二維格點圖上定位控制集的研究

蕭瑤

國立女子高級中學

指導老師：曾維義

Abstract

The locating-dominating set was introduced by P.J.Slater. Slater proved that $M_1^{LD}(P_n)=\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil$. In this paper we obtain some property of the $M_1^{LD}(P_m\times P_n)$ when $r=1$; moreover, we find one type of black dots' permutations in $P_2\times P_n$ and $P_3\times P_n$. And we can use this black dots' permutation to deduce the upper bound of the $M_1^{LD}(P_2\times P_n)$ and the $M_1^{LD}(P_3\times P_n)$. What's interesting ? We find that the upper bounds are also the lower bounds of the $M_1^{LD}(P_2\times P_n)$ and the $M_1^{LD}(P_3\times P_n)$. We will prove the facts by mathematical induction. Therefore, we have the results : $M_1^{LD}(P_2\times P_n)=\left\lceil\frac{3n+1}{4}\right\rceil$ and $M_1^{LD}(P_3\times P_n)=n+1$.

Also, we can apply this method of black dots' permutation to $P_4\times P_n$, and obtain $M_1^{LD}(P_4\times P_n)\le\left\lfloor\frac{4}{3}\boldsymbol{n}\right\rfloor+\mathbf{2}.$

摘要

定位控制集(Locating Dominating Set , $M_r^{LD}(G)$)是由 P.J Slater 所提出。Slater 證明了一維格點圖的 $M_1^{LD}(P_n)=\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil$。本篇作品中，我們研究了二維格點圖中，當 $r=1$ 時，$P_m\times P_n$定位控制集的一些性質，且我們更進一步找到一組$P_2\times P_n$以及 $P_3\times P_n$的黑點排列方式，並藉此得到$M_1^{LD}(P_2\times P_n)$和$M_1^{LD}(P_3\times P_n)$的上界，有趣的是這組上界值同時也是$M_1^{LD}(P_2\times P_n)$和$M_1^{LD}(P_3\times P_n)$的下界值，這個事實我們將藉由一系列的引理及數學歸納法證明。因此我們有$M_1^{LD}(P_2\times P_n)=\left\lceil\frac{3n+1}{4}\right\rceil$以及 $M_1^{LD}(P_3\times P_n)=n+1$的結果。

我們也可將這個選黑點的方式推廣到$\mathrm{P}_4\times P_n$，並得到$M_1^{LD}(\mathrm{P}_4\times P_n)$的一個上界值：$\left\lfloor \frac{4}{3}n \right\rfloor + 2$。

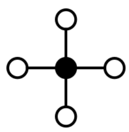
1 研究動機

在電影裡，總有許多網路伺服器被入侵或者故障的情況，而電影中的管理系統總能靠著感應器在第一時間找出故障的伺服器，讓我們好奇這當中的原理，難道每一台伺服器都要裝設感應器嗎？但這樣成本會很高。為了解答自己的疑惑，我們經調查得知設置的感應器數可以不用這麼多，因為感應器不僅監控所在的伺服器，也能夠監控周圍連接它的伺服器，這也讓我們起了第二個疑惑，感應器的設置方法會不會影響到裝設的數目？而我們是否能用最少的感應器來監控多個伺服器所連結出的網路？

2 研究內容

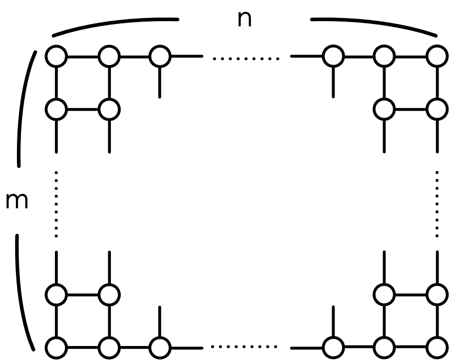
2.1 名詞定義

1. 普通伺服器：未裝感應器的網路伺服器，以白點表示。
2. 高級伺服器：設有感應器的網路伺服器，以黑點表示，所監控範圍為一單位。(圖一-1)

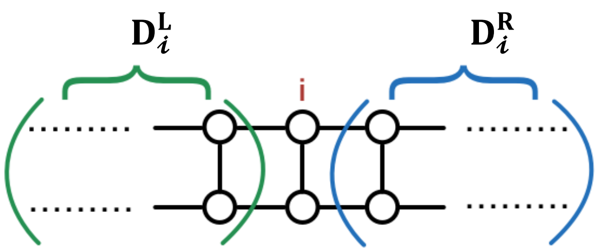


圖一-1

3. $\mathrm{P_m}\times\mathrm{P_n}$：m 列、n 行的二維模型，簡稱為D，如圖一-2，並且點(h,k)代表第 h 列第 k 行的點，$1 \le h \le m$，$1 \le k \le n$。



圖一-2



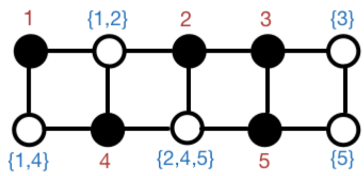
圖一-3

4. D_i^L：表示在圖形 D 裡，第 i 行左邊以前的部分，且不包含第 i 行。(圖一-3)

5. D_i^R：表示在圖形 D 裡，第 i 行右邊以後的部分，且不包含第 i 行。

6. $|D|$：表示 D 集合中的黑點的個數。

7. 定位控制集(Locating Dominating Set, LD 集)：能夠以有限個數的黑點集合確定每一白點都受到黑點監控，並且當白點有問題時，可以以黑點的集合去確認哪一個白點出現問題，則此集合為定位控制集，簡稱 LD 集，例如圖一-4。



圖一-4

8. $M_1^{LD}(P_m \times P_n)$：表示在所有$P_m \times P_n$的 LD 集中，其中使用最少黑點的個數，換句話說，$M(P_m \times P_n) = min\{|D| \mid D$是$P_m \times P_n$的 LD 集$\}$。

9. $\lceil \boldsymbol{n} \rceil$：上高斯符號，代表不小於 n 的最小正整數。

10. $\lfloor \mathbf{n} \rfloor$：下高斯符號，代表不大於 n 的最大正整數。

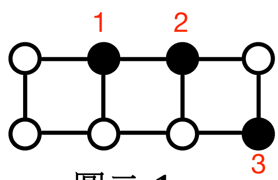
2.2 研究方法

1. 模型化

(1) 我們簡化我們的研究：我們設定感應器(黑點)對於所在的高級伺服器(黑點)以及周遭普通伺服器(白點)給出不同的訊號。所以黑點不必監控黑點，我們著重於黑點對白點的監控。在本作品中我們著重於$\boldsymbol{P_m \times P_n}$ LD集的研究。

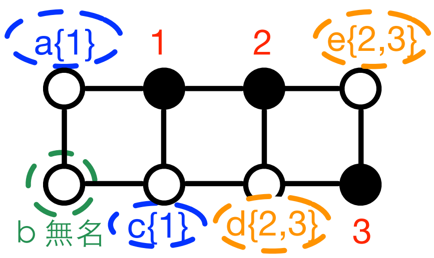
(2) 我們如何讓$P_m \times P_n$是定位控制集呢？

i.在$P_m \times P_n$裡，選擇有限的點為黑點，並加以不同的命名，如圖二-1。



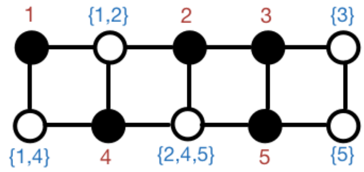
圖二-1

ii.當第一個步驟完成時，黑點周圍的白點也同時被命名了，如圖二-2。但此時要特別注意的是，當圖中有同名的白點（例如圖二-2 的 a 與 c），或是有無



圖二-2

黑點監控到的白點（例如圖二-2 的 b），則代表第一個步驟未達到我們的目標。我們的目標是什麼？我們選擇的黑點必須讓周圍的白點有不同的命名，例如圖二-3。



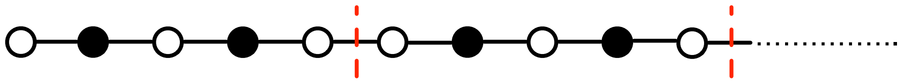
圖二-3

iii.當這有限的黑點集合能將$P_m \times P_n$所有剩下的白點做不同的命名，此時$P_m \times P_n$就完成了定位控制的程序。此時，我們稱其為$P_m \times P_n$其中一個 LD 集。

