，使得所有在每行每列恰有一顆棋子的 $n\times n$ 棋盤中，都有一個 $k\times k$ 正方形，其內棋子數不超過 a 個。」便從這個問題開始進行我的研究。

我將每行每列恰有 m 個格子填入 1，其他的格子皆填入 0 的方陣，稱為 m–(1,0)拉丁方陣，並探討以下問題：求最小的非負整數 a，使得所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣中，都存在一個 $k\times k$ 正方形，其內數字和不超過 a。

1.2 名詞定義

1. (1,0)拉丁方陣：每行每列皆有相同數量的"1"和相同數量的"0"的方陣。
   - 若是每行每列"1"的數量有 m 個，那就稱為 m–(1,0)拉丁方陣。
   - 若要強調方陣的邊長為 n，那就再在前面加上「n 階」二字。
2. 方陣的行與列：在一個 $n\times n$ 的方陣中，行的編號由左到右依序為第 $1,2,\ldots,n$ 行，列的編號由上到下依序為第 $1,2,\ldots,n$ 列。

3. $f_m(n,k)$：k,n,m 為正整數且滿足 $1\le k\le n, 1\le m\le n$。若 a 是最小的非負整數，使得所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣中，都有一個 $k\times k$ 正方形，其內數字和不超過 a，則記 $f_m(n,k)=a$。而在研究動機中所提到的題目，即為求 $f_1(n,k)$的值。

4. $f_m(n,k)$的基本性質：

   - 基本性質一、$f_m(n,k)\le b$ 的充要條件為：對所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣，都有一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不超過 b。

   - 基本性質二、$f_m(n,k)\ge b$ 的充要條件為：存在一 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 b。

   - 基本性質一和基本性質二互為等價，只是敘述方式不同而已。

5. $L_m(n,k)$和 $U_m(n,k)$：在證明過程中，將會得到 $f_m(n,k)$的上界和下界，記下界為 $L_m(n,k)$，上界為 $U_m(n,k)$，則有 $L_m(n,k)\le f_m(n,k)\le U_m(n,k)$。

6. 高斯符號與它的性質：

   - 高斯符號[a]代表不大於 a 的最大整數。

   - $a,b\in R,$ 有$[a]+[b]\le[a+b]\le[a]+[b]+1$。

   - $a,b,c\in N,$ 則$\left[\dfrac{b+c}{a}\right]>\left[\dfrac{b}{a}\right]\Leftrightarrow \exists d\in N$且$d\le c\ s.t.\ a\,|\,b+d$ 。

7. 文中用到的英文字母：n,k,m,q,r,m_1,m_2 等等。

   - n 代表(1,0)拉丁方陣的大小，m 代表方陣中每行每列"1"的數量。

   - k,在方陣中要找的是 $k\times k$ 正方形。

   - q 和 r 分別為 n 除以 k 的商和餘數，即 $n=qk+r,\ 0\le r<k$。

   - m_1 和 m_2 分別為 m 除以 q 的商和餘數，即 $m=m_1q+m_2,\ 0\le m_2<q$。

2 研究目的與過程

2.1 求 $f_1(n,k)$的一般式

由於要直接猜答案比較困難，所以我寫了 C++的程式，把 n 和 k 較小時的 $f_1(n,k)$值求出來(請參考附錄)，結果如下表所示：

k \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3		3	2	2	1	1	1	1	0	0	0
4			4	3	3	2	2	1	1	1	1
5				5	4	4	3	3	2	2	2
6					6	5	5	4	4	3	3
7						7	6	6	5	5	4
8							8	7	7	6	6
9								9	8	8	7
10									10	9	9
11										11	10
12											12

不難發現以下定理：

定理 1–1. $f_1(n,k)\le f_1(n-1,k)$。

證明. 由基本性質二可知，存在一 n 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 $f_1(n,k)$。將這個方陣的第 n 行和第 n 列取走，只剩下(n–1)階的方陣。若第 n 行第 n 列的方格內數字是"1"，則剩下的(n–1)階方陣仍為一個 1–(1,0)拉丁方陣；若第 n 行第 n 列的方格內數字是"0"，則剩下的方陣中會有一行一列沒有"1"，把該行該列的"0"換成"1"，使方陣變回 1–(1,0)拉丁方陣。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline\end{array}\;\rightarrow\;\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&\mathbf{1}\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}$$

經過以上的操作後，方陣內每個 $k\times k$ 正方形的數字和不變或增加，因此就得到一個(n–1)階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 $f_1(n,k)$。由基本性質二可知 $f_1(n-1,k)\ge f_1(n,k)$。 □

在本文中，當 $k|n$ 時，一律以 q 代表 n 除以 k 的商，即 $n=qk$。

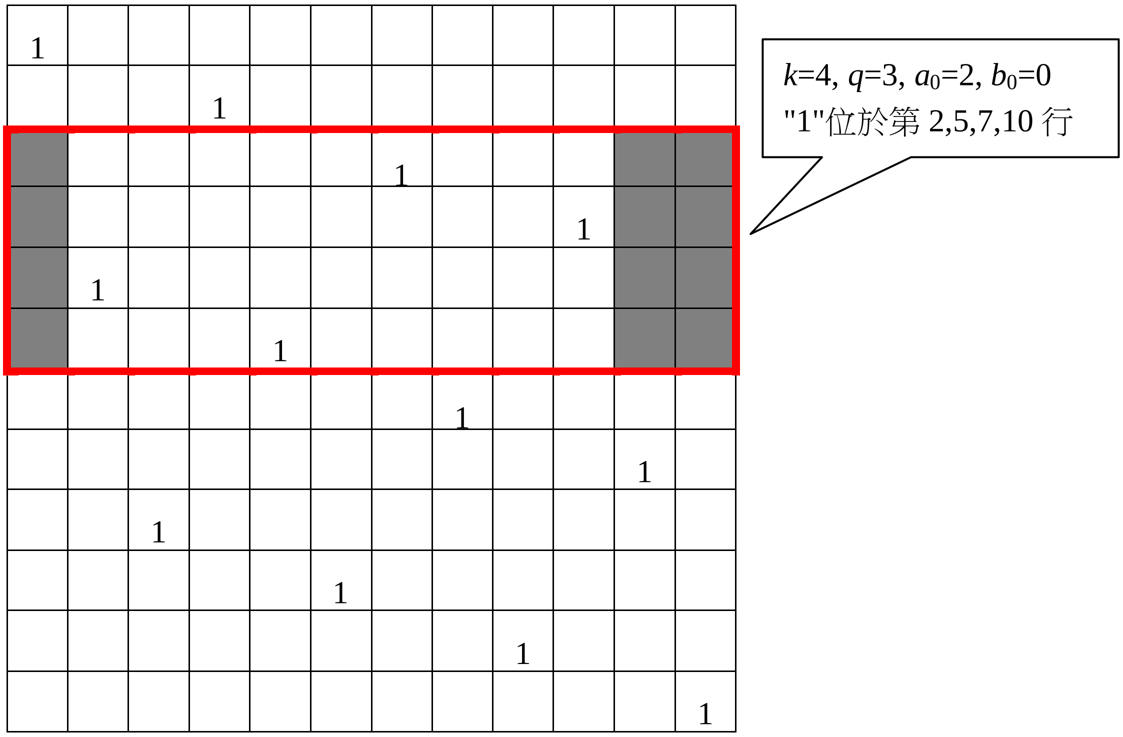
定理 1–2. $k|n$ 時，$f_1(n,k)=\left\lceil \frac{k}{q} \right\rceil$。

證明. 把 $n\times n$ 的方陣切割成 q^2 個彼此不重疊的 $k\times k$ 正方形，方陣中總共有 n 個"1"，由鴿籠原理可知，對所有的 n 階 1–(1,0)拉丁方陣，至少有一個 $k\times k$ 正方形內的"1"數量不超過 $\left[\frac{n}{q^2}\right]=\left[\frac{k}{q}\right]$ 個，所以該 $k\times k$ 正方形內的數字和不超過 $\left[\frac{k}{q}\right]$，由基本性質一可知 $f_1(n,k)\le\left[\frac{k}{q}\right]$。

另一方面，構造一個 n 階 1–(1,0)拉丁方陣，方陣中第 $1,2,\ldots,q$ 行的"1"分別位於第 $1, k+1, 2k+1,\ldots,n-k+1$ 列，第 $q+1,q+2,\ldots,2q$ 行的"1"分別位於第 $2, k+2, 2k+2,\ldots,n-k+2$ 列，依此類推，直到第 $n-q+1,n-q+2,\ldots,n$ 行的"1"分別位於第 $k,2k,\ldots,n$ 列。

如下圖所示，為 $n=12$, $k=4$ 的例子，每一行上方的數字代表該行的"1"所在的列數。

1	5	9	2	6	10	3	7	11	4	8	12



此方陣的"1"所在位置，也可用以下方法表示：

第 i 行第 j 列的數字為"1"$\Leftrightarrow \exists x, y\in N\cup\{0\}, x<k,\ y<q\ s.t.\begin{cases} i-1=xq+y \\ j-1=yk+x\end{cases}$。

