猜拳進化論—其所需行動次數的探討

台北市立建國高級中學 楊紹弘
指導老師 林穎志

Abstract

This study is about a game called "Mora Evolution". With different numbers of people and levels, how many actions it will take is what we focus on. In the game, every two people in each level play Mora. The winning one evolves to the next level. There are two ways for the losing one, stay in the same level (no degenerating case) or degenerate to the previous level (degenerating case). Thus, we investigate separately.

First we use Recursive Series to describe the process of the game. When the numbers of people in a level are odd, one person doesn't play Mora. No matter the numbers of people in a level are odd or even, we use ceiling function and floor function to describe the situations. Then we make another series that ceiling function and floor function is removed. By comparing the two series, we can roughly calculate the number of actions the game takes.

The conclusion now is that in the three levels and no degenerating case, we can restrict the number of actions to one or two values. When the level is more or considering degenerating case, we can only find the number of actions lie in a certain range.

中文摘要

本研究主要探討「猜拳進化論」這個遊戲，考慮在不同的參與人數及不同的級別數之情形下，從遊戲 開始到結束所需的總行動次數。在遊戲進行中，同一級別的人兩兩配成對互相猜拳，猜贏的人進化至下一級別，而猜輸的人有兩種處理方式，可以做不同的探討，其一是維持在原級別（即不須退化），其二是退化成上一級別（即須退化）。

首先利用一組遞迴數列來描述各級別的人數，當某一級別的人數為奇數時，會有一個人不須猜拳，所以數列的表示法中會有天花板符號及地板符號，因此增加了探討數列一般項的困難度。在研究過程中是先 將天花板符號及地板符號從表示法中移除， 探討另一組較簡單的遞迴數列，然後處理這兩組數列的差距，進而了解原本數列的一般項。

目前的結果在級別數是三且不須退化的情形下，已能將總行動次數確定是某一個值或某兩個值， 但是在級別數大於三或須退化的情形下，只能得到總行動次數會落在某一個範圍內，無法得到精確的值。

1 簡介

1.1 研究動機

本研究始於一次生命教育課時，所參與的遊戲，其規則如下：

1. 遊戲中分為若干個級別（遊戲進行中級別數為固定），這些級別有高低之分。
2. 遊戲開始時所有人都屬於最低級別。
3. 所有屬於最高級別的人皆不須再猜拳，而其餘屬於相同級別（非最高級別）的人兩兩配成對互相猜拳,贏的人進化變成下一級別，輸的人就停留在原級別（當某一級別中的總人數為奇數時有一人不必猜拳）。
4. 繼續重複規則 3，直到除了最高級別外的所有級別都只剩一人就停止猜拳。

在參與的過程中，我對於達到遊戲終止（即規則 4 ）須經過幾次行動感到好奇，於是便開始了此次研究。

1.2 研究目的

1. 希望能推算出在不同的總人數 n 及總級別數 r 下，達到遊戲終止狀態所需的行動次數，並以 $f(n,r)$ 表示之。
2. 希望改變部分遊戲規則，並得到在不同的總人數 n 及總級別數 r 下，達到遊戲終止狀態所需的行動次數。

1.3 名詞定義

1. 總人數為 n 人，總級別數為 r 層，並規定總人數須大於總級別數，且總級別數須至少為 2 ，即 $n \geq r \geq 2$ 。 $(n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N})$
2. 定義第 1 層為最低級別，第 r 層為最高級別，其間層級依序排列。
3. 一次行動定義為依照規則 3 能猜拳的所有人皆猜拳一次。
4. 將在總人數 n 人下， k 次行動後，第 l 層的人數以 $h_n(l,k)$ 表示，其中 $h_n(l,0)$ 定義為初始狀態人數，即 $h_n(1,0) = n$ ， $h_n(2,0) = h_n(3,0) = \cdots = h_n(r,0) = 0$ ，特別地，當探討同一個 n 的狀況時，簡化符號以 $h_n(l,k)$ 表示。

   $(1 \leq l \leq r,\ h_n(l,k) \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$
5. 當 $h_n(r,\tilde{k}) = n-r+1,\ h_n(r-1,\tilde{k}) = h_n(r-2,\tilde{k}) = \cdots = h_n(1,\tilde{k}) = 1$ 時，此時無法再進行任何猜拳，即遊戲終止，將最小的正整數 $\tilde{k}$ 定義為總行動次數，並以 $f(n,r)$ 表示 $(f(n,r) \in \mathbb{N})$ ，即 $f(n,r) = \min\{k | h_n(r,k) = n-r+1,\ h_n(r-1,k) = h_n(r-2,k) = \cdots = h_n(1,k) = 1,\ k \in \mathbb{N}\}$ 。
6. 若將 1.1 研究動機遊戲規則 3 中的「輸的人就停留在原級別」更改為「輸的人須下降一個級別，而若已在最下層級別則不必下降」，在這樣的狀況下 總行動次數以 $g(n,r)$ 表示。 $(g(n,r) \in \mathbb{N})$

   如： $f(5,3) = 4$ ，

k	0	1	2	3	4
$h_5(3,k)$	0	0	1	2	3
$h_5(2,k)$	0	2	2	2	1
$h_5(1,k)$	5	3	2	1	1

   ，

   $g(5,3) = 7$ ，

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_5(3,k)$	0	0	1	1	2	2	3	3
$h_5(2,k)$	0	2	1	2	1	2	0	1
$h_5(1,k)$	5	3	3	2	2	1	2	1

   。
7. 天花板符號 $\lceil x \rceil$ 為不小於 x 的最小整數；地板符號 $\lfloor x \rfloor$ 為不大於 x 的最大整數。

1.4 主要結果

定理 1.

$$f(n,2)=\lceil \log_2 n \rceil \text{ 。}$$

定理 5.

$$\hat{f}(n,3)-2 \le f(n,3) \le \hat{f}(n,3)+1 \text{ ，其中 } \hat{f}(n,3)=\min\left\{k \,\middle|\, \frac{k}{2^k} \le 1,\ k \in \mathbb{N}\right\} \text{ 。}$$

定理 8.
令 $x=\lceil \log_2 n \rceil,\ s=\left\lceil \frac{nx}{2^x} \right\rceil$ ，

$$f(n,3)=\begin{cases} x+\lfloor \log_2 s \rfloor \text{ 或 } x+\lfloor \log_2 s \rfloor+1 & \text{，若 } s=2^t,\ t \in \mathbb{N} \\ & \text{或 } s=2^t+1,\ t \in \mathbb{N}, s-1<\frac{x}{2^x}\times n<s-\frac{1}{2} \\ x+\lfloor \log_2 s \rfloor+1 & \text{，對於其他情況。} \end{cases}$$

定理 10.

$$f(n,3)=2^t+t \text{ ，當 } 2^{2^t-1}+1 \le n \le 2^{2^t} \text{ ，其中 } t \in \mathbb{N} \text{ 。}$$

定理 15.