事實上，要達到定位控制$P_m \times P_n$的方法有很多種，也很容易。關鍵在於如何找到使用最少黑點的定位控制集，這也是此份作品研究的重點。

2.3 研究過程

我們從文獻中，依據[1]，CJ Colbourn,P. J. Slater, LK Stewart 已有$M_1^{LD}(P_n)$的結果，如(圖三-1)。


圖三-1

定理一[1]：$M_1^{LD}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$

在本作品中，我們從$P_2 \times P_n$開始，利用上述的研究方法嘗試尋找規律。以下皆以 D 表示$P_2 \times P_n$的 LD 集，首先我們將建構一個黑點排列的圖形，並以此得到$M_1^{LD}(P_2 \times P_n)$的一個上界。

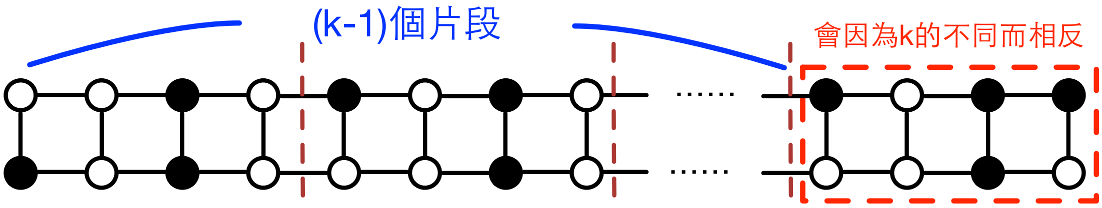
引理一：$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$

證明： 設$S = \{(1,k)：k \equiv 3,5,7(mod\ 8)\} \cup (2,k)：k \equiv 1,3,7(mod\ 8)\}$，

$$\text{並設}D\text{中黑點的排列為}\begin{cases} S,\ 假設n \equiv 1,3,5,7(mod\ 8), \\ S \cup \{(2,n)\}，假設n \equiv 0,2,4(mod\ 8), \\ S \cup \{(1,n)\}，假設n \equiv 6(mod\ 8)。\end{cases}$$

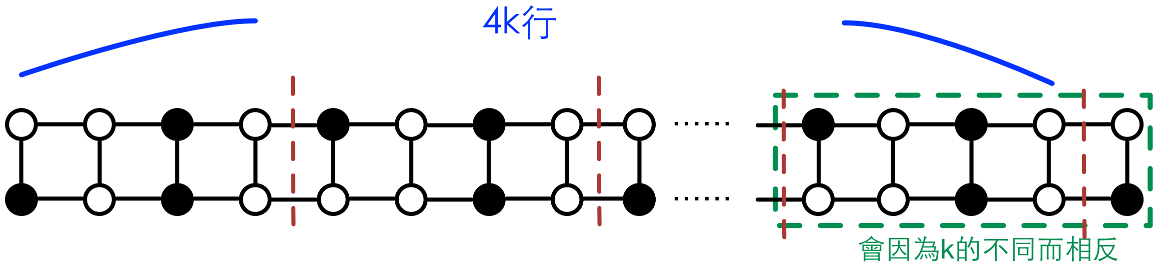
從上述 D 集的建構，我們可以將 n 分成 4k、4k+1、4k+2、以及 4k+3，如圖六-1 到圖六-4，顯然地，我們所建構的 D 集合皆屬於 LD 集，並且更進一步去計算個別的黑點個數：

1. 4k：黑點個數 $=3\times(k-1)+4=3k+1=\frac{3\times4k+4}{4}=\left\lceil\frac{3\times4k+1}{4}\right\rceil=\left\lceil\frac{3n+1}{4}\right\rceil$



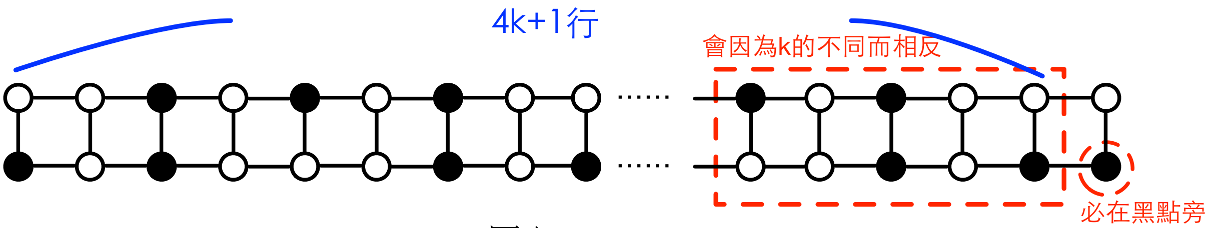
圖六-1

2. 4k+1：黑點個數 $=3k+1=\frac{3(n-1)+4}{4}=\frac{3n+1}{4}=\left\lceil\frac{3n+1}{4}\right\rceil$



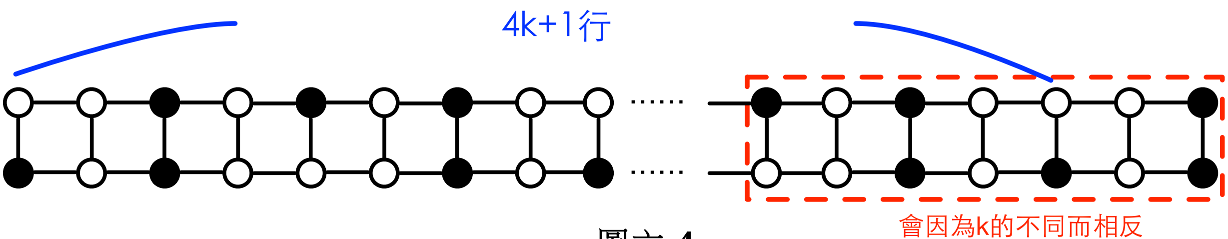
圖六-2

3. 4k+2：黑點個數 $=3k+1+1=\frac{3(n-2)+4+4}{4}=\frac{\mathbf{3n+2}}{\mathbf{4}}=\left\lceil\frac{\mathbf{3n+1}}{\mathbf{4}}\right\rceil$



圖六-3

4. 4k+3：黑點個數 $=3k+1+2=\frac{3(n-3)+4+8}{4}=\frac{\mathbf{3n+3}}{\mathbf{4}}=\left\lceil\frac{\mathbf{3n+1}}{\mathbf{4}}\right\rceil$



圖六-4

因為$M_1^{LD}(P_2 \times P_n)$是所有$P_2 \times P_n$的 LD 集中，使用最少的黑點個數，所以由以上 1~4，$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) \le \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$。

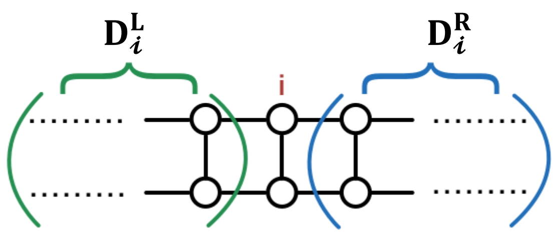
接著藉由電腦程式的幫助，我們發現這上界極有可能是$M_1^{LD}(P_2 \times P_n)$的下界，並且我們觀察到以下的代數結果。

	$n=k$	$n=k+1$	$n=k+2$	$n=k+3$	$n=k+4$
$\left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil =$	$\left\lceil \frac{3k+1}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3k+1+3}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3k+1+6}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3k+1+9}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3k+1}{4} \right\rceil + 3$

這代數結果表示說每增加四個行數，黑點個數會穩定增加 3 個。那在幾何上呢？若也如此，則$\left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$就有可能是下界值。因此若要證明下界，關鍵在於邊界四行的黑點行為，因此我們在接下來的引理中對於邊界性質作了更深入的探討，最後在引理九利用數學歸納法證明$M_1^{LD}(P_2 \times P_n)$的上界$\left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$的確也是下界。