觀察第 y_0k+x_0+1 至$(y_0+1)k+(x_0-1)+1$ 列共 k 列($x_0<k$, $y_0+1<q$)，這 k 列的"1"分別位於第 $xq+(y_0+1)+1$ 行($0\le x<x_0$)，或者第 $xq+y_0+1$ 行($x_0\le x<k$)。將這 k 個"1"的行數由小到大排列，每相鄰兩個之間必相差 q 或 $q-1$；而行數最小值和最大值分別為 y_0+2 和$(k-1)q+y_0+1$，由於 $0\le y_0<q-1$，故最左邊的"1"以左，和最右邊的"1"以右，沒有"1"的部分(上圖塗色區域)的行數都少於 q。由以上的推論可以知道，第 y_0k+x_0+1 至$(y_0+1)k+(x_0-1)+1$ 列中，每連續 q 行必至少有一個"1"。

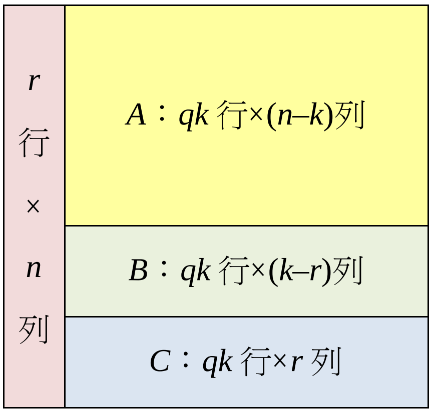
因此，無論 $k\times k$ 正方形位於何處，在正方形的範圍內，每連續 q 行至少有一個"1"，亦即此正方形內至少有 $\left[\frac{k}{q}\right]$ 個"1"。故我們構造出一個 n 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形

內，數字和都不小於$\left\lceil \frac{k}{q} \right\rceil$。由基本性質二可知 $f_1(n,k) \geq \left\lceil \frac{k}{q} \right\rceil$。 □

在本文中，一律以 q 和 r 代表 n 除以 k 的商和餘數，即 $n=qk+r$。

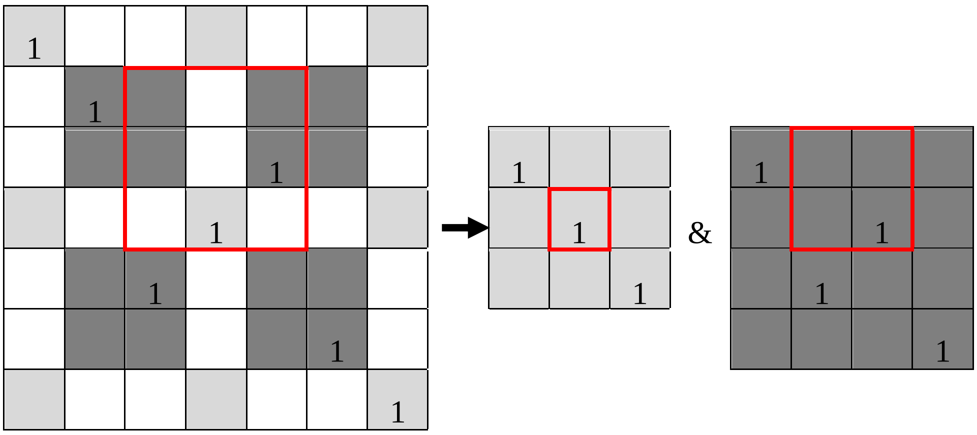
引理 1–3. $k \nmid n$時，$\left\lceil \frac{r}{q+1} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-r}{q} \right\rceil \leq f_1(n,k) \leq \left\lceil \frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$。

證明. 若 $f_1(n,k)=a$，則根據基本性質二，存在一個 n 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k \times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：



A 區+B 區可切割成 q^2 個 $k \times k$ 正方形
$\rightarrow A$ 區+B 區數字和$\geq q^2 a \cdots (1)$
B 區+C 區可切割成 q 個 $k \times k$ 正方形
$\rightarrow B$ 區+C 區數字和$\geq qa \cdots (2)$
B 區共有 $k-r$ 列$\rightarrow B$ 區數字和$\leq k-r \cdots (3)$
(1)+(2)–(3)有
A 區+B 區+C 區數字和$(=qk) \geq (q^2+q)a+r-k$
$\rightarrow qk \geq (q^2+q)a+r-k$
$\rightarrow a=f_1(n,k) \leq \left\lceil \frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$

另一方面，若將 $n \times n$ 的方陣作塗色，如下圖所示：



淺色區域是$(q+1)^2$ 個 $r \times r$ 正方形，深色區域是 q^2 個$(k-r) \times (k-r)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為$(q+1)r$ 和 $q(k-r)$的兩個小方陣。

每一個 $k \times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 $r \times r$ 正方形；而每一個 $k \times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k-r) \times (k-r)$正方形。又由定理 1–2 可知道 $f_1((q+1)r,r)=\left\lceil \frac{r}{q+1} \right\rceil$ 及 $f_1(q(k-r),k-r)=\left\lceil \frac{k-r}{q} \right\rceil$，若將淺色和深色小方陣，以及原方陣中對應的格子，依定理 1–2 的證明過程中，提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k \times k$ 正方形

內必至少有 $f_1((q+1)r,r)+f_1(q(k-r),k-r)$個"1"，由基本性質二有 $f_1(n,k)\geq\left[\dfrac{r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{k-r}{q}\right]$。 □

為求簡便，在下文中令 $L_1(n,k)=\left[\dfrac{r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{k-r}{q}\right]$，$U_1(n,k)=\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

引理 1–4. $r=k-1$ 時， $f_1(n,k)=U_1(n,k)$。

證明. $q=1$ 時，$n=2k-1$，

$$L_1(n,k)=\left[\frac{k-1}{2}\right]+\left[\frac{k-(k-1)}{1}\right]=\left[\frac{k-1}{2}\right]+1=\left[\frac{k+1}{2}\right],$$
$$U_1(n,k)=\left[\frac{2k-(k-1)}{2}\right]=\left[\frac{k+1}{2}\right],$$
故 $\left[\dfrac{k+1}{2}\right]\leq f_1(n,k)\leq\left[\dfrac{k+1}{2}\right]\Rightarrow f_1(n,k)=\left[\dfrac{k+1}{2}\right]=U_1(n,k)$。

$q>1$ 時，由引理 1–3 有 $f_1(n,k)\leq U_1(n,k)=\left[\dfrac{(q+1)k-(k-1)}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{qk+1}{q(q+1)}\right]$，

由定理 1–1 有 $f_1((n,k)\geq f_1((q+1)k,k)=\left[\dfrac{k}{q+1}\right]=\left[\dfrac{qk}{q(q+1)}\right]$，

即 $\left[\dfrac{qk}{q(q+1)}\right]\leq f_1(n,k)\leq\left[\dfrac{qk+1}{q(q+1)}\right]$。

若 $\left[\dfrac{qk+1}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{qk}{q(q+1)}\right]+1$ 則 $\dfrac{qk+1}{q(q+1)}$ 必為整數$\Rightarrow q(q+1)|qk+1\Rightarrow q|qk+1\Rightarrow q|1$ 與 $q>1$ 矛盾，

因此 $\left[\dfrac{qk+1}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{qk}{q(q+1)}\right]=f_1(n,k)$， $f_1(n,k)=U_1(n,k)$。 □

定理 1–5. $f_1(n,k)=\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

證明. $r=0$ 時，這個式子即為定理 1–2，故只需證明 $r\neq0$ 的情況。

令 n'為最大的正整數，滿足 $\begin{cases} n\leq n'<(q+1)k \\ U_1(n,k)=U_1(n',k)\end{cases}$。

若 $n'=(q+1)k-1$，根據引理 1–4、定理 1–1 和引理 1–3 有
$U_1(n',k)=f_1(n',k)\leq f_1(n,k)\leq U_1(n,k)$，
故 $f_1(n,k)=U_1(n,k)=\left[\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

若 $n'<(q+1)k-1$，則 $U_1(n',k)=U_1(n'+1,k)+1$，
令 $n'=qk+r'$，上式可表為 $\left[\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{(q+1)k-(r'+1)}{q(q+1)}\right]+1$，

故 $\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)} \in N \Rightarrow \dfrac{k-r'}{q} \in N, \dfrac{r'}{q+1} \in N$ ，

所以 $L_1(n',k) = \dfrac{k-r'}{q} + \dfrac{r'}{q+1} = \dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)} = U_1(n',k) \Rightarrow f_1(n',k) = U_1(n',k)$ 。

同樣的根據定理 1–1 和引理 1–3，有 $U_1(n',k) = f_1(n',k) \le f_1(n,k) \le U_1(n,k)$ ，

故 $f_1(n,k) = U_1(n,k) = \left\lceil \dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$ 。 □