$$f(n,r)=\begin{cases} \lceil \log_2(\lceil y \rceil+i) \rceil \text{ ，其中 } 2-r \le i \le r-2 \text{ ， } i \in \mathbb{Z} \text{ ，若 } \lceil y \rceil-1<y<\lceil y \rceil-\frac{1}{2} \text{ ；} \\ \lceil \log_2(\lceil y \rceil+i) \rceil \text{ ，其中 } 3-r \le i \le r-2 \text{ ， } i \in \mathbb{Z} \text{ ，若 } \lceil y \rceil-\frac{1}{2}<y<\lceil y \rceil \text{ 。} \end{cases}$$

其中 $x=f(n,r-1),\ y=\frac{1}{2^x}\times\frac{1}{(r-2)!}\times x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+3)\times n$ 。

定理 17.

$$g(n,2)=\lceil \log_2 n \rceil$$

定理 25.

$$\hat{g}(n,3)-8 \le g(n,3) \le \hat{g}(n,3)+8 \text{ 若 } n \ge 12,$$

其中

$$\hat{g}(n,3)=\min\left\{k \,\middle|\, \frac{F_{k+1}}{2^k}\times n \le 1,\ k \in \mathbb{N}\right\}+1,\ F_{l+2}=F_l+F_{l+1},\ F_0=0, F_1=1 \text{ 。}$$

定理 26.

$$g(n,3) \ge \min\left\{k \,\middle|\, \frac{F_k}{2^k}>\frac{21}{16n},\ k \in \mathbb{N}\right\}+1,\ \text{其中 } F_{l+2}=F_l+F_{l+1},\ F_0=0, F_1=1$$

定理 28.

$$8+\min\left\{k \,\middle|\, \left(\frac{11}{15}\right)^k \le \frac{5}{n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor},\ k \in \mathbb{N}\right\} \le g(n,3) \le 8+\max\left\{k \,\middle|\, \left(\frac{11}{12}\right)^k \ge \frac{5}{n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

2　研究過程

2.1　天花板符號、地板符號基本性質

性質 1.

$$\left\lceil \frac{q}{p} - t \right\rceil = \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N},\ 0 \le t < \frac{1}{p}$ 。

證明.

若不成立，則必存在整數 m 滿足 $\frac{q}{p} - t \le m < \frac{q}{p}$ ，使得 $\left\lceil \frac{q}{p} - t \right\rceil = m,\ \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil = m + 1$ ，即 $q - 1 < q - pt \le pm < q$ ，顯然矛盾（因在連續整數 $q - 1$ 和 q 之間不存在整數 pm ），故原命題成立。 □

性質 2.

$$\left\lfloor \frac{q}{p} + t \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N},\ 0 \le t < \frac{1}{p}$ 。

證明.

若不成立，則必存在整數 m 滿足 $\frac{q}{p} \le m < \frac{q}{p} + t$ ，使得 $\left\lfloor \frac{q}{p} + t \right\rfloor = m,\ \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor = m - 1$ ，即 $q < pm \le q + pt < q + 1$ ，顯然矛盾（因在連續整數 q 和 $q + 1$ 之間不存在整數 pm ），故原命題成立。 □

性質 3.

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{2^t} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{2^{t+1}} \right\rceil$$ ，其中 $m, t \in \mathbb{N}$ 。

證明.

討論 m 的奇偶：

(1) 若 $m = 2p\ (p \in \mathbb{N})$ ，則左式 $= \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{2^t} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{2^t} \right\rceil = \left\lceil \frac{2p}{2^{t+1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{2^{t+1}} \right\rceil$

(2) 若 $m = 2p - 1\ (p \in \mathbb{N})$ ，則左式 $= \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{2p-1}{2} \right\rceil}{2^t} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{2^t} \right\rceil$ ，

而由性質 1 ，右式 $= \left\lceil \frac{2p - 1}{2^{t+1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{2^t} - \frac{1}{2^{t+1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{2^t} \right\rceil$

由 (1)、(2) ，得 $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{2^t} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{2^{t+1}} \right\rceil$ □

2.2　研究 $f(n,2)$ 的一般式

首先將其狀態寫成遞迴數列的形式：

$$\begin{cases} h(2,k) = h(2,k-1) + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(1,k) = \left\lceil \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N}, h(2,0) = 0, h(1,0) = n)$ 。

定理 1.

$f(n,2) = \lceil \log_2 n \rceil$

證明.

由性質 3 ，

$$h(1,k) = \left\lceil \frac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{h(1,k-2)}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{h(1,k-2)}{2^2} \right\rceil = \cdots = \left\lceil \frac{h(1,0)}{2^k} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil = \lceil 2^{\log_2 n - k} \rceil$$

因此，

$$h(1,k) = 1 \Leftrightarrow \log_2 n - k \le 0 \Leftrightarrow k \ge \log_2 n$$

故 $f(n,2) = \lceil \log_2 n \rceil$ 。 □

2.3　研究 $f(n,3)$ 的一般式

$f(n,3)$ 主要的結果見**定理 6** 。
首先將其狀態寫成遞迴數列的形式：

$$\begin{cases} h(3,k) = h(3,k-1) + \left\lfloor \dfrac{h(3,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(2,k) = \left\lceil \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(1,k) = \left\lceil \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N}, h(3,0) = h(2,0) = 0, h(1,0) = n)$ 。
但無法如同 $f(n,2)$ 輕鬆寫出一般式，故將天花板符號、地板符號去除並進行比較，定義數列 $\hat{h}(3,k)$ 、 $\hat{h}(2,k)$ 、 $\hat{h}(1,k)$ ：

$$\begin{cases} \hat{h}(3,k) = \hat{h}(3,k-1) + \dfrac{\hat{h}(3,k-1)}{2} \\ \hat{h}(2,k) = \dfrac{\hat{h}(2,k-1)}{2} + \dfrac{\hat{h}(1,k-1)}{2} \\ \hat{h}(1,k) = \dfrac{\hat{h}(1,k-1)}{2} \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N}, \hat{h}(3,0) = \hat{h}(2,0) = 0, \hat{h}(1,0) = n)$ 。
在此我們定義其總行動次數為滿足 $\hat{h}(2,k) \le 1$ 的最小正整數 k ，並以 $\hat{f}(n,3)$ 表示，即

$$\hat{f}(n,3) = \min\{k | \hat{h}(2,k) \le 1,\ k \in \mathbb{N}\}$$

先推出 $h(1,k)$ 、 $\hat{h}(1,k)$ 的一般式及 $h(1,k)$ 與 $\hat{h}(1,k)$ 之間的差距：

定理 2.
$h(1,k)=\left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil,\ \hat{h}(1,k)=\frac{n}{2^k},\ 0\le h(1,k)-\hat{h}(1,k)<1$ 。

證明.
由**性質** 3

$$h(1,k)=\left\lceil \frac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil=\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{h(1,k-2)}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil=\left\lceil \frac{h(1,k-2)}{2^2} \right\rceil=\cdots=\left\lceil \frac{h(1,0)}{2^k} \right\rceil=\left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil=\left\lceil 2^{\log_2 n-k} \right\rceil$$