引理二：若D是$\mathbf{P_m \times P_n}$的LD集，且第 i 行沒黑點($\boldsymbol{i \neq 1, n}$)，則$\boldsymbol{D_i^L}$是 LD 集，且$\boldsymbol{D_i^R}$亦是 LD 集；並且$|\mathrm{D}| \ge \mathbf{M_1^{LD}(P_m \times P_{i-1}) + M_1^{LD}(}\boldsymbol{P_m \times P_{n-i}}\mathbf{)}$。

證明： 因為黑點監控範圍為 1，故D_i^L的黑點無法監控到D_i^R的白點，同理，D_i^R的黑點也無法監控到D_i^L的白點，又因$P_m \times P_n$已是 LD 集，故D_i^L是 LD 集，D_i^R是 LD 集；

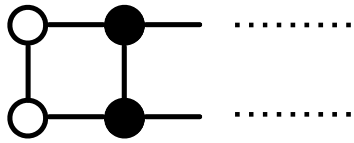


圖三-2

同時從前面的說明可以知道此$P_m \times P_n$所用最少黑點數應大於等於左、右兩邊各自所使用到黑點數的和，也就是

$\left|\mathrm{D}\right| \geq M_1^{LD}(P_m \times P_{i-1}) + M_1^{LD}(P_m \times P_{n-i})$（圖三-2）

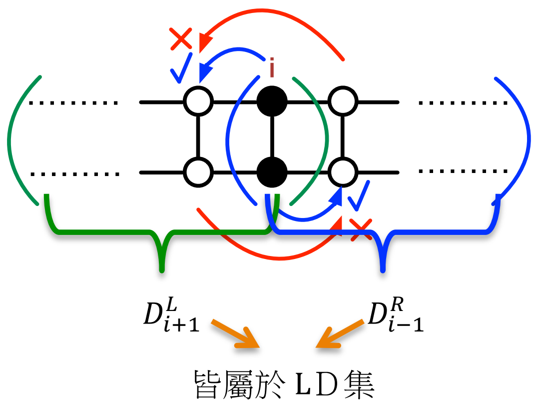
至於當 i=1 或 n，代表第 1 或 n 行沒黑點時，且在黑點監控範圍為一的前提下，則第 2 或 n-1 行必會全部都有黑點（圖三-3）；而對於第 i 行全部有黑點，則會屬於接下來引理五的部分。



圖三-3

引理三：若 D 是 $\mathbf{P_m \times P_n}$ 的 LD 集，且第 i 行的都是黑點($\mathrm{i} \neq \mathbf{1}, \boldsymbol{n}$)，則 $\boldsymbol{D_{i+1}^L}$ 是 LD 集，且 $\boldsymbol{D_{i-1}^R}$ 是 LD 集。

證明： 因為黑點監控的範圍為 1，第 i 行每一點都選，代表 D_i^L 中的白點可能會由第 i 行監控到，但不會由第 i+1 行監控到。又因 $P_m \times P_n$ 已是 LD 集，故 D_{i+1}^L 是 LD 集，同理，D_i^R 的白點可能會由第 i 行監控到，但不會由第 i-1 行監控到，故 D_{i-1}^R 是 LD 集。(如圖三-4)

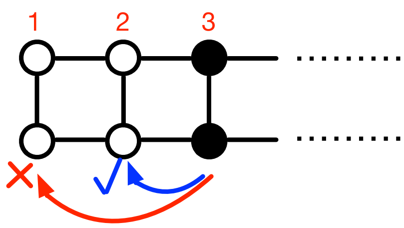


圖三-4

至於 i=1 或 n，則 i+1 或 i-1 並不存在，意義等同整個 $P_m \times P_n$ 屬於 LD 集。

引理四：若 D 是 $\boldsymbol{P_2 \times P_n}$ 的 LD 集($\boldsymbol{n} \geq \mathbf{5}$)，則不管黑點總數有多少，邊界兩行中至少有一個黑點；且當只有一個黑點時，第三行必有兩個黑點。

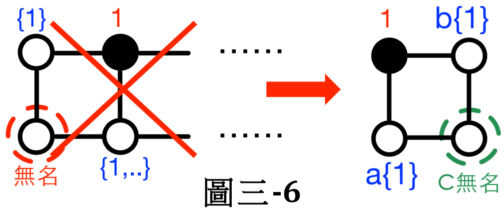
證明： 假設邊界兩行沒有黑點，代表這兩行的白點由第三行以後監控，但黑點的監控範圍僅有 1，就算第三行有黑點，第一行仍無黑點監控(如圖三-5)；故



圖三-5

邊界兩行至少有一黑點。

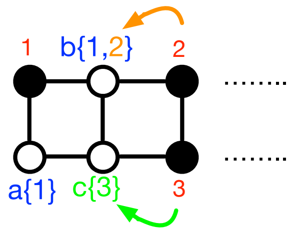
另外，當這邊界兩行只有一個黑點時，假設此點在第二行，第一行的白點會無黑點監控，故此點必在第一行。(如圖三-6)



圖三-6

所以當邊界兩行只有一個黑點時，此黑點必在第一行。

從圖三-3 中， a、b 原本同名，且 c 原無黑點監控。若要 a、b 不同名且有黑點監控 d，第三行勢必要有兩黑點(2、3)。(如圖三-7)



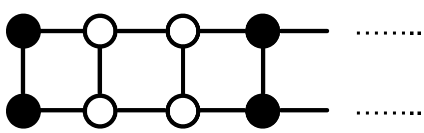
圖三-7

引理五：若D是$P_2 \times P_n$的LD集$(n \geq 5)$，則不管黑點總數有多少，邊界三行至少有兩個黑點；且當邊界三行只有兩個黑點時，第四行恰兩個黑點。

證明： 假設邊界三行只有一個黑點，根據引理四，此黑點必在邊界兩行，但是當邊界兩行只有一個黑點時，第三行必有兩個黑點，此與假設矛盾，故邊界三行至少有兩個黑點。

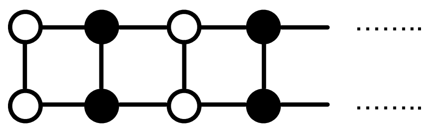
又當邊界三行只有兩個黑點，假設邊界兩行恰一個黑點，則根據引理四，第三行必有兩黑點，此時邊界三行就有三個黑點，矛盾。所以此兩黑點皆在邊界兩行。我們再加以分析，僅有以下三種情況：

1. 第三行需要靠第四行的黑點監控，因此第四行要有兩個黑點。(如圖四-1)



圖四-1

2. 此兩點左右的白點同名，第三行的白點還需要

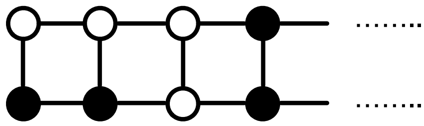


圖四-2

第四行來監控，因此同樣第四行要有兩個黑點

（如圖四-2）

3. 第二行黑點周圍兩個白點同名，故在同列的第四行加上一黑點；且第三行的其中一白點無名，所以第四行又得加上一黑點。（如圖四-3）



圖四-3

根據1、2、3，所以當邊界三行只有兩個黑點時，第四行有兩個黑點得證。

引理六：若D是$P_2 \times P_n$的LD集($n \geq 5$)，則不管黑點總數有多少，邊界四行至少有三個黑點；且當邊界四行恰三個黑點時，第四行沒有黑點。

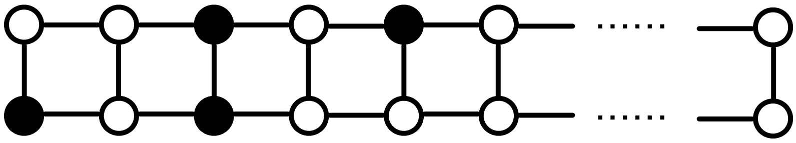
證明： 假設邊界四行只有兩個黑點，根據引理五，此兩點必在邊界三行，又當邊界三行只有兩個黑點時，第四行有兩個黑點，這與假設矛盾；故邊界四行至少有三點成立。

若當邊界四行恰三個黑點時，假設邊界三行只有兩個黑點，則根據引理五，第四行必有兩黑點，這樣邊界四行就有四個黑點，與假設矛盾。因此當邊界四行恰三個黑點時，此三個黑點必皆在邊界三行，也表示第四行無黑點。