2.2　$n\ge 2$，求 $f_2(n,k)$的一般式。

定理 2–1. $n\ge 4$, $f_2(n,k)\le f_2(n-2,k)$。

證明. 由基本性質二可知，存在一個 n 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 $f_2(n,k)$。令 $f_2(n,k)=a$。

1. 若此方陣四個角落的格子內數字都是"1"，則將方陣的第 1 行、第 n 行、第 1 列和第 n 列取走，只剩下(n–2)階的方陣，這個剩下的方陣仍為一個 2–(1,0)拉丁方陣。過程中每個 $k\times k$ 正方形的數字和不變，因此就得到一個(n–2)階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a，由基本性質二可知 $f_2(n-2,k)\ge a=f_2(n,k)$。

2. 若此方陣的四個角落，至少有一個格子內的數字是"0"。不妨設該格在第 n 行第 n 列。將方陣的第 n 行和第 n 列取走，剩下的(n–1)階方陣中，會有兩行兩列都只有一個"1"。設這兩行兩列分別為第 i_1、i_2 行，第 j_1、j_2 列，則必有第 i_1 行 j_1 列和第 i_2 行 j_2 列的格子內皆為"0"，或者第 i_1 行 j_2 列和第 i_2 行 j_1 列的格子內皆為"0"。把皆為"0"的兩個格子換成"1"，使方陣變回 2–(1,0)拉丁方陣。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&1\\\hline 0&1&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0&1\\\hline 1&0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&1&0\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0&\mathbf{1}\\\hline 0&1&0&0&1\\\hline 0&\mathbf{1}&0&1&0\\\hline 1&0&0&1&0\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|}\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{i_1}&\multicolumn{1}{c}{i_2}\\\cline{2-3} j_1&0&0\\\cline{2-3} j_2&0&0\\\cline{2-3}\end{array}\downarrow\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{1}&0\\\hline 0&\mathbf{1}\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array}\downarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 1&\mathbf{1}\\\hline \mathbf{1}&0\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}\downarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 1&\mathbf{1}\\\hline \mathbf{1}&1\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}\downarrow\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{1}&1\\\hline 1&\mathbf{1}\\\hline\end{array}$$

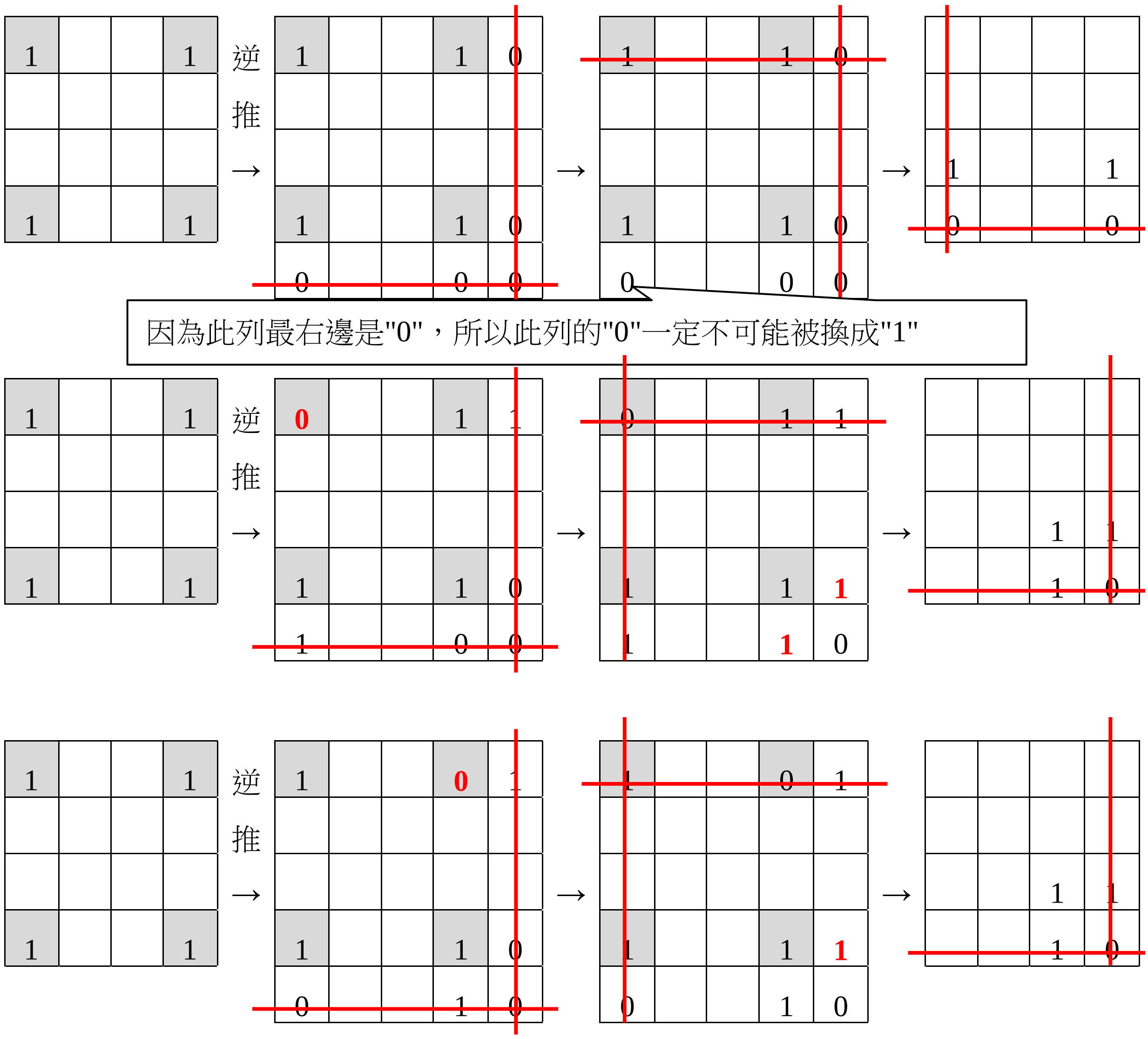
經過以上的操作後，方陣內每個 $k\times k$ 正方形的數字和不變或增加，因此就得到一個(n–1)階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a，由基本性質二可知 $f_2(n-1,k)\ge a=f_2(n,k)$。

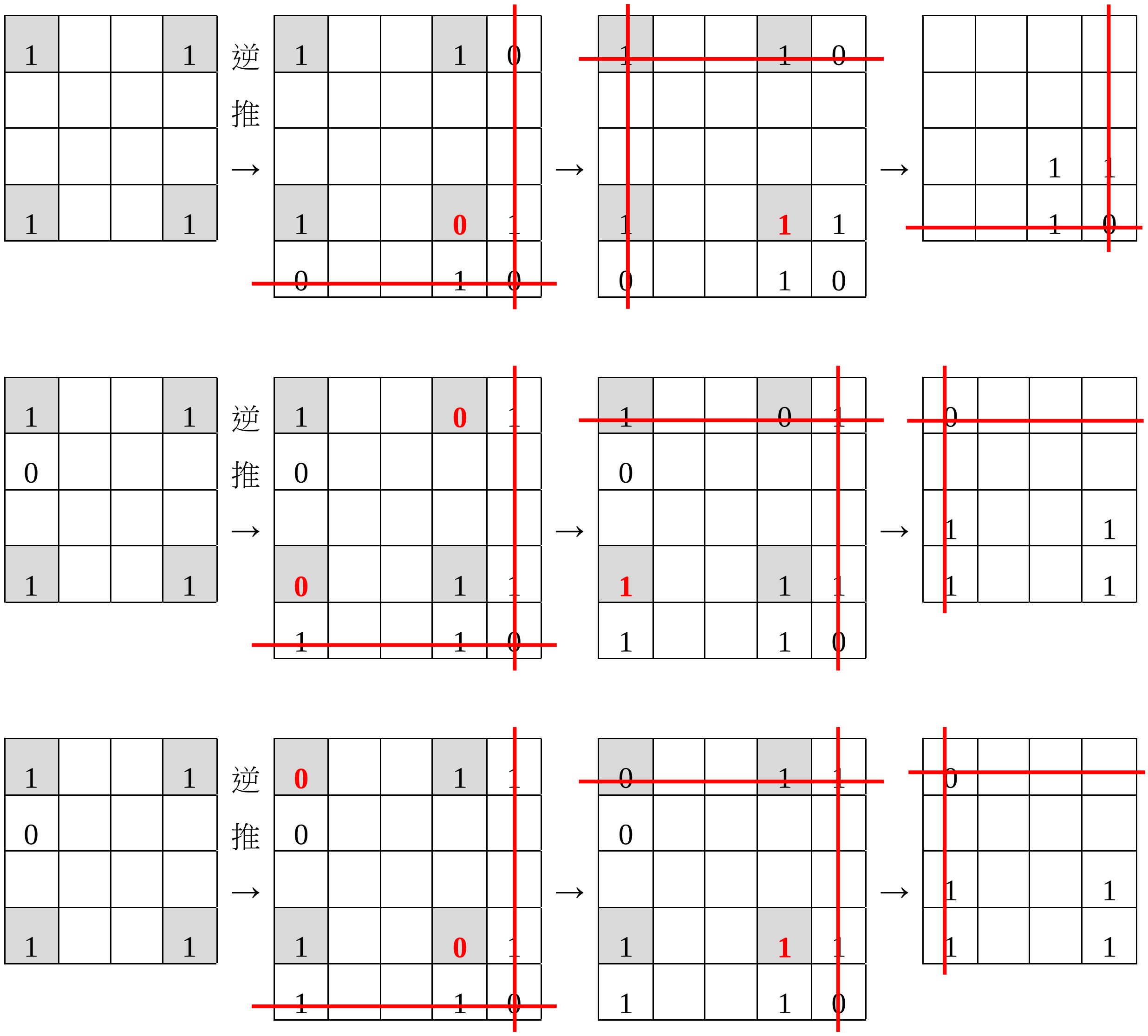
到這邊為止，也得到一個小結果：若存在一個 n 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 $f_2(n,k)$，且它的四個角落中，至少一格的數字是"0"，則 $f_2(n,k)\le f_2(n-1,k)$。姑且稱之為「定理 2–1*」吧！