而 $\hat{h}(1,k)=\frac{\hat{h}(1,k-1)}{2}=\frac{\frac{\hat{h}(1,k-2)}{2}}{2}=\frac{\hat{h}(1,k-2)}{2^2}=\cdots=\frac{\hat{h}(1,0)}{2^k}=\frac{n}{2^k}$ ，且由天花板符號的定義，得 $0\le h(1,k)-\hat{h}(1,k)<1$ 。 □

接下來討論 $\hat{h}(2,k)$ 的一般式：

定理 3.
$\hat{h}(2,k)=\frac{k}{2^k}\times n$ 。

證明.
利用**定理** 2 及 $\hat{h}(2,k)$ 的定義可得

$$\begin{aligned}
\hat{h}(2,k) &= \frac{\hat{h}(2,k-1)}{2}+\frac{\hat{h}(1,k-1)}{2}\\
&= \frac{\hat{h}(2,k-1)}{2}+\frac{n}{2^k}\\
&= \frac{\frac{\hat{h}(2,k-2)}{2}+\frac{\hat{h}(1,k-2)}{2}}{2}+\frac{n}{2^k}\\
&= \frac{\hat{h}(2,k-2)}{4}+\frac{n}{2^k}+\frac{n}{2^k}\\
&= \cdots\\
&= \frac{\hat{h}(2,0)}{2^k}+\frac{n}{2^k}\times n\\
&= \frac{k}{2^k}\times n
\end{aligned}$$

□

當然，因 $\hat{h}(3,k)+\hat{h}(2,k)+\hat{h}(1,k)=n,\ \hat{h}(3,k)$ 的一般式也可推出：

$$\hat{h}(3,k)=n-\frac{n}{2^k}-\frac{nk}{2^k}$$

接著，為了解決原題，以下討論 $h(2,k)$ 和 $\hat{h}(2,k)$ 之間的差距：

定理 4.
$-1 < h(2,k) - \hat{h}(2,k) < 2$ 。

證明.
利用數學歸納法：

1. 當 $k = 0$ 時， $h(2,0) - \hat{h}(2,0) = 0 - 0 = 0,\ -1 < 0 < 2$ 成立。
2. 若 $k = t$ 時原命題成立，即 $1 < h(2,t) - \hat{h}(2,t)$ 。
3. 當 $k = t+1$ 時， $h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) = \left[\frac{h(2,t)}{2}\right] - \frac{\hat{h}(2,t)}{2} + \left[\frac{h(1,t)}{2}\right] - \frac{\hat{h}(1,t)}{2}$ ，
   接下來，利用歸納假設及 $h(2,t)$ 和 $h(1,t)$ 的奇偶性分別討論：
   (1) 若 $h(2,t)$ 為奇數， $h(1,t)$ 為奇數，則

$$h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) = \frac{h(2,t) - \hat{h}(2,t) + 1}{2} + \frac{h(1,t) - \hat{h}(1,t) - 1}{2}$$

由**定理** 2 ， $-\frac{1}{2} < h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) < \frac{3}{2}$

   (2) 若 $h(2,t)$ 為奇數， $h(1,t)$ 為偶數，則

$$h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) = \frac{h(2,t) - \hat{h}(2,t) + 1}{2} + \frac{h(1,t) - \hat{h}(1,t)}{2}$$

由**定理** 2 ， $0 < h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) < 2$

   (3) 若 $h(2,t)$ 為偶數， $h(1,t)$ 為奇數，則

$$h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) = \frac{h(2,t) - \hat{h}(2,t)}{2} + \frac{h(1,t) - \hat{h}(1,t) - 1}{2}$$

由**定理** 2 ， $-1 < h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) < 1$

   (4) 若 $h(2,t)$ 為偶數， $h(1,t)$ 為偶數，則

$$h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) = \frac{h(2,t) - \hat{h}(2,t)}{2} + \frac{h(1,t) - \hat{h}(1,t)}{2}$$

由**定理** 2 ， $-\frac{1}{2} < h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) < \frac{3}{2}$

綜合 (1) ~ (4) ， $-1 < h(2,t+1) - \hat{h}(2,t+1) < 2$ ，由數學歸納法得證。 □

以下利用兩種不同的觀點計算 $f(n,3)$ ，分別得出**定理** 5 與**定理** 7 ：

定理 5.
$\hat{f}(n,3)-2 \le f(n,3) \le \hat{f}(n,3)+1$ 。

證明.
根據 $f(n,3)$ 的定義， $n \ge 3$ ，而當 $n=3,4,5$ 時，直接計算可得下表：

n	3	4	5
$f(n,3)$	3	3	4
$\hat{f}(n,3)$	4	4	5 4

因此當 $n=3,4,5$ 時結論成立，故接下來考慮 $n \ge 6$ 的情況，根據 $\hat{f}(n,3)$ 的定義及**定理** 3 ，

$$\hat{f}(n,3)=\min\left\{k \,\middle|\, \frac{k}{2^k} \le \frac{1}{n},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

由此式可知，當 $n \ge 6$ 時， $\hat{f}(n,3) \ge 5$ 。

根據 $\hat{f}(n,3)$ 的定義，得 $0 < \hat{h}(2,\hat{f}(n,3)) \le 1,\ \hat{h}(2,\hat{f}(n,3)-1) > 1$ ，由**定理** 4 ，可得 $-1 < h(2,\hat{f}(n,3)) < 3$ ，即 $h(2,\hat{f}(n,3)) = 1$ 或 2 ，因為 $0 < \hat{h}(2,\hat{f}(n,3)) \le 1$ ，加上 $\hat{h}(2,k),\ \hat{h}(1,k)$ 的定義，易得 $0 < h(1,\hat{f}(n,3)) < 1$ ，再利用**定理** 2 ，可得 $0 < h(1,\hat{f}(n,3)) < 2$ ，即 $h(1,\hat{f}(n,3)) = 1$ ，因此，

$$\hat{h}(2,\hat{f}(n,3)-3) = \left\lceil \frac{h(2,\hat{f}(n,3))}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h(1,\hat{f}(n,3))}{2} \right\rfloor = 1+0=1$$

故 $f(n,3) \le \hat{f}(n,3)+1$ 。另一方面，根據**定理** 3 ，

$$\begin{aligned}\hat{h}(2,\hat{f}(n,3)-3) &= \frac{\hat{f}(n,3)-3}{2^{\hat{f}(n,3)-3}} \times n = \frac{\hat{f}(n,3)-1}{2^{\hat{f}(n,3)-1}} \times \frac{4\left(\hat{f}(n,3)-3\right)}{\hat{f}(n,3)-1} \times n \\ &= \hat{h}(2,\hat{f}(n,3)-1) \times \frac{4\left(\hat{f}(n,3)-3\right)}{\hat{f}(n,3)-1}\end{aligned}$$

因為 $f(n,3) \ge 5$ ，加上 $\hat{h}(2,\hat{f}(n,3)-1) > 1$ ，故$\hat{h}(2,\hat{f}(n,3)-3) > 2$ ，根據**定理** 4 ，$h(2,\hat{f}(n,3)-3) > 1$ ，即 $f(n,3) \ge \hat{f}(n,3)-2$ ，得證。 □

由**定理** 5 ， $f(n,3)$ 可以確立為 $\hat{f}(n,3)-2$ 或 $\hat{f}(n,3)-1$ 或 $\hat{f}(n,3)$ 或 $\hat{f}(n,3)+1$ ，例如： $\hat{f}(10,3) = \min = \left\{k \,\middle|\, \frac{k}{2^k} \le \frac{1}{10}, k \in \mathbb{N}\right\} = 6$ ，則可以知道 $f(10,3)$ 為 4 或 5 或 6 或 7 ，而實際上 $f(10,3)=6$ 。

定理 6.