引理七：若D是$P_2 \times P_n$的LD集($n \geq 5$)，當邊界四行恰有四個黑點時，存在新的黑點排列D'使得(1) D'是$P_2 \times P_n$的LD集 (2) $|D'| \leq |D|$ (3)D'邊界四行只有三個黑點，且第四行沒有黑點。

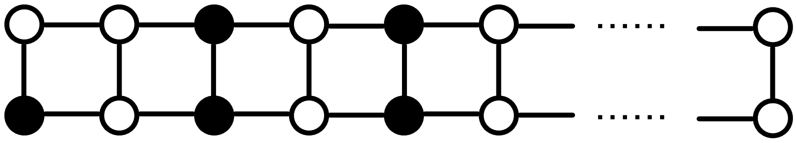
證明：首先依照D第五行黑點數，將D邊界四行四個黑點重新安排在邊界五行形成D'，如圖五-1以及圖五-2，可以確定的是$|D'| \leq |D|$，且D'邊界四行恰三個黑點，以及第四行沒有黑點。

1.D 第五行零黑點時，可以將 D 的邊界四行四個黑點重新安排成D′如圖五-1



圖五-1

2.D 第五行一或二黑點，可以將D的邊界四行四個黑點重新安排成D′如圖五-1

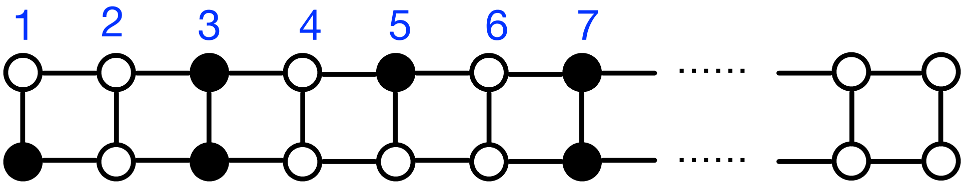


圖五-2

為證明D′仍是 LD 集，依照 D 第五行黑點數分成三種情形：

(1)第五行無黑點（D′為圖五-1）：因為D是LD集且第五行無黑點，藉由引理二，D_5^R是LD集。從圖五-1，已知D'^L_4是LD集。接著為了證明D'^R_4是LD集，我們以D第六行的黑點放置情形分成：

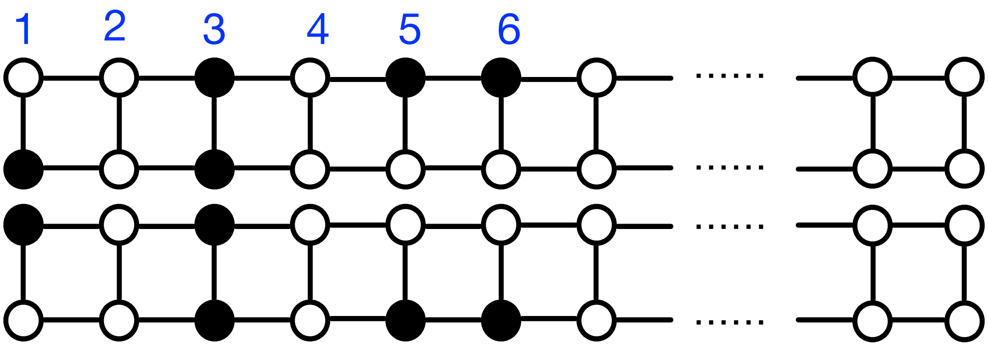
a.第六行無黑點：因為D是LD集，又第五、六行無黑點，所以第七行必有兩個黑點，故D′如下圖。



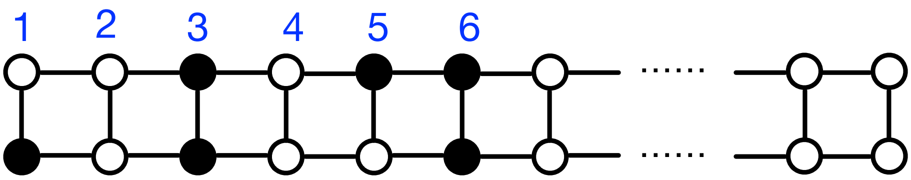
顯然地，D′是 LD 集。

b.第六行有黑點：如以下三圖。只要第五行的黑點放第六行的黑點旁邊，則D′必為 LD 集。

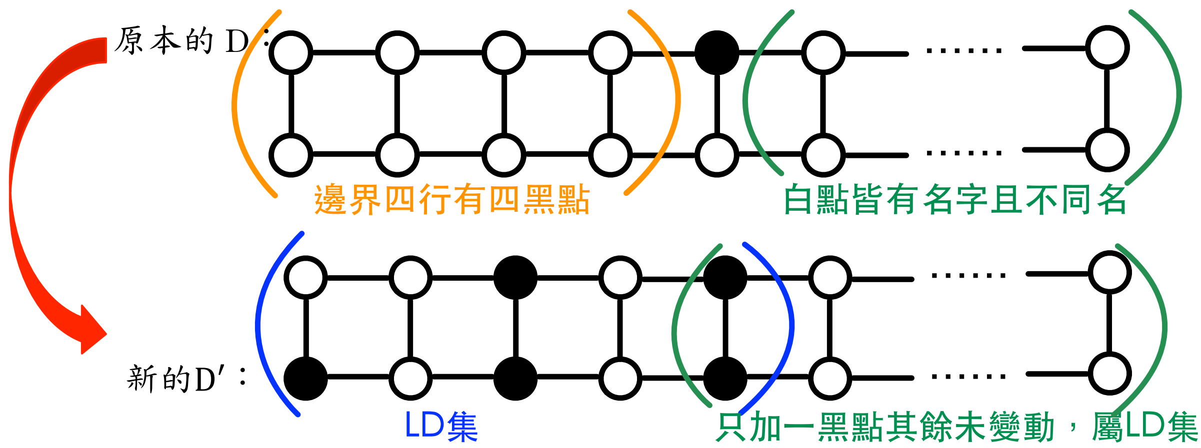
第六行一黑點



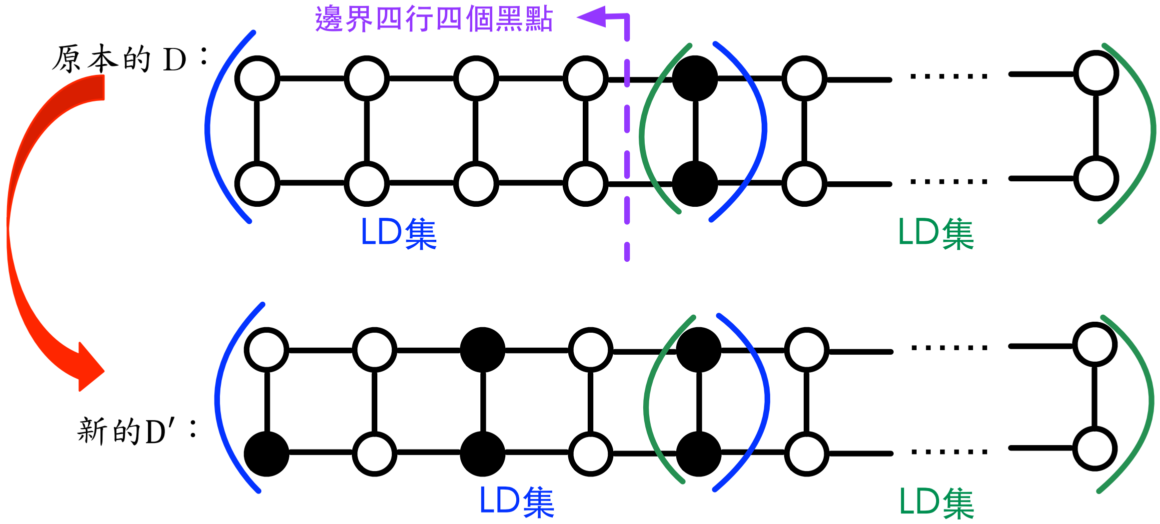
第六行兩黑點



(3) 第五行一黑點(D'為圖五-2)：從圖五-2，在D'第五行多加的黑點只會影響到其左右兩邊的點。從圖五-2 已知第五行左邊的白點皆有不同名字，又因為 D 是 LD 集，第五行新的黑點右邊的點若是白點，則此點在其名字集合中多加一新元素並不會使其與其他白點有重名的現象。根據上述，D'為 LD 集。