若這個(n–1)階方陣的其中一個角落內數字是"0"，就可以再移去一行一列，補上兩個"1"，剩下的(n–2)階 2–(1,0)拉丁方陣中，每一個 $k\times k$ 正方形內數字和仍不小於 a，由基本性質二可知 $f_2(n-2,k)\ge a=f_2(n,k)$。

3. 若這個(n–1)階方陣的四個角落內數字都是"1"，再把取走的第 n 行和第 n 列放回來，將補上的"1"換回"0"，考慮原本的 n 階方陣。在底下的例圖中，代表(n–1)階方陣四個角落的格子，將以塗色表示。塗色區域可能有一個或兩個格子原本是"0"，是在補"1"的過程後才變成都是"1"；但是無論是何種情況，都可以從原 n 階方陣得到一個(n–2)階 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a。

底下為所有情況的例圖。在圖中沒有填入數字的格子，代表該格不論是"1"還是"0"都不會有影響。





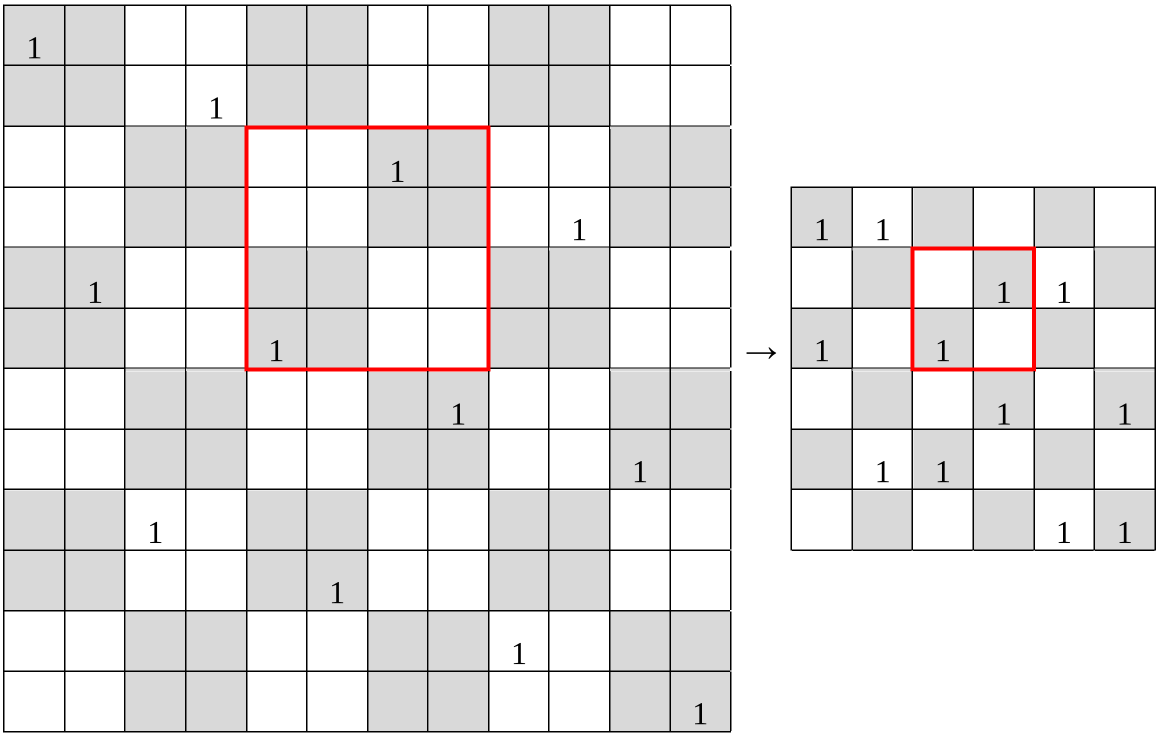
經由以上的討論可以發現，無論原本的 n 階方陣內數字如何排列，都一定可以產生出一個$(n–2)$階 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內數字和都不小於 a，由基本性質二可知 $f_2(n–2,k)\geq a=f_2(n,k)$。 □

定理 2–2. $k|n$ 時，$f_2(n,k)=\left[\dfrac{2k}{q}\right]$。

證明. 把 $n\times n$ 的方陣切割成 q^2 個彼此不重疊的 $k\times k$ 正方形，方陣中總共有 $2n$ 個"1"，由鴿籠原理可知，對所有的 n 階 2–(1,0)拉丁方陣，至少有一個 $k\times k$ 正方形內的"1"數量不超過 $\left[\dfrac{2n}{q^2}\right]=\left[\dfrac{2k}{q}\right]$個，所以該 $k\times k$ 正方形內的數字和不超過$\left[\dfrac{2k}{q}\right]$，由基本性質一可知 $f_2(n,k)\leq\left[\dfrac{2k}{q}\right]$。

另一方面，觀察到$\left[\dfrac{2k}{q}\right]=f_1(2n,2k)$，因此我們應該可以藉由 $f_1(2n,2k)$的構造，得到 $f_2(n,k)$的構造。先依照定理 1–2 的證明過程中提到的方式，構造出一個 $2n$ 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $2k\times 2k$ 正方形內，數字和都不小於$\left[\dfrac{2k}{q}\right]$。接著把這個 $2n$ 階方陣分成 n^2 個彼此不重疊的 2×2 正方形，每一個正方形合併成一個小方格。若原本 2×2 正方形內有"1"，則合併成的方格中也填入"1"，否則填入"0"。

如下圖所示，為 n=6, k=2 的例子。



根據定理 1–2 的證明過程所述，上圖左邊的 2n 階 1–(1,0)拉丁方陣，

第 i 行第 j 列的數字為"1" $\Leftrightarrow \exists x, y \in N \cup \{0\}, x < 2k, y < q \ s.t. \begin{cases} i-1 = xq + y \\ j-1 = 2yk + x \end{cases}$。令 x_1 和 x_2 為 x 除以 2 的商和餘數，即 $x=2x_1+x_2$ $(0 \le x_1 < k, x_2=0$ 或 $1)$；令 $y'=x_2q+y$ $(0 \le y' < 2q)$。一組 x 和 y 的值，唯一對應一組 x_1 和 y'的值。

利用 x_1 和 y'，可以計算$\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$和$\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor$的值如下：

$$\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{xq+y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2x_1+x_2)q+y}{2} \right\rfloor = x_1 q + \left\lfloor \frac{x_2 q+y}{2} \right\rfloor = x_1 q + \left\lfloor \frac{y'}{2} \right\rfloor \text{；}$$

$$\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2yk+x}{2} \right\rfloor = yk + \left\lfloor \frac{2x_1+x_2}{2} \right\rfloor = yk + x_1 \equiv y'k + x_1 \pmod{qk} \text{。}$$

接著展開以下推論：

在 n 階方陣中，第 i'行第 j'列的數字為"1" $\Leftrightarrow$存在 i,j 滿足 $i'-1 = \left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor, j'-1 = \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor$，且在 2$n$ 階 1–(1,0)拉丁方陣中，第 i 行第 j 列的數字為"1"(根據最初在 n 階方陣中填入"1"和"0"的規則) $\Leftrightarrow$存在 x,y 滿足 $i'-1 = \left\lfloor \frac{xq+y}{2} \right\rfloor, j'-1 = \left\lfloor \frac{2yk+x}{2} \right\rfloor$ $\Leftrightarrow$存在 x_1,y'滿足 $i'-1 = x_1 q + \left\lfloor \frac{y'}{2} \right\rfloor, j'-1 \equiv y'k + x_1 \pmod{qk}$。

若分別以 $x_1=\alpha_1, y'=\beta_1$，以及 $x_1=\alpha_2, y'=\beta_2$ 代入，使得得到的 i'和 j'值相同。由於 i'相同且

$0 \le \left[\dfrac{y'}{2}\right] < q$，故$\alpha_1=\alpha_2$，且$|\beta_1-\beta_2|<2$；又由於 j'相同，故$\beta_1 k \equiv \beta_2 k \pmod{qk}$，即$\beta_1 \equiv \beta_2 \pmod{q}$。