$f(n,3)=x+\lceil\log_2 h(2,x)\rceil$ ，其中 $x=\lceil\log_2 n\rceil$ 。

證明.

由**定理** 2 ， $h(1,x)=\left\lceil\frac{n}{2^x}\right\rceil=\left\lceil 2^{\log_2 n-x}\right\rceil=1,\ h(1,x-1)=\left\lceil\frac{n}{2^{x-1}}\right\rceil=\left\lceil 2^{\log_2 n-x+1}\right\rceil=2$ ，所以 $h(3,k),\ h(2,k),\ h(1,k)$ 的變化，如下表所示：

k	0	$\cdots$	$x-1$	x	$\cdots$	$f(n,3)$
$h(3,k)$	0	$\cdots$	$h(3,x-1)$	$h(3,x)$	$\cdots$	$h(3,f(n,3))$
$h(2,k)$	0	$\cdots$	$h(2,x-1)$	$h(2,x)$	$\cdots$	1
$h(1,k)$	n	$\cdots$	2	1	$\cdots$	1

而當 $h(1,k)=1$ 時，接下來的變化就只剩下兩層，再由**定理** 1 的結果，得 $f(n,3)=x+\lceil\log_2 h(2,x)\rceil$ 得證。 □

定理 7.

令 $x=\lceil\log_2 n\rceil$ ，

(1) 若 $\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-1<\frac{nx}{2^x}<\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-\frac{1}{2}$ ，

則 $f(n,3)=\left\lceil\log_2\left(\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-1\right)\right\rceil+x$ 或 $\left\lceil\log_2\left(\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil\right)\right\rceil+x$ 或 $\left\lceil\log_2\left(\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil+1\right)\right\rceil+x$ ；

(2) 若 $\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-\frac{1}{2}<\frac{nx}{2^x}<\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil$

則 $f(n,3)=\left\lceil\log_2\left(\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil\right)\right\rceil+x$ 或 $\left\lceil\log_2\left(\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil+1\right)\right\rceil+x$ 。

證明.

利用**定理** 6 分析 $h(2,x)$ 和 $\hat{h}(2,x)$ 的差距來得到 $f(n,3)$ 的值：

根據定義， $h(2,x)-\hat{h}(2,x)=\left(\left\lceil\frac{h(2,x-1)}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{h(1,x-1)}{2}\right\rceil\right)-\left(\frac{\hat{h}(2,x-1)}{2}+\frac{\hat{h}(1,x-1)}{2}\right)$ ，因為 $h(1,x-1)=2$ ，且利用**定理** 2 ，知 $1<\hat{h}(1,x-1)\leq 2$ ，接下來就 $h(2,x-1)$ 的奇偶性分開討論：

(1) 若 $h(2,x-1)$ 為偶數， $h(2,x)-\hat{h}(2,x)=\frac{h(2,x-1)-\hat{h}(2,x-1)}{2}+1-\frac{\hat{h}(1,x-1)}{2}$ ，由**定理** 4 ，得 $-\frac{1}{2}<h(2,x)-\hat{h}(2,x)<\frac{3}{2}$

(2) 若 $h(2,x-1)$ 為奇數， $h(2,x)-\hat{h}(2,x)=\frac{h(2,x-1)+1-\hat{h}(2,x-1)}{2}+1-\frac{\hat{h}(1,x-1)}{2}$ ，由**定理** 4 ，得 $0<h(2,x)-\hat{h}(2,x)<2$

綜合 (1) 、 (2) 得 $-\frac{1}{2}<h(2,x)-\hat{h}(2,x)<2$ ，故 $\hat{h}(2,x)-\frac{1}{2}<h(2,x)<\hat{h}(2,x)+2$ ，
利用**定理** 3 ，
當 $\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-1<\frac{nx}{2^x}<\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-\frac{1}{2}$ 時， $h(2,x)=\left\lceil\frac{x}{2^x}\times n\right\rceil-1$ 或 $\left\lceil\frac{x}{2^x}\times n\right\rceil$ 或 $\left\lceil\frac{x}{2^x}\times n\right\rceil+1$ ；
當 $\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil-\frac{1}{2}\leq\frac{nx}{2^x}\leq\left\lceil\frac{nx}{2^x}\right\rceil$ 時， $h(2,x)=\left\lceil\frac{x}{2^x}\times n\right\rceil$ 或 $\left\lceil\frac{x}{2^x}\times n\right\rceil+1$ ；
再利用**定理** 6 即得結論。 □

對**定理** 7 進行討論，可以得到更方便閱讀的**定理** 8 ：

定理 8.
令 $x = \lceil \log_2 n \rceil,\ s = \left\lceil \dfrac{nx}{2^x} \right\rceil$ ，

$$f(n,3) = \begin{cases} x + \lfloor \log_2 s \rfloor \text{ 或 } x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1 & \text{，若 } s = 2^t,\ t \in \mathbb{N} \\ & \quad \text{或 } s = 2^t + 1,\ t \in \mathbb{N}, s-1 < \dfrac{x}{2^x} \times n < s - \dfrac{1}{2} \\ x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1 & \text{，對於其他情況。} \end{cases}$$

證明.
當 $s = 2$ 時， n 只可能是 $3,4,5$ ，經直接計算得 $f(3,3) = 3,\ f(4,3) = f(5,3) = 4$ ，滿足結論，接下來考慮 $s \geq 3$ 的情形，根據**定理** 7 ：

(1) 若 $s - 1 < \dfrac{nx}{2^x} < s - \dfrac{1}{2}$ ，則

$$f(n,3) = \lceil \log_2(s-1) \rceil + x \text{ 或 } \lceil \log_2 s \rceil + x \text{ 或 } \lceil \log_2(s+1) \rceil + x$$

(a) $s = 2^t,\ t \geq 2\ t \in \mathbb{N}$ 時， $\lceil \log_2(s-1) \rceil = \lceil \log_2 s \rceil = t,\ \lceil \log_2(s+1) \rceil = t+1$ ，
故 $f(n,3) = t + x$ 或 $t + 1 + x = x + \lfloor \log_2 s \rfloor$ 或 $x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1$ 。