(3)第五行兩黑點(D'為圖五-2)：依據引理三，D_4^R為 LD 集，也就等同$D_4'^R$為 LD 集，又從圖五-2，D_6^L的白點皆不同名，故D'為 LD 集。



引理八：若D是$P_2 \times P_n$的LD集($n \geq 5$)，皆存在黑點排列D'，

使得(1) D'是$P_2 \times P_n$的LD集

(2) $|\mathbf{D}'| \le |\mathbf{D}|$

(3)$\mathbf{D}'$邊界四行只有三個黑點，且第四行沒有黑點。

證明：以 D 邊界四行黑點數分為三種情形：

1. 邊界四行恰三個黑點：根據引理六，此時令$\mathrm{D}' = \mathrm{D}$。
2. 邊界四行恰四個黑點：根據引理七，此時存在D'，使得(1)、(2)、(3)成立。
3. 邊界四行至少五個黑點：此時可以利用引理七重新安排黑點排列的方法，可找到D'，使得(1)、(2)、(3)成立。

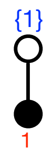
根據上述三點，引理八成立。

引理九：$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) \ge \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$

證明：若D是$P_2 \times P_n$的 LD 集，則根據引理八，對於任何 D 皆存在新的 LD 集D'，使得$|\mathrm{D}'| \le |\mathrm{D}|$。又因為$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) = min\{|D| \mid D\text{是}\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_\mathrm{n}\text{的 LD 集}\}$，所以$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) = min\{|D| \mid D\text{是}\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_\mathrm{n}\text{的 LD 集}\} = min\{|D'| \mid D'\text{是}\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_\mathrm{n}\text{的 LD 集}\}$。

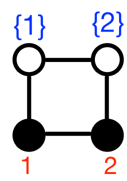
接著我們以數學歸納法證明$|D'| \ge \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$：

1. 當 n=1 時，$M_1^{LD}(P_2 \times P_1) \ge \left\lceil \frac{3\times1+1}{4} \right\rceil = 1$成立：如圖七-1。



圖七-1

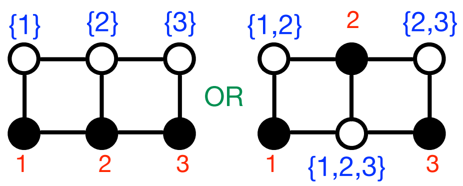
2. 當 n=2 時，$M_1^{LD}(P_2 \times P_2) \ge \left\lceil \frac{3\times2+1}{4} \right\rceil = 2$成立：若只用一個黑點，會有兩白點同名且一點無名字，故必須使用兩黑點，如圖七-2。



圖七-2

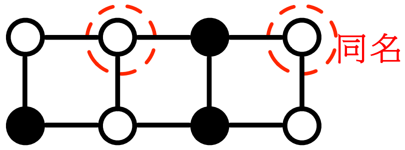
3. 當 n=3 時，$M_1^{LD}(P_2 \times P_3) \ge \left\lceil \frac{3\times3+1}{4} \right\rceil = 3$成立：

   利用窮舉法以及邏輯推論，$M_1^{LD}(P_2 \times P_3) \ge 3$，如圖七-3。



圖七-3

4. 當 n=4 時，$M_1^{LD}(P_2 \times P_4) \geq \left\lceil \frac{3\times4+1}{4} \right\rceil = 4$成立：同樣利用窮舉法以及邏輯推理，可以得到 $M_1^{LD}(P_2 \times P_4)$至少為四，例如圖七-6 為其中一種排法。



圖七-4

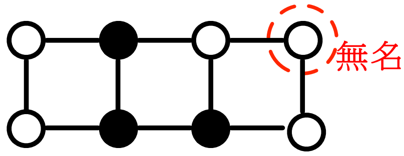


圖 七-5

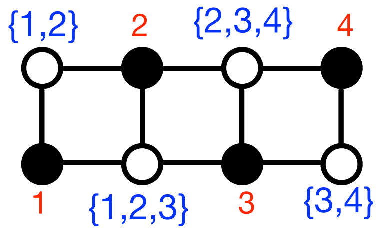
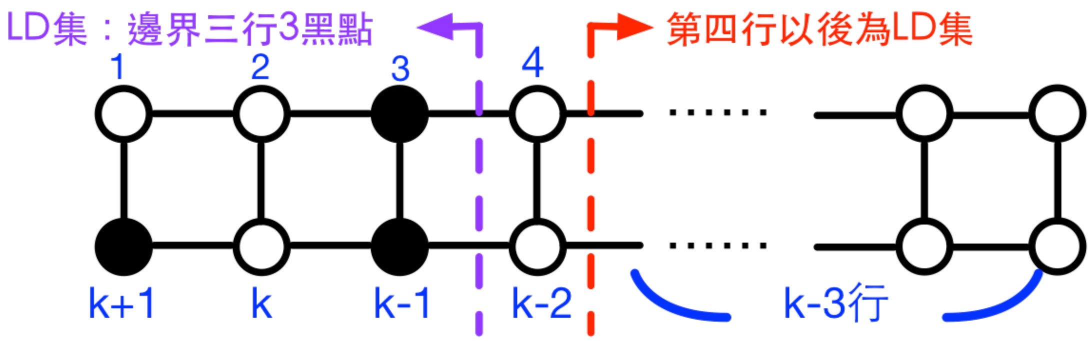


圖 七-6

6. 假設$|D'| \geq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$的結果在$n \leq k$成立，則當 n =k+1 時：

根據引理八，D′邊界四行只有三個黑點，且第四行沒有黑點，因此利用引理二以及數學歸納法，



$|D'| \geq \mathrm{M_1^{LD}}(\mathrm{P_2 \times P_3}) + \mathrm{M_1^{LD}}(P_2 \times P_{n-4}) = 3 + \left\lceil \frac{3(k-3)+1}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{3(k-3)+1+12}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{3(k+1)+1}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$。$|D'| \geq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$的結果在$n = k+1$時亦成立。

故根據數學歸納法，$|D'| \geq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$對所有 n ∈ N 皆成立，

所以 $M_1^{LD}(P_2 \times P_n) = min\{|D| \mid D$是$\mathrm{P_2 \times P_n}$的 LD 集$\}$

$= min\{|D'| \mid D'$是$\mathrm{P_2 \times P_n}$的 LD 集$\} \geq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$。

定理二：$\boldsymbol{M_1^{LD}(P_2 \times P_n) = \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil}$

證明：將引理一$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) \le \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$與引理九$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) \ge \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$合併，可以得到

$M_1^{LD}(P_2 \times P_n) = \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$成立。

現在我們想要把結果推廣到$P_3 \times P_n$，此時我們把$P_3 \times P_n$當作 D。首先我們一樣先在$P_3 \times P_n$上建構一個 LD 集，自然而然地得到一個$M_1^{LD}(P_3 \times P_n)$的上界，並且我們利用數學歸納法證明這個上界值同時也是$M_1^{LD}(P_3 \times P_n)$的下界。

引理十：$\boldsymbol{M_1^{LD}(P_3 \times P_n) \le n+1}$

證明：令$S_1 = \{(h,k): h = 1,3 \text{ 且} k \equiv 1(mod\ 3)\} \cup \{(1,k): k \equiv 2(mod\ 3)\}$

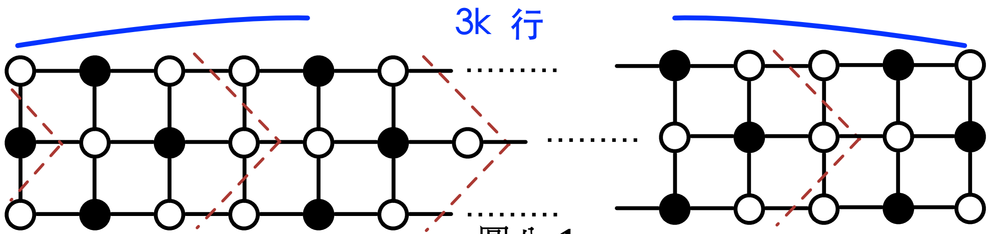
，$S_2 = \{(h,k): h = 1,3 \text{ 且} k \equiv 2(mod\ 3)\} \cup \{(1,k): k \equiv 0(mod\ 3)\}$。