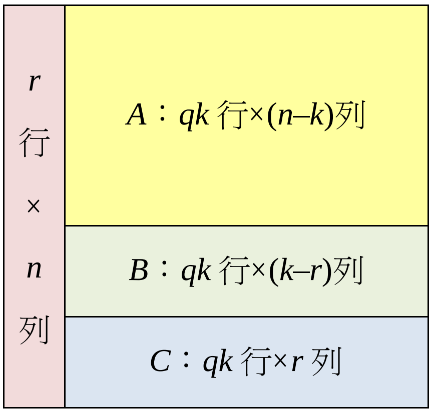
$q\ge 2$ 時，$|\beta_1-\beta_2|<2$ 和$\beta_1\equiv\beta_2 \pmod{q}$矛盾，代表最初分割的每一個 2×2 正方形中，都只有一個"1"，則合併成的 n 階方陣為一個 2–(1,0)拉丁方陣。由於 $2n$ 階方陣中每一個 $2k\times 2k$ 正方形內，數字和都不小於$\left[\dfrac{2k}{q}\right]$，故 n 階方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於$\left[\dfrac{2k}{q}\right]$，由基本性質二可知 $f_2(n,k)\ge\left[\dfrac{2k}{q}\right]$。

而 $q=1$ 時亦即 $k=n$，不管如何構造，在每個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 $2n=\left[\dfrac{2k}{q}\right]$，由基本性質二可知 $f_2(n,k)\ge\left[\dfrac{2k}{q}\right]$。 □

引理 2–3. $k\nmid n$時，$f_2(n,k)\le\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$；

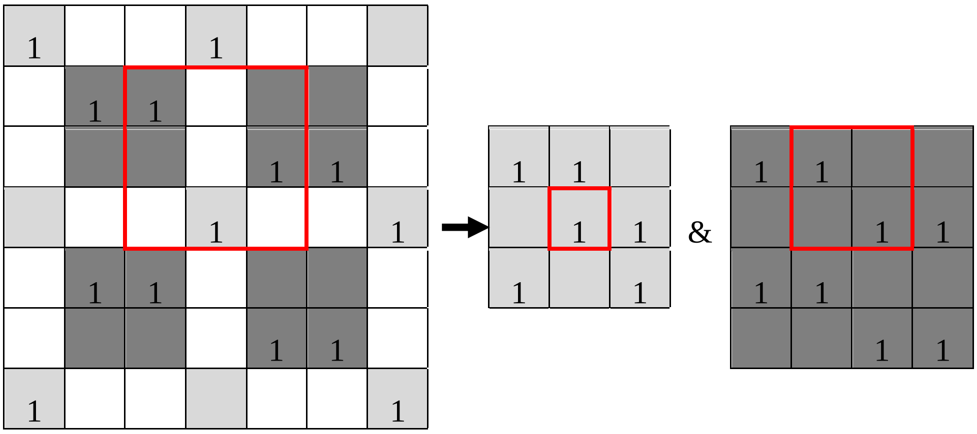
$n\ne 2k-1$ 時還有 $f_2(n,k)\ge\left[\dfrac{2r}{q+1}\right]+\left[\dfrac{2(k-r)}{q}\right]$。

證明. 若 $f_2(n,k)=a$，則根據基本性質二，存在一個 n 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：



A 區+B 區可切割成 q^2 個 $k\times k$ 正方形
$\to A$ 區+B 區數字和$\ge q^2a\cdots(1)$
B 區+C 區可切割成 q 個 $k\times k$ 正方形
$\to B$ 區+C 區數字和$\ge qa\cdots(2)$
B 區共有 $k-r$ 列$\to B$ 區數字和$\le 2(k-r)\cdots(3)$
(1)+(2)–(3)有
A 區+B 區+C 區數字和$(=2qk)\ge(q^2+q)a+2(r-k)$
$\to 2qk\ge(q^2+q)a+2(r-k)$
$\to a=f_2(n,k)\le\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$

另一方面，若將 $n\times n$ 的方陣作塗色，如下圖所示：



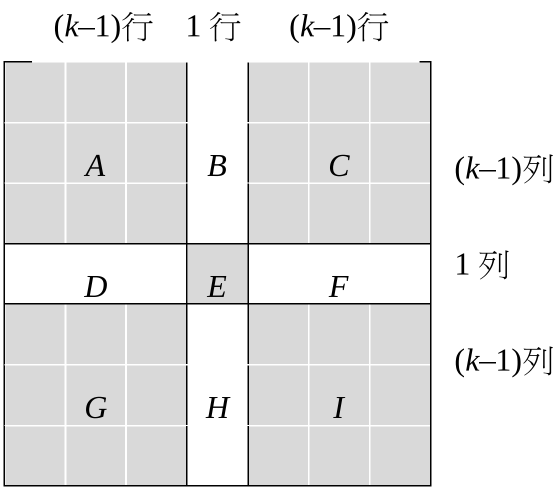
淺色區域是$(q+1)^2$個 $r\times r$ 正方形，深色區域是 q^2 個$(k-r)\times(k-r)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為$(q+1)r$ 和 $q(k-r)$的兩個小方陣。但方陣邊長≥2 才有意義，故$(q+1)r=1$ 或 $q(k-r)=1$ 時不在討論範圍內。因此，$q=1, r=k-1$, 即 $n=2k-1$ 時不在討論範圍內。

每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 $r\times r$ 正方形；而每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k-r)\times(k-r)$正方形。又由定理 2–2 可知道 $f_2((q+1)r,r)=\left\lceil \frac{2r}{q+1} \right\rceil$ 及 $f_2(q(k-r),k-r)=\left\lceil \frac{2(k-r)}{q} \right\rceil$，若將淺色和深色小方陣，以及原方陣中對應的格子，依定理 2–2 的證明過程中，提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內必至少有 $f_2((q+1)r,r)+f_2(q(k-r),k-r)$個"1"，由基本性質二有 $f_2(n,k)\geq\left\lceil \frac{2r}{q+1} \right\rceil+\left\lceil \frac{2(k-r)}{q} \right\rceil$。 □

為求簡便，在下文中令 $L_2(n,k)=\left\lceil \frac{2r}{q+1} \right\rceil+\left\lceil \frac{2(k-r)}{q} \right\rceil$，$U_2(n,k)=\left\lceil 2\times\frac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$。

定理 2–4. $k>1$, $f_2(2k-1,k)=k$。

證明. 若 $f_2(2k-1,k)=a$，則根據基本性質二，存在一個 $2k-1$ 階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：

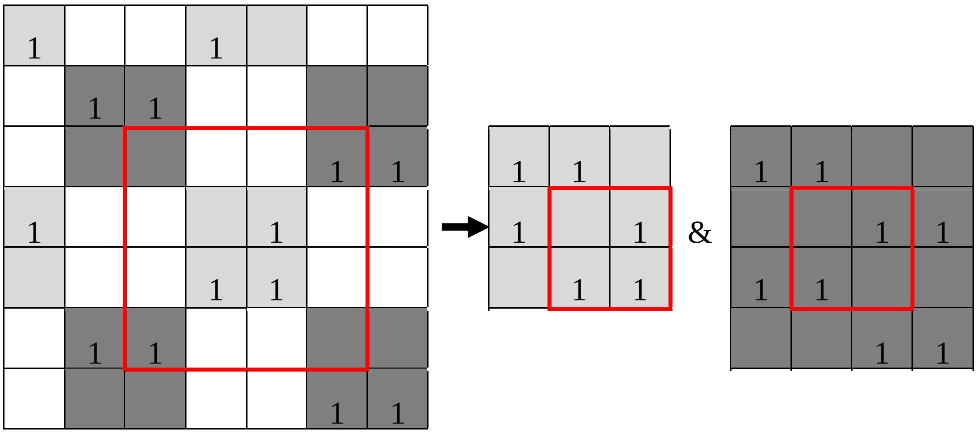


$A+B+D+E$ 為一個 $k\times k$ 正方形
$\rightarrow A+B+D+E$ 數字和$\geq a\cdots(1)$
同理 $D+E+G+H$ 數字和$\geq a\cdots(2)$
$A+B+D+E+G+H$ 共有 k 行
$\rightarrow A+B+D+E+G+H$ 數字和$=2k\cdots(3)$
(1)+(2)–(3)有 $D+E$ 數字和$\geq 2a-2k\cdots(4)$
同理有 $E+F$ 數字和$\geq 2a-2k\cdots(5)$
$D+E+F$ 共有 1 列
$\rightarrow D+E+F$ 數字和$=2\cdots(6)$
(4)+(5)–(6)有 $E\geq 4a-4k-2$，又 $E\leq 1$
$\rightarrow a=f_2(2k-1,k)\leq\left\lfloor \frac{4k+3}{4} \right\rfloor=k$

k=2 時，$f_2(3,2)$=2，構造如下圖所示。

1	1	
1		1
	1	1

k>2 時，將$(2k–1)\times(2k–1)$的方陣作塗色，如下圖所示：



淺色區域是 9 個 1×1 正方形，深色區域是 4 個$(k–2)\times(k–2)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為 3 和 $2(k–2)$的兩個小方陣。每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 2×2 正方形；而每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k–2)\times(k–2)$正方形。