(b) $s = 2^t + 1,\ t \in \mathbb{N}$ 時， $\lceil \log_2(s-1) \rceil = t,\ \lceil \log_2 s \rceil = \lceil \log_2(s+1) \rceil = t+1$ ，
故 $f(n,3) = t + x$ 或 $t + 1 + x = x + \lfloor \log_2 s \rfloor$ 或 $x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1$ 。

(c) $s = 2^t + m,\ t \geq 2,\ t \in \mathbb{N},\ 1 < m < 2^t,\ m \in \mathbb{N}$ 時，
$\lceil \log_2(s-1) \rceil = \lceil \log_2 s \rceil = \lceil \log_2(s+1) \rceil = t+1$ ，
故 $f(n,3) = t + 1 + x = x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1$ 。

(2) 若 $s - \dfrac{1}{2} < \dfrac{nx}{2^x} < s$ ，則 $f(n,3) = \lceil \log_2 s \rceil + x$ 或 $\lceil \log_2(s+1) \rceil + x$ 。

(a) $s = 2^t,\ t \geq 2,\ t \in \mathbb{N}$ 時， $\lceil \log_2 s \rceil = t,\ \lceil \log_2(s+1) \rceil = t+1$ ，
故 $f(n,3) = t + x$ 或 $t + 1 + x = x + \lfloor \log_2 s \rfloor$ 或 $x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1$ 。

(b) $s = 2^t + m,\ t \geq 2,\ t \in \mathbb{N},\ 1 < m < 2^t,\ m \in \mathbb{N}$ 時，
$\lceil \log_2 s \rceil = \lceil \log_2(s+1) \rceil = t+1$ ，故 $f(n,3) = t + 1 + x = x + \lfloor \log_2 s \rfloor + 1$ 。

綜合 $s = 2$ 的情形及 $(1),(2)$ ，及得結論。 □

比較**定理** 6 與**定理** 8 ：
以 $f(10,3)$ 為例， $x = \lceil \log_2 10 \rceil = 4,\ s = \left\lceil \dfrac{4}{2^4} \times 10 \right\rceil = 3$ ，得 $f(10,3) = 4 + \lfloor \log_2 3 \rfloor + 1 = 6$ ，較**定理** 6 得到的 4 或 5 或 6 或 7 更佳。

定理 6 與**定理** 8 是針對同一 n 值進行 $f(n,3)$ 的探討，而接下來考慮在不同 n 值時， $f(n,3)$ 的情形，得出**定理** 9 與**定理** 10 ：

定理 9.
$f(n_1,3) \geq f(n_2,3)$ ， $\forall n_1 > n_2 \geq 3$ ， $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ 。

證明.
首先證明 $h_{n+1}(1,k) \geq h_n(1,k)$ 且 $h_{n+1}(2,k) \geq h_n(2,k),\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，利用數學歸納法：

1. 當 $k = 0$ 時， $h_{n+1}(1,0) = n + 1 > n = h_n(1,0)$ 且 $h_{n+1}(2,0) = 0 = h_n(2,0)$ 成立。
2. 若 $k = t$ 時命題成立，即 $h_{n+1}(1,t) \geq h_n(1,t)$ 且 $h_{n+1}(2,t) \geq h_n(2,t)$ 。

3. 當 $k = t+1$ 時， $h_{n+1}(1,t+1) = \left\lceil \frac{h_{n+1}(1,t)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{h_n(1,t)}{2} \right\rceil = h_n(1,t+1)$ ，且

$$h_{n+1}(2,t+1) = \left\lceil \frac{h_{n+1}(2,t)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h_{n+1}(1,t)}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{h_n(2,t)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h_n(1,t)}{2} \right\rfloor = h_n(2,t+1)$$ 。

因此當 $k = t+1$ 時命題亦成立，所以 $h_{n+1}(1,k) \geq h_n(1,k)$ 且 $h_{n+1}(2,k) \geq h_n(2,k)$ ，由此結論，當 $h_{n+1}(1,k)$ 和 $h_{n+1}(2,k)$ 第一次到 1 時， $h_n(1,k)$ 和 $h_n(2,k)$ 已經是 1 了，又 $f(n,3)$ 為滿足 $h_n(1,k) = 1$ 且 $h_n(2,k) = 1$ 的最小正整數 k ，故 $f(n,3) \geq f(n+1,3)$ ，因此， $f(n_1,3) \geq f(n_1-1,3) \geq \cdots \geq f(n_2+1,3) \geq f(n_2,3)$ ，得證。 □

定理 10.
$f(n,3) = 2^t + t$ ，當 $2^{2^t-1} + 1 \leq n \leq 2^{2^t}$ ， 其中 $t \in \mathbb{N}$ 。

證明.

(1) 當 $n = 2^{2^t-1} + 1$ 時，先證明 $h(2,k) = k \times 2^{2^t-k-1},\ \forall 0 \leq k \leq 2^t - 1$ ，利用數學歸納法：

(a) 當 $k = 0$ 時， $h(2,0) = 0 \times 2^{2^t-0-1} = 0$ 成立。

(b) 若 $k = s,\ \forall\ 0 \leq s \leq 2^t - 2$ 時結論成立，即 $h(2,s) = s \times 2^{2^t-s-1}$ 。

(c) 當 $k = s+1$ 時， $h(2,s+1) = \left\lceil \frac{h(2,s)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h(1,s)}{2} \right\rfloor$ ，

根據**定理** 2 ， $h(1,s) = \left\lceil \frac{n}{2^s} \right\rceil = 2^{2^t-s-1} + 1$ ，再根據 $h(2,k)$ 的定義得

$$h(2,s+1) = \left\lceil \frac{h(2,s)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h(1,s)}{2} \right\rfloor = s \times 2^{2^t-s-2} + 2^{2^t-s-2} = (s+1) \times 2^{2^t-(s+1)-1}$$

由數學歸納法及論成立，故 $h(2,2^t-1) = 2^t - 1$ ，而 $h(1,2^t-1) = \left\lceil \frac{2^{2^t-1}+1}{2^{2^t-1}} \right\rceil = 2$ ，故 $h(2,2^t) = \left\lceil \frac{2^t-1}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 2^{t-1} + 1$ ，再根據定理 6 ，得

$$f(2^{2^t-1}+1,3) = \lceil \log_2(2^{2^t-1}+1) \rceil + \lceil \log_2(2^{t-1}+1) \rceil = 2^t + t$$

(2) 當 $n = 2^{2^t}$ 時，先證明 $h(2,k) = k \times 2^{2^t-k},\ \forall 0 \leq k \leq 2^t$ ，利用數學歸納法：

(a) 當 $k = 0$ 時， $h(2,0) = 0 \times 2^{2^t-0} = 0$ 成立。

(b) 若 $k = s,\ \forall\ 0 \leq s \leq 2^t - 1$ 時結論成立，即 $h(2,s) = s \times 2^{2^t-s}$ 。

(c) 當 $k = s+1$ 時， $h(2,s+1) = \left\lceil \frac{h(2,s)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h(1,s)}{2} \right\rfloor$ ，