並設 D 中黑點的排列為$\begin{cases} S_1, \textit{假設} n \equiv 1,2(mod\ 3), \\ S_2 \cup \{(2,1)\}, \textit{假設} n \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$。

將 n 分為 3k、3k+1、3k+2，如圖八-1 到 3，顯然地，我們所建構的集合 D 為 LD 集，並且更進一步去計算個別的黑點個數：

1. 3k：如圖九-1，我們可以算出$M_1^{LD}(P_3 \times P_n)$對於 n=3k 時的上限：

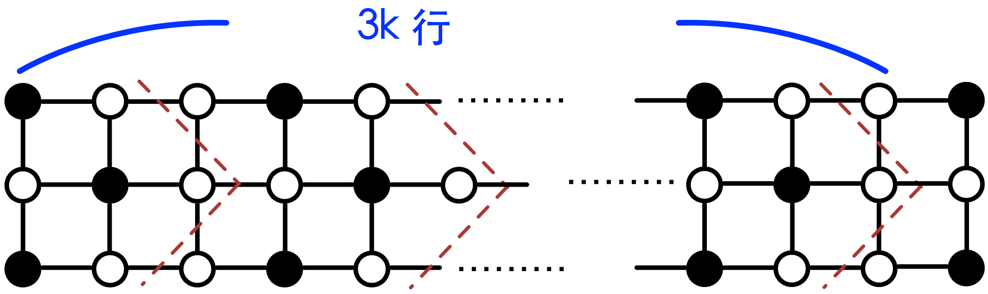
$$\text{黑點個數} = \frac{3k}{3} \times 3 + 1(\text{第一行中間黑點}) = 3k + 1 = n + 1。$$



圖八-**1**

2. 3k+1：如圖九-2，n=3k+1：

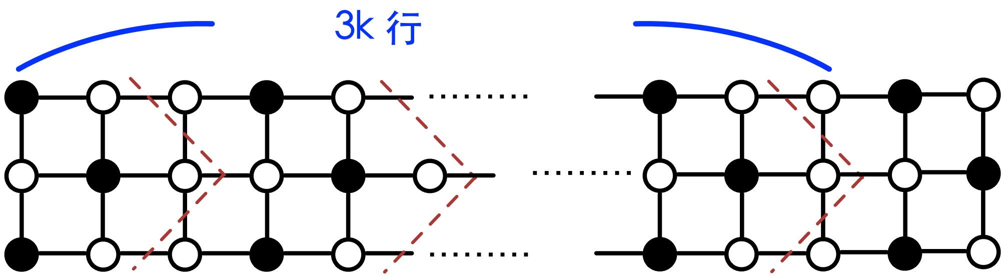
$$\text{黑點個數} = \frac{3k}{3} \times 3 + 2 = 3k + 2 = (3k+1) + 1 = n + 1。$$



圖八-2

3.　3k+2：如圖九-3，n=3k+2：

$$黑點個數=\frac{3k}{3}\times 3+3=3k+3=(3k+2)+1=n+1$$



圖八-3

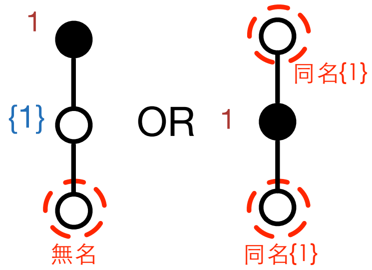
根據前述 1~3，$M_1^{LD}(P_3\times P_n)\leq n+1$成立。

事實上，我們也可以用研究$P_2\times P_n$邊界性質的方法來證明定理三。但我們發現$P_3\times P_n$的上界值 n+1 只與行數 n 只差 1，這個結果很特殊。所以我們用另一個更簡潔有力的證明方式證明定理三。

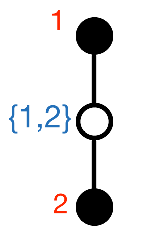
引理十一：$M_1^{LD}(P_3\times P_n)\geq n+1$

證明：利用數學歸納法證明：

1.　當 n=1 時，若只用一黑點，則不管放哪，皆無法形成 LD 集（如圖九-1）。故必須要兩個黑點（如圖九-2），所以$M_1^{LD}(P_3\times P_1)\geq 2$。



圖九-1



圖九-2

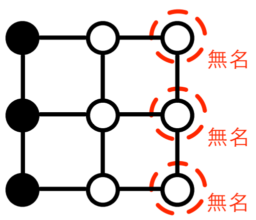
2. 當 n=2 時， $M_1^{LD}(P_3{\times}P_2)= M_1^{LD}(P_2{\times}P_3)$，且依照定理二，$M_1^{LD}(P_3{\times}P_2) = \left\lceil\frac{3\times3+1}{4}\right\rceil = \left\lceil\frac{10}{4}\right\rceil = 3$。

3. 當 n=3 時，若只用到三個黑點，則：

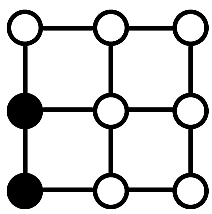
(1)有一行 3 個黑點：如圖九-3，無法達到定位控制。

(2)有一行 2 個黑點：如圖九-4，第三個點不管放哪，都無法達到定位控制。

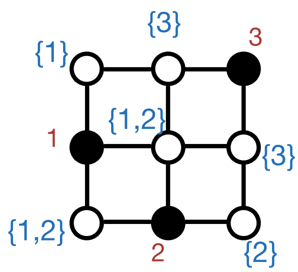
(2)每一行 1 個黑點：如圖九-5，無法達到 LD 集。



圖九-3



圖九-4



圖九-5

綜合(1)、(2)及(3)，所以黑點個數至少要 3 個，故 $M_1^{LD}(P_3{\times}P_3) \geq 4$。

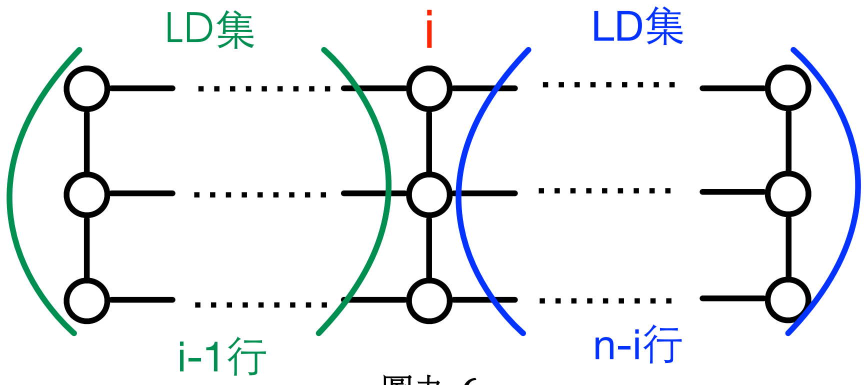
4. 假設在$n \leq k$時$M_1^{LD}(P_3{\times}P_n) \geq n+1$皆成立，而當 n=k+1 時，D 是$P_3{\times}P_n$的 LD 集：

(1)假設 D 的第 i 行$(i \neq 1, n)$沒黑點，則根據數學歸納法的前提，

$|D_i^L| \geq (i-1)+1$，$|D_i^R| \geq (n-i)+1$，利用引理二，

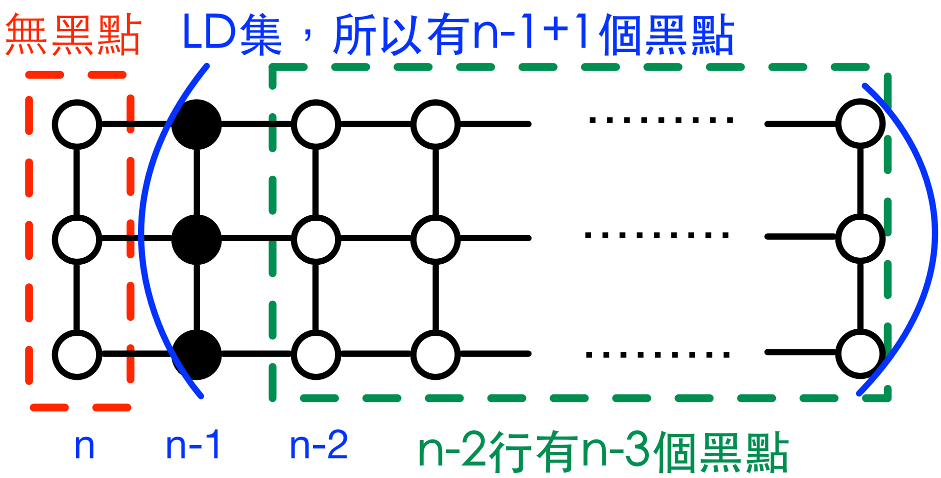
$|D| \geq |D_i^L| + |D_i^R| \geq (i-1)+1+(n-i)+1 \geq n+1$。 （如圖九-6）