前面已經說明 $f_2(3,2)$=2，又由定理 2–2 可知道 $f_2(2(k–2),k–2)=\left[\frac{2(k-2)}{2}\right]=k–2$，若將淺色和深色小方陣，以及原方陣中對應的格子，分別依 $f_2(3,2)$=2 的構造，和定理 2–2 的證明過程中，提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內，必至少有 $f_2(3,2)+f_2(2(k–2),k–2)$個"1"，由基本性質二有 $f_2(2k–1,k)\geq k$。 □

引理 2–5. q>1, $r=k–1$ 時， $f_2(n,k)=U_2(n,k)$ 。

證明. q=2 時，$n=3k–1$，

$$L_2(n,k)=\left[\frac{2(k-1)}{3}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]=\left[\frac{2k+1}{3}\right]，U_2(n,k)=\left[2\times\frac{3k-(k-1)}{6}\right]=\left[\frac{2k+1}{3}\right]，$$

$$\left[\frac{2k+1}{3}\right]\leq f_2(n,k)\leq\left[\frac{2k+1}{3}\right]\Rightarrow f_2(n,k)=\left[\frac{2k+1}{3}\right]。$$

q>2 時，由引理 2–3 有 $f_2(n,k)\leq U_2(n,k)=\left[2\times\frac{(q+1)k-(k-1)}{q(q+1)}\right]=\left[\frac{2qk+2}{q(q+1)}\right]$，

而定理 2–2 的證明過程所給出的 $f_2((q+1)k,k)$構造中，必有其中一個角落內數字是"0"，

由定理 2–1*有 $f_2(n,k)\geq f_2((q+1)k,k)=\left[\frac{2k}{q+1}\right]=\left[\frac{2qk}{q(q+1)}\right]$，

即$\left[\frac{2qk}{q(q+1)}\right]\leq f_2(n,k)\leq\left[\frac{2qk+2}{q(q+1)}\right]$。

若$\left[\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}\right]>\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，則$\dfrac{2qk+1}{q(q+1)}$為整數，或者$\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}$為整數

$\Rightarrow q(q+1)|2qk+1\Rightarrow q|2qk+1\Rightarrow q|1$，或者 $q(q+1)|2qk+2\Rightarrow q|2qk+2\Rightarrow q|2$ 但皆與 $q>2$ 矛盾，

因此$\left[\dfrac{2qk+2}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]=f_2(n,k)\Rightarrow f_2(n,k)=U_2(n,k)$。 □

引理 2–6. $r=k-2$ 時，$f_2(n,k)=U_2(n,k)$。

證明. 經由計算可知，q=1~4 時，皆有 $L_2(n,k)=U_2(n,k)$，故都有 $f_2(n,k)=U_2(n,k)$。

$q>4$ 時，由引理 2–3 有 $f_2(n,k)\le U_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-(k-2)}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right]$，

由定理 2–1 有 $f_2(n,k)\ge f_2((q+1)k,k)=\left[\dfrac{2k}{q+1}\right]=\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，

即$\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]\le f_2(n,k)\le\left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right]$。

若$\left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right]>\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]$，則$\dfrac{2qk+1}{q(q+1)},\dfrac{2qk+2}{q(q+1)},\dfrac{2qk+3}{q(q+1)},\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}$至少有一個為整數，但皆與 $q>4$ 矛盾，因此$\left[\dfrac{2qk+4}{q(q+1)}\right]=\left[\dfrac{2qk}{q(q+1)}\right]=f_2(n,k)\Rightarrow f_2(n,k)=U_2(n,k)$。 □

定理 2–7. $n\ne 2k-1$ 時，$f_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

證明. $r=0$ 時，這個式子即為定理 2–2；$q=1$ 時，$L_2(n,k)=2k-r=U_2(n,k)\Rightarrow f_2(n,k)=U_2(n,k)$，故只需證明 $r\ne 0$, $q>1$ 的情況。令 n'為最大的正整數，滿足$\begin{cases} n\le n'<(q+1)k \\ U_2(n,k)=U_2(n',k)\end{cases}$。

可以分成以下幾種情況：

1. $n'=(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'(\text{mod } 2)$：
   根據引理 2–5、定理 2–1 和引理 2–3 有$U_2(n',k)=f_2(n',k)\le f_2(n,k)\le U_2(n,k)$，
   故 $f_2(n,k)=U_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

2. $n'=(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'-1(\text{mod } 2)$：
   易知$U_2(n,k)=U_2(n',k)=U_2(n'-1,k)$，
   根據引理 2–6、定理 2–1 和引理 2–3 有$U_2(n'-1,k)=f_2(n'-1,k)\le f_2(n,k)\le U_2(n,k)$，
   故 $f_2(n,k)=U_2(n,k)=\left[2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right]$。

3. $n'<(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'(\text{mod } 2)$，則 $U_2(n',k)=U_2(n'+1,k)+1$，
   令 $n'=qk+r'$，上式可表為$\left[\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)/2}\right]=\left[\dfrac{(q+1)k-(r'+1)}{q(q+1)/2}\right]+1$，

故 $2\times\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}\in N \Rightarrow \dfrac{2(k-r')}{q}\in N, \dfrac{2r'}{q+1}\in N$ ，

所以 $L_2(n',k)=\dfrac{2(k-r')}{q}+\dfrac{2r'}{q+1}=2\times\dfrac{(q+1)k-r'}{q(q+1)}=U_2(n',k) \Rightarrow f_2(n',k)=U_2(n',k)$ 。

同樣的根據定理 2–1 和引理 2–3，有 $U_2(n',k)=f_2(n',k)\le f_2(n,k)\le U_2(n,k)$ ，

故 $f_2(n,k)=U_2(n,k)=\left\lceil 2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil$ 。

4. $n'<(q+1)k-1$，且 $n\equiv n'-1 \pmod 2$，同樣有 $f_2(n',k)=U_2(n',k)$。在定理 2–2 的證明過程所給出的 $f_2(n',k)$構造中，必有其中一個角落內數字是"0"，由定理 2–1*和引理 2–3 可知 $U_2(n',k)=f_2(n',k)\le f_2(n'-1,k)\le f_2(n,k)\le U_2(n,k)$ ，

   故 $f_2(n,k)=U_2(n,k)=\left\lceil 2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil$ 。 □

將定理 2–4 和定理 2–7 合併，即為 m=2 的所有結果：

$$f_2(n,k)=\begin{cases}\left\lceil 2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil & , if\ \ n\neq 2k-1\\ \left\lceil 2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)}\right\rceil-1, & if\ \ n=2k-1\end{cases}$$ 。

2.3 $n\ge m$，求 $f_m(n,k)$的一般式。

定理 3–1. $k|n$ 時，$f_m(n,k)=\left\lceil \dfrac{mk}{q}\right\rceil$ 。

證明. 把 $n\times n$ 的方陣切割成 q^2 個彼此不重疊的 $k\times k$ 正方形，方陣中總共有 mn 個"1"，由鴿籠原理可知，對所有的 n 階 m–(1,0)拉丁方陣，至少有一個 $k\times k$ 正方形內的"1"數量不超過 $\left\lceil \dfrac{mn}{q^2}\right\rceil=\left\lceil \dfrac{mk}{q}\right\rceil$個，所以該 $k\times k$ 正方形內的數字和不超過$\left\lceil \dfrac{mk}{q}\right\rceil$，由基本性質一可知 $f_m(n,k)\le\left\lceil \dfrac{mk}{q}\right\rceil$ 。

以下一律以 m_1 和 m_2 代表 m 除以 q 的商和餘數，即 $m=m_1q+m_2$。構造的部分可分成以下三種情況：

1. $q|m$ 時，構造一個 m–(1,0)拉丁方陣，
   其中第 $1,2,\dots,q$ 行的"1"全都位於第 $2\sim(m_1+1)$, $k+2\sim k+(m_1+1)$, $2k+2\sim 2k+(m_1+1),\dots,n-k+2\sim n-k+(m_1+1)$列，
   第 $q+1,q+2,\dots,2q$ 行的"1"全都位於第 $3\sim(m_1+2)$, $k+3\sim k+(m_1+2)$, $2k+3\sim 2k+(m_1+2),\dots,n-k+3\sim n-k+(m_1+2)$列，依此類推，
   直到第 $n-q+1,n-q+2,\dots,n$ 行的"1"全都位於第 $k+1\sim k+m_1$, $2k+1\sim 2k+m_1$, $3k+1\sim 3k+m_1,\dots,$ $n+1\sim n+m_1$ 列。列數以同餘 n 來計算。

   如下圖所示，是一個 n=12, k=4, m=9 (q=3, m_1=3)的例子。

			1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1				1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1				1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1				1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1				1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1				1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1				1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1			