根據**定理** 2 ， $h(1,s) = \left\lceil \frac{n}{2^s} \right\rceil = 2^{2^t-s}$ ，再根據 $h(2,k)$ 的定義得

$$h(2,s+1) = \left\lceil \frac{h(2,s)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h(1,s)}{2} \right\rfloor = s \times 2^{2^t-s-1} + 2^{2^t-s-1} = (s+1) \times 2^{2^t-(s+1)}$$

由數學歸納法及論成立，故 $h(2,2^t) = 2^t$ ，再根據定理 6 ，得

$$f(2^{2^t},3) = \lceil \log_2 2^{2^t} \rceil + \lceil \log_2 2^t \rceil = 2^t + t$$

由 (1) 、(2) 及**定理** 9 ， $f(2^{2^t-1}+1,3) = f(2^{2^t},3) = 2^t + t$ ，即得結論。 □

由**定理** 10 ，可以發現一些原本**定理** 8 會得出 2 個可能的 n 值，可以確定為 1 個可能,而綜合**定理** 8 和**定理** 10 ，可以得到 $n=2^m$ 時， $f(n,3)$ 的一般式。

定理 11.
$f(2^m,3)=\lceil\log_2 m\rceil+m,\ \forall m>1,\ m\in\mathbb{N}$ 。

證明.
由**定理** 8 ， $n=2^m$ 時，因 $\lceil\log_2 n\rceil=m,\ \left\lceil\frac{m}{2^m}\times n\right\rceil=m$ ，可分為三種情況：

(1) $m=2^t$ ，由**定理** 9 得到 $f(n,3)=\lceil\log_2 m\rceil+m$ 或 $\lceil\log_2 m\rceil+m+1$ ，但由**定理** 10 ， $f(n,3)$ 可確立為 $\lceil\log_2 m\rceil+m$ 。

(2) $m=2^{t-1}+1$ ，由**定理** 8 ， $\frac{m}{2^m}\times n=m$ 不再 $m-1$ 到 $m-\frac{1}{2}$ 的範圍內，故 $f(n,3)=\lceil\log_2 m\rceil+m$

(3) 其他情況，由**定理** 8 得到 $f(n,3)=\lceil\log_2 m\rceil+m$ 。

由 (1) 、 (2) 、 (3) ，得證。 □

綜合以上結果，實際在計算 $f(n,3)$ 時，先利用**定理** 10 和**定理** 11 ，若 n 在範圍內，可得唯一的結果，否則利用**定理** 8 ，也可得兩種可能。

2.4 研究 $f(n,r)$ 的一般式

使用一樣的方法，建構一個去除天花板符號及地板符號的數列，首先，先求出 $\hat{h}(l,k)$ 的一般式：

定理 12.
在總人數 n ，總級別數 r 時，若$l\neq 1,\ l\neq r$ ，則 $\hat{h}(l,k)=\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{(l-1)!}\times k(k-1)\cdots(k-l+2)\times n$ 。

證明.
利用數學歸納法：

1. 當 $l=2$ 時，由**定理** 3 ， $\hat{h}(2,k)=\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{(2-1)!}\times k\times n=\frac{1}{2^k}\times k\times n$ 成立。
2. 若 $l=s$ 時原命題成立，即 $\hat{h}(s,k)=\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{(s-1)!}\times k(k-1)\cdots(k-s+2)\times n$ 。
3. 當 $l=s+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
&\hat{h}(s+1,k)\\
=&\ \frac{\hat{h}(s+1,k-1)}{2}+\frac{\hat{h}(s,k-1)}{2}\\
=&\ \frac{\hat{h}(s+1,k-1)}{2}+\frac{\frac{1}{2^{k-1}}\times\frac{1}{(s-1)!}\times(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)\times n}{2}\\
=&\ \frac{\hat{h}(s+1,k-2)}{2^2}+\frac{\hat{h}(s,k-2)}{2^2}+\frac{1}{(s-1)!}\times\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{2^k}\times n\\
=&\ \frac{\hat{h}(s+1,k-2)}{2^2}+\frac{1}{(s-1)!}\times\left(\frac{(k-2)(k-3)\cdots(k-s)}{2^k}+\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{2^k}\right)\times n\\
=&\ \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\hat{h}(s+1,0)}{2^k} + \frac{1}{(s-1)!} \times \left(\frac{(s-1)(s-2)\cdots 1}{2^k} + \frac{s(s-1)\cdots 2}{2^k} + \cdots + \frac{(k-2)(k-3)\cdots(k-s)}{2^k} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{2^k} \right) \times n \\
&= \frac{(s-1)(s-2)\cdots 1 + \cdots + (k-2)(k-3)\cdots(k-s) + (k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{2^k(s-1)!} \times n \\
&= \frac{s[(s-1)(s-2)\cdots 1 + \cdots + (k-2)(k-3)\cdots(k-s) + (k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)]}{2^k \times s!} \times n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{令式 (1)} &= s[(s-1)(s-2)\cdots 1 + \cdots + (k-2)(k-3)\cdots(k-s) + (k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)] \\
\text{式 (2)} &= k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{則式 (2)} - \text{式 (1)} \\
&= k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1) - s[(s-1)(s-2)\cdots 1 + \cdots + (k-2)(k-3)\cdots(k-s) + \\
&\quad (k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)] \\
&= \frac{k!}{(k-s)!} - s\left[(s-1)! + \cdots + \frac{(k-2)!}{(k-s-1)!} + \frac{(k-1)!}{(k-s)!}\right] \\
&= k\frac{(k-1)!}{(k-s)!} - s\frac{(k-1)!}{(k-s)!} - s\left[(s-1)! + \cdots + \frac{(k-2)!}{(k-s-1)!}\right] \\
&= \frac{(k-1)!}{(k-s-1)!} - s\left[(s-1)! + \cdots + \frac{(k-2)!}{(k-s-1)!}\right] \\
&= (k-1)\frac{(k-2)!}{(k-s-1)!} - s\frac{(k-2)!}{(k-s-1)!} - s\left[(s-1)! + \cdots + \frac{(k-3)!}{(k-s-2)!}\right] \\
&= \frac{(k-2)!}{(k-s-2)!} - s\left[(s-1)! + \cdots + \frac{(k-3)!}{(k-s-2)!}\right] \\
&= \cdots \\
&= s! - s(s-1)! = 0
\end{aligned}
$$

故式 $(1) =$ 式 (2) ，由數學歸納法得證。

□

接著，討論 $h(l,k)$ 與 $\hat{h}(l,k)$ 之間的差距：

定理 13.
若 $p < h(l,k) - \hat{h}(l,k) < q$ ，則 $p-1 < h(l+1,k) - \hat{h}(l+1,k) < q_1$ ，其中，$l \neq 1,\ l \neq r-1$， p,q 為任意實數。

證明.
利用數學歸納法：

1. 當 $k=0$ 時， $h(l,0)-\hat{h}(l,0) = 0 = h(l+1,0)-\hat{h}(l+1,0),\ p<0<q$ ，則 $p-1<0<q-1$ 顯然成立。