所以$M_1^{LD}(P_3 \times P_n) = min\{|D| \mid D$是$\mathrm{P_3 \times P_n}$的 LD 集$\} \geq n+1$。



圖九-6

(2)若第一行無黑點，代表第二行全都有黑點，所以可以利用引理三，D_1^R是 LD 集，又根據數學歸納法的假設，我們可以有$M_1^{LD}(P_3 \times P_{n-1}) \geq n$。事實上，結合引理十，我們可以有$M_1^{LD}(P_3 \times P_{n-1})$=n。再扣掉第二行的 3 個黑點，$D_2^R$有 n-3 個黑點監控，也就是前 n-2 行只用到 n-3 個黑點，如圖九-7，再依據鴿籠原理，後 n-2 行必有一行無黑點，此時我們可以利用上述 1 的結果，得到$M_1^{LD}(P_3 \times P_n) \geq n+1$。

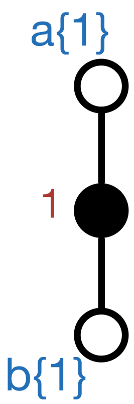


圖九-7

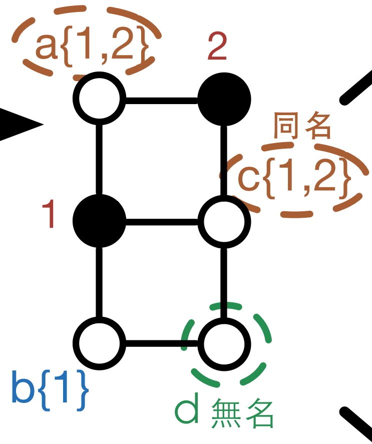
(3)假設每一行都只有一黑點，則無法達成 LD 集，也就是說$|D| \neq n \Longrightarrow |D| \geq n+1$，所以$M_1^{LD}(P_3 \times P_n) \geq n+1$：

i.假設第一行的黑點在中間列（如圖九-8），因為 a 與 b 同名，故第二行的黑點需要放在上或下列（如圖九-9），a 與 c 同名，d 沒有名字，所以第三行

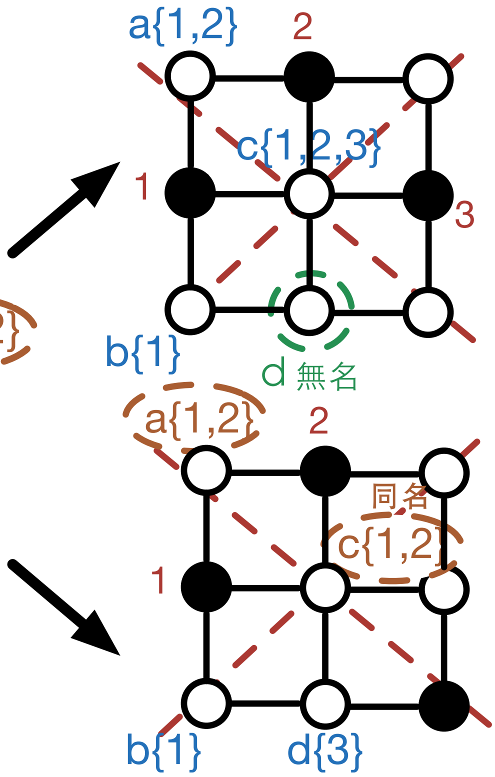
不管放哪裡是無法達成前兩個需求的(如圖九-10),故無法達成定位控制。



圖九-8

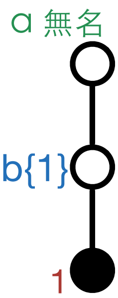


圖九-9

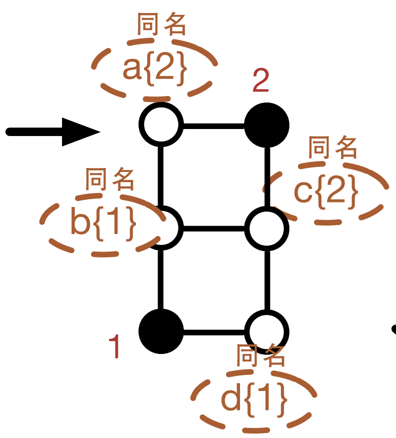


圖九-10

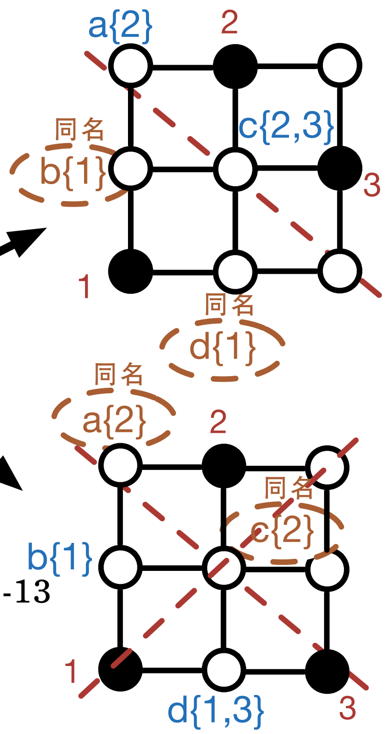
ii.假設第一行的黑點在上或下列(如圖九-11),因為 a 無名,第二排的黑點須加在 b 或 a 的隔壁(如圖九-12),又 a、c 同名,b、d 同名,故第三行的黑點放哪一列都是無法達到定位控制的(如圖九-13)。



圖九-11



圖九-12



圖九-13

總結 i.與 ii.，每一行都只有一黑點是不可能形成 LD 集。

由(1),(2),(3)，$M_1^{LD}(P_3\times P_n)\geq n+1$在 n=k+1 亦成立。

依據前述的 1~4 以及數學歸納法，$M_1^{LD}(P_3\times P_n)\geq n+1$成立。

定理三：$M_1^{LD}(P_3\times P_n)=n+1$

證明：將引理十$M_1^{LD}(P_3\times P_n)\leq n+1$與引理十一 $M_1^{LD}(P_3\times P_n)\geq n+1$合併，可以得到

$M_1^{LD}(P_3\times P_n)=n+1$成立。

對於$P_4\times P_n$，我們也建構出一個具有週期性的黑點排列並找到一個上界，然而對於下界還在努力中。

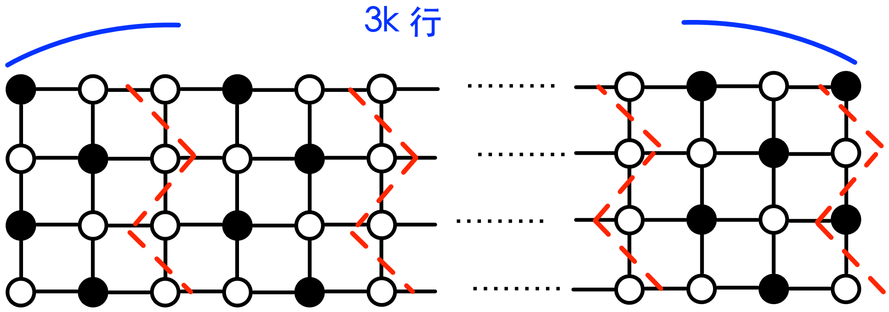
定理四：$\boldsymbol{M_1^{LD}(P_4\times P_n)\leq\left\lfloor\frac{4n}{3}\right\rfloor+2}$

證明：設$S=\{(h,k):h=1,3\ 且 k\equiv 1(mod\ 3)\}\cup\{(h,k):h=2,4 且 k\equiv 2(mod\ 3)\}$