很明顯的，取這個方陣任一行的任意連續 k 個格子，其中恰有 m_1 個"1"。一個 $k\times k$ 正方形由 k 個 $1\times k$ 長方形組成，故其中有 m_1k 個"1"。這個 n 階 m–(1,0)拉丁方陣中，每個 $k\times k$ 正方形內的數字和都不小於 $m_1k=\left[\frac{mk}{q}\right]$，由基本性質二可知 $f_m(n,k)\geq\left[\frac{mk}{q}\right]$。

2. $q>m$ 時，觀察到 $\left[\frac{mk}{q}\right]=f_1(mn,mk)$，因此我們可以藉由 $f_1(mn,mk)$的構造，得到 $f_m(n,k)$的構造。這部分和定理 2–2 基本上完全相同，只是將 m=2 推廣至 m 為任意值。

   先依照定理 1–2 的證明過程中提到的方式，構造出一個 mn 階的 1–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $mk\times mk$ 正方形內，數字和都不小於 $\left[\frac{mk}{q}\right]$。接著把這個 mn 階方陣分成 n^2 個彼此不重疊的 $m\times m$ 正方形，每一個正方形合併成一個小方格。若原本 $m\times m$ 正方形內有"1"，則合併成的方格中也填入"1"，否則填入"0"。

   如下圖所示，為 n=8, m=3, k=2 的例子。

1																							
				1																			
								1															
												1											
																1							
																				1			
	1																						
					1																		
									1														
													1										
																	1						
																					1		
		1																					
						1																	
										1													
														1									
																		1					
																						1	
			1																				
							1																
											1												
															1								
																			1				
																							1

1	1	1					
				1	1	1	
1	1		1				
				1	1		1
1		1	1				
				1		1	1
	1	1	1				
					1	1	1

接下來，我們要證明這個方陣是一個 *m*–(1,0)拉丁方陣。根據定理 1–2 的證明過程所述，上圖的 *mn* 階 1–(1,0)拉丁方陣，

第 i 行第 j 列的數字為"1"$\Leftrightarrow \exists x, y \in N\bigcup\{0\}, x < mk, y < q\ s.t.\begin{cases} i-1 = xq+y \\ j-1 = ymk+x \end{cases}$。

令 x_1 和 x_2 為 x 除以 m 的商和餘數，即 $x=x_1m+x_2$ $(0\le x_1<k, 0\le x_2< m)$；令 $y'=x_2q+y$ $(0\le y'<mq)$。一組 x 和 y 的值，唯一對應一組 x_1 和 y'的值。

利用 x_1 和 y'，可以計算$\left\lfloor \frac{i-1}{m} \right\rfloor$和$\left\lfloor \frac{j-1}{m} \right\rfloor$的值如下：

$\left\lfloor \frac{i-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{xq+y}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(mx_1+x_2)q+y}{m} \right\rfloor = x_1q + \left\lfloor \frac{x_2q+y}{m} \right\rfloor = x_1q + \left\lfloor \frac{y'}{m} \right\rfloor$；

$\left\lfloor \frac{j-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ymk+x}{m} \right\rfloor = yk + \left\lfloor \frac{mx_1+x_2}{m} \right\rfloor = yk + x_1 \equiv y'k + x_1 \pmod{qk}$。

接著展開以下推論：

在 n 階方陣中，第 i'行第 j'列的數字為"1"

$\Leftrightarrow$存在 i,j 滿足 $i'-1 = \left\lfloor \frac{i-1}{m} \right\rfloor, j'-1 = \left\lfloor \frac{j-1}{m} \right\rfloor$，且在 mn 階 1–(1,0)拉丁方陣中，第 i 行第 j 列的數字為"1"(根據最初在 n 階方陣中填入"1"和"0"的規則)

$\Leftrightarrow$存在 x,y 滿足 $i'-1 = \left\lfloor \frac{xq+y}{m} \right\rfloor, j'-1 = \left\lfloor \frac{ymk+x}{m} \right\rfloor$

$\Leftrightarrow$存在 x_1,y'滿足 $i'-1 = x_1q + \left\lfloor \frac{y'}{m} \right\rfloor, j'-1 \equiv y'k + x_1 \pmod{qk}$。

若分別以 $x_1=\alpha_1, y'=\beta_1$，以及 $x_1=\alpha_2, y'=\beta_2$ 代入，使得得到的 i'和 j'值相同。由於 i'相同且 $0 \le \left\lfloor \frac{y'}{m} \right\rfloor < q$，故$\alpha_1=\alpha_2$，且$|\beta_1-\beta_2|<m$；又由於 j'相同，故$\beta_1k\equiv\beta_2k \pmod{qk}$，亦即$\beta_1\equiv\beta_2 \pmod{q}$。

$m\le q$ 時，$|\beta_1-\beta_2|<m$ 和$\beta_1\equiv\beta_2 \pmod{q}$矛盾，代表最初分割的每一個 $m\times m$ 正方形中，都只有一個"1"，則合併成的 n 階方陣為一個 m–(1,0)拉丁方陣。由於 mn 階方陣中每一個 $mk\times mk$ 正方形內，數字和都不小於$\left\lceil \frac{mk}{q} \right\rceil$，故 n 階方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於$\left\lceil \frac{mk}{q} \right\rceil$，由基本性質二可知 $f_m(n,k)\ge\left\lceil \frac{mk}{q} \right\rceil$。

3. $q<m$ 且 $q \nmid m$時，以 $m=m_1q$ 代入第 1 點中，會得到一個 n 階 m_1q–(1,0)拉丁方陣；以 $m=m_2$ 代入第 2 點中，會得到一個 n 階 m_2–(1,0)拉丁方陣。

   m_1q–(1,0)拉丁方陣中，第 i 行第 j 列的數字為"1"的充要條件為：

   $\exists x_1, y_1, z, w \in N\bigcup\{0\}, x_1 < k, y_1, z < q, w < m_1\ s.t.\begin{cases} i-1 = x_1q+y_1 \\ j-1 \equiv zk+x_1+w+1 \pmod{qk} \end{cases}$。

   看似複雜，但確實可以得到這個結果。

   m_2–(1,0)拉丁方陣中，第 i 行第 j 列的數字為"1"的充要條件為：

$$\exists x_1, y' \in N \cup \{0\}, x_1 < k, y' < mq \; s.t. \begin{cases} i-1 = x_1 q + \left\lfloor \dfrac{y'}{m} \right\rfloor \\ j-1 \equiv y'k + x_1 \pmod{qk} \end{cases}。$$

這裡的 x_1 和 y'沿用了第 2 點中的符號。令 y_1 和 y_2 為 y'除以 m 的商和餘數，即 $y'=y_1m+y_2$ $(0\le y_1<q,\ 0\le y_2<m)$，那麼這個條件可以改寫為：

$$\exists x_1, y_1, y_2 \in N \cup \{0\}, x_1 < k, y_1 < q, y_2 < m \; s.t. \begin{cases} i-1 = x_1 q + y_1 \\ j-1 \equiv (y_1 m + y_2)k + x_1 \pmod{qk} \end{cases}。$$

若兩個方陣的第 i 行第 j 列數字皆為"1"，則有：

$\exists x_1, y_1, y_2, z, w, \; s.t. \; zk + x_1 + w + 1 \equiv (y_1 m + y_2)k + x_1 \pmod{qk}$

$\Rightarrow \exists w \; s.t. \; w+1 \equiv 0 \pmod{k}$，但是 $w<m_1=\left\lfloor \dfrac{m}{q} \right\rfloor<k$ 故 $0<w+1<k$，矛盾。

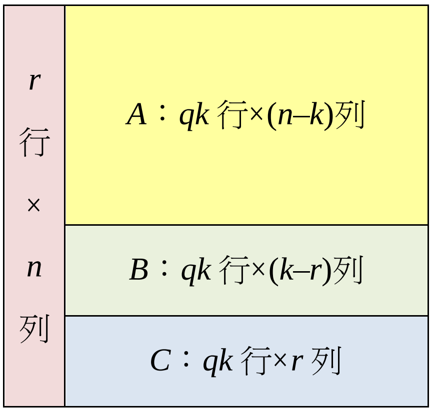
因此，若將這兩個方陣重合，新方陣的每個格子內數字，等於原先兩個方陣對應格子的數字和，那麼這個新方陣會是一個 m–(1,0)拉丁方陣。其中每個 $k\times k$ 正方形的數字和，都不小於$\left\lfloor \dfrac{(m_1 q)k}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{m_2 k}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{mk}{q} \right\rfloor$，由基本性質二可知 $f_m(n,k)\ge\left\lfloor \dfrac{mk}{q} \right\rfloor$。 □

引理 3–2. $k \nmid n$時， $f_m(n,k) \le \left\lfloor m \times \dfrac{(q+1)k - r}{q(q+1)} \right\rfloor$；

$(q+1)r\ge m$ 且 $q(k-r)\ge m$ 時，還有 $f_m(n,k) \ge \left\lfloor \dfrac{mr}{q+1} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{m(k-r)}{q} \right\rfloor$。