2. 當 $k=t$ 時，假設原命題成立，即

$$p < h(l,t) - \hat{h}(l,t) < q,\ p-1 < h(l+1,t) - \hat{h}(l+1,t) < q+1$$

3. 則當 $k=t+1$ 時，

$$h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)=\left\lceil\frac{h(l+1,t)}{2}\right\rceil-\frac{\hat{h}(l+1,t)}{2}+\left\lfloor\frac{h(l,t)}{2}\right\rfloor-\frac{\hat{h}(l,t)}{2}$$

依 $h(l+1,t)$ 和 $h(l,t)$ 的奇偶分別進行討論：

(1) 若 $h(l+1,t)$ 為偶數， $h(l,t)$ 為偶數，則

$$h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)=\frac{h(l+1,t)-\hat{h}(l+1,t)+h(l,t)-\hat{h}(l,t)}{2}$$

化簡得 $p-\dfrac{1}{2}<h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)<q+\dfrac{1}{2}$

(2) 若 $h(l+1,t)$ 為偶數， $h(l,t)$ 為奇數，則

$$h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)=\frac{h(l+1,t)-\hat{h}(l+1,t)+h(l,t)-\hat{h}(l,t)-1}{2}$$

化簡得 $p-1<h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)<q$

(3) 若 $h(l+1,t)$ 為奇數， $h(l,t)$ 為偶數，則

$$h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)=\frac{h(l+1,t)-\hat{h}(l+1,t)+1+h(l,t)-\hat{h}(l,t)}{2}$$

化簡得 $p<h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)<q+1$

(4) 若 $h(l+1,t)$ 為奇數， $h(l,t)$ 為奇數，則

$$h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)=\frac{h(l+1,t)-\hat{h}(l+1,t)+1+h(l,t)-\hat{h}(l,t)-1}{2}$$

化簡得 $p-\dfrac{1}{2}<h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)<q+\dfrac{1}{2}$

綜合 (1) ~ (4) ，得 $p-1<h(l+1,t+1)-\hat{h}(l+1,t+1)<q+1$ ，由數學歸納法得證。

□

定理 14.
$-l+1<h(l,k)-\hat{h}(l,k)<l$ ，其中 $l\neq 1,\ l\neq r$ 。

證明.
由定理 4， $-1<h(2,k)-\hat{h}(2,k)<2$ ，由定理 13， $-2<h(3,k)-\hat{h}(3,k)<3,\ -3<h(4,k)-\hat{h}(4,k)<4,\ \cdots,\ -l+1<h(l,k)-\hat{h}(l,k)<l$ ，得證。 □

定理 15.
令 $f(n,r-1)=x,\ \hat{h}(r-1,x)=\dfrac{1}{2^x}\times\dfrac{1}{(r-2)!}\times x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+3)\times n=y$ 。

(1) 若 $\lceil y\rceil-1<y<\lceil y\rceil-\dfrac{1}{2}$ ，則 $f(n,r)=\lceil\log_2(\lceil y\rceil+i)\rceil,\ 2-r\leq i\leq r-2,\ i\in\mathbb{Z}$

(2) 若 $\lceil y\rceil-\dfrac{1}{2}<y<\lceil y\rceil$ ，則 $f(n,r)=\lceil\log_2(\lceil y\rceil+i)\rceil,\ 3-r\leq i\leq r-2,\ i\in\mathbb{Z}$

證明.

使用與**定理** 7 相同的方法：

$k=x$ 時， $h(r-2,x)=1$ ，而 $h(r-2,x-1)>1$ ，但 $\left\lceil \frac{h(r-2,x-1)}{2} \right\rceil = h(r-2,x)=1$ ，故 $h(r-2,x-1)$ ，如下所示：

$$\begin{array}{ccccccc}
k & 0 & \cdots & x-1 & x & \cdots & f(n,r) \\
h(r,k) & 0 & \cdots & h(r,x-1) & h(r,x) & \cdots & h(r,f(n,r)) \\
h(r-1,k) & 0 & \cdots & h(r-1,x-1) & h(r-1,x) & \cdots & 1 \\
h(r-2,k) & 0 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 1 \\
h(r-3,k) & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

而當 $h(r-2,k)=1$ 時，接下來的變化就只剩下兩層，再由**定理** 1 的結果，得 $f(n,r)=x+\lceil \log_2 h(r-1,x) \rceil$ ，故分析 $h(r-1,x)$ 和 $\hat{h}(r-1,x)$ 的差距來得到 $f(n,r)$ 的值，根據定義，

$$h(r-1,x)-\hat{h}(r-1,x)=\left(\left\lceil \frac{h(r-1,x-1)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h(r-2,x-1)}{2} \right\rfloor\right)-\left(\frac{\hat{h}(r-1,x-1)}{2}+\frac{\hat{h}(r-2,x-1)}{2}\right)$$

因為 $h(r-2,x-1)=2$ ，且利用**定理** 14 ，知 $-r+4<\hat{h}(r-2,x-1)<r-1$ ，接下來就 $h(r-1,x-1)$ 的奇偶性分開討論：

(1) 若 $h(r-1,x-1)$ 為偶數，則

$$h(r-1,x)-\hat{h}(r-1,x)=\frac{h(r-1,x-1)-\hat{h}(r-1,x-1)}{2}+1-\frac{\hat{h}(r-2,x-1)}{2}$$

由**定理** 14 ，得 $-r+\frac{5}{2}<h(r-1,x)-\hat{h}(r-1,x)<r-\frac{3}{2}$

(2) 若 $h(r-1,x-1)$ 為奇數，則

$$h(r-1,x)-\hat{h}(r-1,x)=\frac{h(r-1,x-1)+1-\hat{h}(r-1,x-1)}{2}+1-\frac{\hat{h}(r-2,x-1)}{2}$$

由**定理** 14 ，得 $-r+3<h(r-1,x)-\hat{h}(r-1,x)<r-1$

綜合 (1) 、 (2) 得 $-r+\frac{5}{2}<h(r-1,x)-\hat{h}(r-1,x)<r-1$ ，

故 $\hat{h}(r-1,x)-r+\frac{5}{2}<h(r-1,x)<\hat{h}(r-1,x)+r-1$ ，

利用**定理** 12 ，令 $\hat{h}(r-1,x)=\frac{1}{2^x}\times\frac{1}{(r-2)!}\times x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+3)\times n=y$ ，

則 $y-r+\frac{5}{2}<h(r-1,x)<y+r-1$ ，又 $h(r-1,x)$ 為整數，

當 $\lceil y \rceil-1<y<\lceil y \rceil-\frac{1}{2}$ 時，

$$h(r-1,x)=\lceil y \rceil-(r-2) \text{ 或 } \lceil y \rceil-(r-3) \text{ 或 } \cdots \text{ 或 } \lceil y \rceil+(r-3) \text{ 或 } \lceil y \rceil+(r-2)$$

當 $\lceil y \rceil-\frac{1}{2}<y<\lceil y \rceil$ 時，

$$h(r-1,x)=\lceil y \rceil-(r-3) \text{ 或 } \cdots \text{ 或 } \lceil y \rceil+(r-3) \text{ 或 } \lceil y \rceil+(r-2)$$

再利用 $f(n,r)=x+\lceil \log_2 h(r-1,x) \rceil$ 即得結論。

□

另外，這裡證明與 $f(n,3)$ 相同， $f(n,r)$ 也是遞增的：

定理 16.