並令D中黑點排列為$\begin{cases} S\cup\{(1,n),(3,n)\}, 假設 n\equiv 0(mod\ 3), \\ S\cup\{(4,n)\}, 假設 n\equiv 1(mod\ 3), \\ S, 假設 n\equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$

接著將D繪製成圖形如圖十-1到圖十-3；顯然地，我們所建構的集合D為LD集，由n分為3k、3k+1、3k+2，並且更進一步去計算個別的黑點個數：

1. 3k：黑點個數=$4k+2=\frac{4(3k)+6}{3}=\left\lfloor\frac{4n}{3}\right\rfloor+2$。

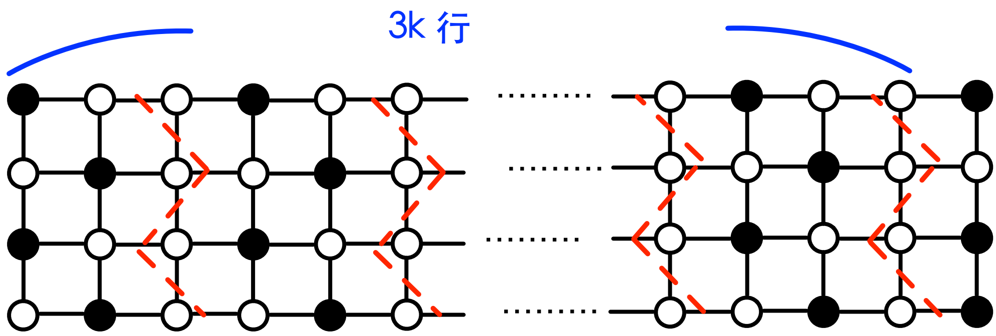


2. 3k+1：

黑點個

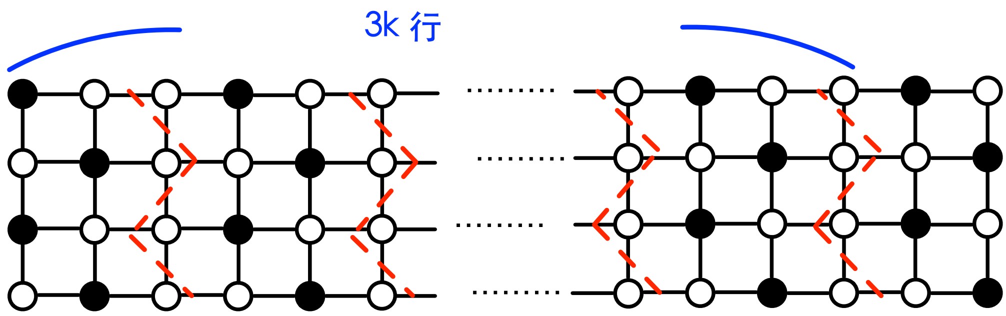
圖十-1

數$=4k+3=\left\lfloor\frac{4(3k+1)}{3}\right\rfloor+2=\left\lfloor\frac{4n}{3}\right\rfloor+2$。



圖十-2

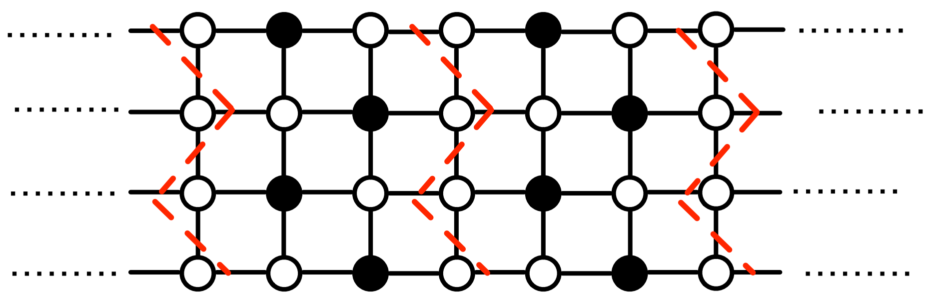
3. 3k+2：黑點個數$=4k+4=\left\lfloor\frac{4(3k+2)}{3}\right\rfloor+2=\left\lfloor\frac{4n}{3}\right\rfloor+2$



圖十-3

2.4 未來展望

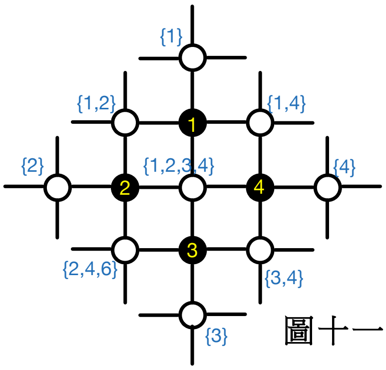
對於更大範圍的$M_1^{LD}(P_m \times P_n)$我們仍在研究中，然而尚未有明確的結果出來，但我們可以利用多個片段初步地判斷$M_1^{LD}(P_m \times P_n)$的上限，例如$M_1^{LD}(P_4 \times P_n)$：我們在定理四計算$M_1^{LD}(P_4 \times P_n)$的一個上限：$\left\lfloor\frac{4}{3}n\right\rfloor+2$，如圖十一-1，而針對困難的下限將是未來研究的首要重點。

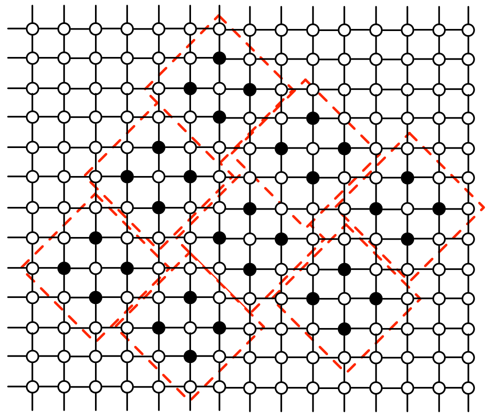


圖十一-1

並且我們利用黑點與圖的比例粗略地先行找出大範圍的$M_1^{LD}(P_m \times P_n)$有可能的上限：

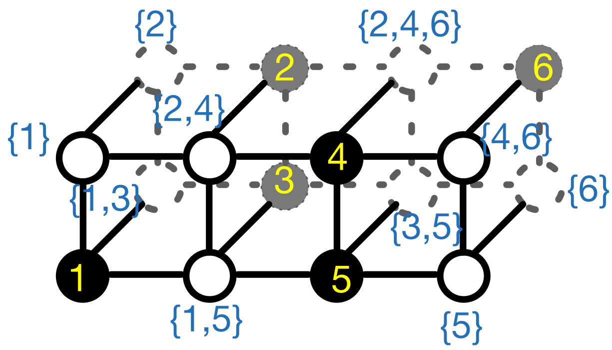
我們利用圖十一-2 的片段延伸，以黑點的比例計算：黑點所占的比例：$\frac{4}{13}$。





圖十一-2

除此之外，我們也嘗試使用立體圖形去觀察$\mathbf{M_1^{LD}}(\boldsymbol{P_x \times P_y \times P_z})$的規則，在此列出一個$\boldsymbol{M_1^{LD}}(\boldsymbol{P_2 \times P_2 \times P_n})$的例子(如圖十一-3)，這將會當作未來發展的其中一個重點。



圖十一-3

2.5 研究結果與結論

經過討論與分析，我們得到並驗證：

1. $\boldsymbol{M_1^{LD}(P_2 \times P_n) = \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil}$

2. $\boldsymbol{M_1^{LD}(P_3 \times P_n) = n + 1}$

3. $\boldsymbol{M_1^{LD}(P_4 \times P_n) \leq \left\lfloor \frac{4}{3} n \right\rfloor + 2}$

2.6 參考資料及其他

1. P. J. Slater, (1988).Dominating and reference sets in a graph, J. Math. Phys. Sci., 22, 445 – 455.

2. I. Honkala, T. Laihonen,(2006). On locating-dominating sets in infinite grids, European J. Combin., 27 (2), 218-227.

3. G. Exoo, V. Junnila, T. Laihonen, (2011).Locating-dominating codes in cycles, Australas. J. Combin.,49 , 177 – 194.

4.林筱芸(2014)。路徑 r-局部控制碼之研究。中山大學應用數學所 碩士論文。

5.林亮妤,陳柳君(2014)。無「鎖」不在—最少監視點。第 54 屆全國中小學科展。