※這部分和引理 2–3 基本上完全相同，只是將 m=2 推廣至 m 為任意值。

證明. 若 $f_m(n,k)=a$，則根據基本性質二，存在一個 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於 a，觀察這一個方陣，如下圖所示：



A 區+B 區可切割成 q^2 個 $k\times k$ 正方形

→A 區+B 區數字和≥q^2a⋯(1)

B 區+C 區可切割成 q 個 $k\times k$ 正方形

→B 區+C 區數字和≥qa⋯(2)

B 區共有 $k-r$ 列→B 區數字和≤$m(k-r)$⋯(3)

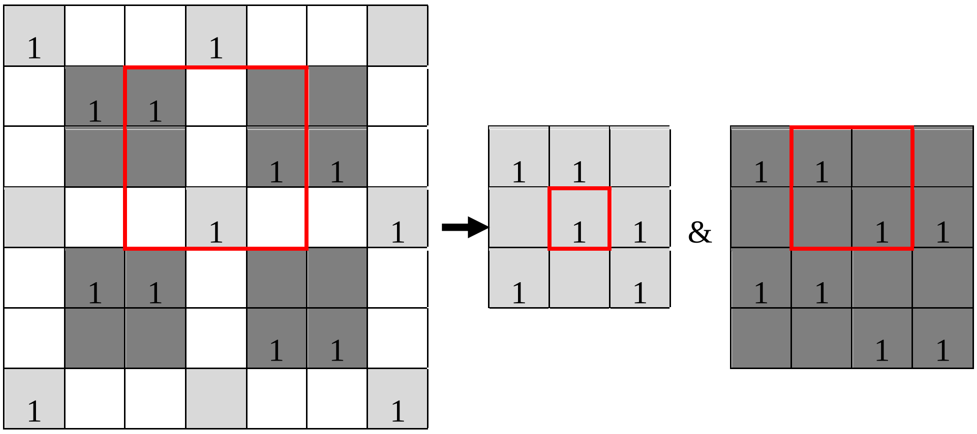
(1)+(2)–(3)有

A 區+B 區+C 區數字和≥$(q^2+q)a+m(r-k)$

→$mqk\ge(q^2+q)a+m(r-k)$

→$a=f_m(n,k)\le\left\lfloor m \times \dfrac{(q+1)k - r}{q(q+1)} \right\rfloor$

另一方面，若將 $n\times n$ 的方陣作塗色，如下圖所示：



淺色區域是$(q+1)^2$個 $r\times r$ 正方形，深色區域是 q^2 個$(k–r)\times(k–r)$正方形。若將淺色和深色區域分別挑出來，會形成邊長分別為$(q+1)r$ 和 $q(k–r)$的兩個小方陣。但方陣邊長≥m 才有意義，故$(q+1)r<m$ 或 $q(k–r)<m$ 時不在討論範圍內。

每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的淺色區域，都相當於淺色小方陣中的一個 $r\times r$ 正方形；而每一個 $k\times k$ 正方形覆蓋到的深色區域，也相當於深色小方陣中的一個$(k–r)\times(k–r)$正方形。又由定理 3–1 可知道 $f_m((q+1)r,r)=\left\lceil \dfrac{mr}{q+1} \right\rceil$ 及 $f_m(q(k–r),k–r)=\left\lceil \dfrac{m(k-r)}{q} \right\rceil$，若將淺色和深色小方陣，以及原方陣中對應的格子，依定理 3–1 的證明過程中，提到的方式放入"1"，則原方陣中每一個 $k\times k$ 正方形內必至少有 $f_m((q+1)r,r)+f_m(q(k–r),k–r)$個"1"，由基本性質二有 $f_m(n,k)\geq\left\lceil \dfrac{mr}{q+1} \right\rceil+\left\lceil \dfrac{m(k-r)}{q} \right\rceil$。

□

令 $L_m(n,k)=\left\lceil \dfrac{mr}{q+1} \right\rceil+\left\lceil \dfrac{m(k-r)}{q} \right\rceil$，$U_m(n,k)=\left\lceil m\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil$。

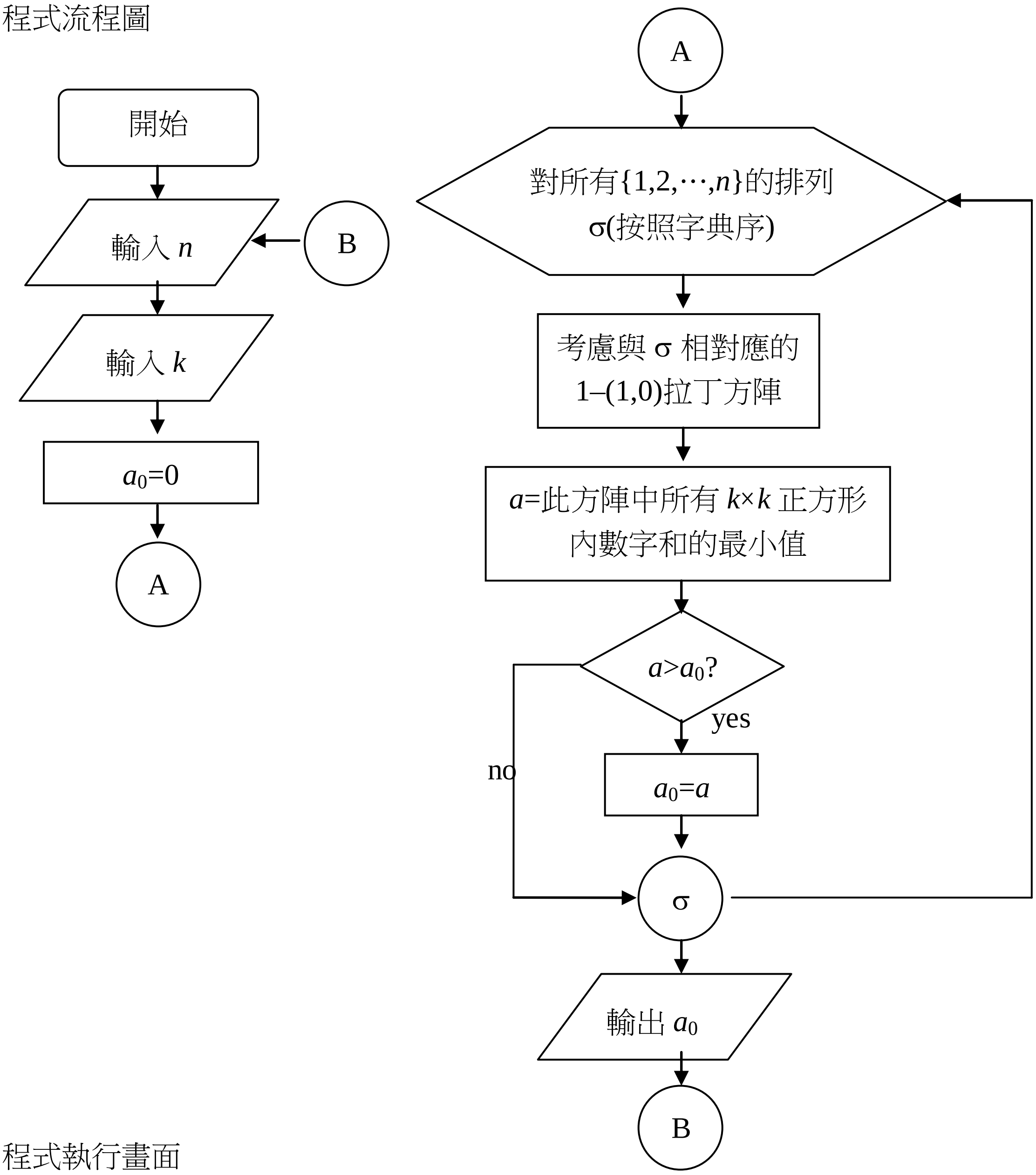
3 討論與未來展望

1. $f_2(n,k)$有一個特例：$n=2k–1$ 的情況。若要在 $n=2k–1$ 時，構造出一個$(2k–1)$階的 2–(1,0)拉丁方陣，其中每一個 $k\times k$ 正方形內，數字和都不小於$\left\lceil 2\times\dfrac{(q+1)k-r}{q(q+1)} \right\rceil=k+1$，則必須在正中央的格子內放入兩個"1"才有可能辦到。每個格子內只能放最多 1 個"1"，正是特例出現的最大原因。相信在 m 更大的時候，也會因為這個原因而產生出更多的特例。

2. $m=1$ 時，f_1 關於 n 的單調性(即定理 1–1)看似非常簡單，卻在最後一步的證明發揮重要作用；同時它看起來也顯然能夠成立，但是在 $m=2$ 的時候，竟然要花好大一番工夫，才能證明出它的弱化定理(定理 2–1)。若要往更大的 m 值邁進，這個定理的證明勢必會成為最大的瓶頸。如果沒有這個定理的話，要求得$k\nmid n$時的 $f_m(n,k)$確切值，可能就必須另尋他法了。

4 附錄

1. 程式流程圖



2. 程式執行畫面