$f(n_1,r) \geq f(n_2,r),\ \forall n_1 > n_2,\ n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ 。

證明.

首先證明 $h_{n+1}(l,k) \geq h_n(l,k),\ \forall 1 \leq l < r,\ l \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，利用數學歸納法：

1. 當 $k=0$ 時， $h_{n+1}(1,0) = n+1 > n = h_n(1,0),\ h_{n+1}(2,0) = 0 = h_n(2,0),\dots,$ $h_{n+1}(r-1,0) = 0 = h_n(r-1,0)$ 成立。

2. 若 $k=t$ 時命題成立，即 $h_{n+1}(l,t) \geq h_n(l,t)$ 。

3. 當 $k=t+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
h_{n+1}(1,t+1) &= \left\lceil \frac{h_{n+1}(1,t)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{h_n(1,t)}{2} \right\rceil = h_n(1,t+1),\\
h_{n+1}(2,t+1) &= \left\lceil \frac{h_{n+1}(2,t)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h_{n+1}(1,t)}{2} \right\rfloor\\
&\geq \left\lceil \frac{h_n(2,t)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h_n(1,t)}{2} \right\rfloor = h_n(2,t+1),\dots,\\
h_{n+1}(r-1,t+1) &= \left\lceil \frac{h_{n+1}(r-1,t)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h_{n+1}(r-2,t)}{2} \right\rfloor\\
&\geq \left\lceil \frac{h_n(r-1,t)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{h_n(r-2,t)}{2} \right\rfloor = h_n(r-1,t+1)
\end{aligned}
$$

因此當 $k=t+1$ 時命題亦成立，所以 $h_{n+1}(l,k) \geq h_n(l,k),\ \forall\ 1 \leq l < r,\ l \in \mathbb{N}$ ，
由此結論，當 $h_{n+1}(1,k),\ h_{n+1}(2,k),\cdots,\ h_{n+1}(r-1,k)$ 第一次到 1 時，
$h_n(1,k),\ h_n(2,k),\cdots,\ h_n(r-1,k)$ 已經是 1 了， 又 $f(n,r)$ 為滿足
$h_n(1,k) = h_n(2,k) = \cdots = h_n(r-1,k) = 1$ 的最小正整數 k ，故 $f(n,3) \geq f(n+1,3)$ ，
因此， $f(n_1,3) \geq f(n_1-1,3) \geq \cdots \geq f(n_2+1,3) \geq f(n_2,3)$ ，得證。 □

2.5 研究 $g(n,2)$ 的一般式

定理 17.

$g(n,2) = \lceil \log_2 n \rceil$

證明.

$$
\begin{cases}
h(2,k) = h(2,k-1) + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor\\
h(1,k) = \left\lceil \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil
\end{cases}
$$

$(k \in \mathbb{N}, h(2,0) = 0, h(1,0) = n)$ 。
其狀況與定理 1 相同，故 $g(n,2) = \lceil \log_2 n \rceil$ 。 □

2.6 研究 $g(n,3)$ 的一般式

$g(n,3)$ 主要的結果見**定理** 25、**定理** 26、**定理** 28。
首先將其狀態寫成遞迴數列的形式：

$$\begin{cases} h(3,k) = h(3,k-1) + \left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(2,k) = \left(h(2,k-1) - 2\left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(1,k) = \left\lceil \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N}, h(3,0) = h(2,0) = 0, h(1,0) = n)$ 。
由於無法輕鬆推出一般式，故將天花板符號、地板符號去除並進行比較，定義數列 $\hat{h}(3,k)$ 、 $\hat{h}(2,k)$ 、 $\hat{h}(1,k)$ ：

$$\begin{cases} \hat{h}(3,k) = \hat{h}(3,k-1) + \dfrac{\hat{h}(2,k-1)}{2} \\ \hat{h}(2,k) = \dfrac{\hat{h}(1,k-1)}{2} \\ \hat{h}(1,k) = \dfrac{\hat{h}(2,k-1)}{2} + \dfrac{\hat{h}(1,k-1)}{2} \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N}, \hat{h}(3,0) = \hat{h}(2,0) = 0, \hat{h}(1,0) = n)$ 。
在此我們定義其總行動次數為滿足 $\hat{h}(1,k) \le 1$ 且 $\hat{h}(2,k) \le 1$ 的最小正整數 k ，並以 $\hat{g}(n,3)$ 表示，即

$$\hat{g}(n,3) = \min\{k | \hat{h}(1,k) \le 1,\ \hat{h}(2,k) \le 1,\ k \in \mathbb{N}\}$$

先推出 $\hat{h}(1,k)$ 、 $\hat{h}(2,k)$ 、 $\hat{h}(3,k)$ 的一般式：

定理 18.
$\hat{h}(1,k) = \dfrac{F_{k+1}}{2^k} \times n$ ，其中 $F_{l+2} = F_{l+1} + F_l,\ F_0 = 0,\ F_1 = 1$ 。

證明.
利用學歸納法：

1. 當 $k = 0$ 時， $\hat{h}(1,0) = n = \dfrac{F_1}{2^0} \times n$ ， 當 $k = 1$ 時，

$$\hat{h}(1,1) = \frac{\hat{h}(1,0)}{2} + \frac{\hat{h}(2,1)}{2} = \frac{n}{2} = \frac{F_2}{2^1} \times n$$

2. 若 $k = t,\ k = t+1$ 時命題皆成立，即 $\hat{h}(1,t) = \dfrac{F_{t+1}}{2} \times n,\ h(1,\hat{t}+1) = \dfrac{F_{t+2}}{2^{t+1}} \times n$ 。

3. 當 $k = t+2$ 時，

$$\begin{aligned} \hat{h}(1,t+2) &= \frac{\hat{h}(1,t+1)}{2} + \frac{\hat{h}(2,t+1)}{2} = \frac{F_{t+2}}{2^{t+2}} \times n + \frac{\hat{h}(1,t)}{4} \\ &= \left(\frac{F_{t+2}}{2^{t+2}} + \frac{F_{t+1}}{2^{t+2}} \right) \times n = \frac{F_{t+3}}{2^{t+2}} \times n \end{aligned}$$

由數學歸納法得證。 □

定理 19.

$\hat{h}(2,k)=\dfrac{F_k}{2^k}\times n$ ，其中 $F_{l+2}=F_{l+1}+F_l,\ F_0=0,\ F_1=1$ 。

證明.

利用**定理 18**，得 $\hat{h}(2,k)=\dfrac{\hat{h}(1,k-1)}{2}=\dfrac{\frac{F_k}{2^{k-1}}}{2}\times n=\dfrac{F_k}{2^k}\times n$ 。 □

定理 20.

$\hat{h}(3,k)=\left(1-\dfrac{F_{k+2}}{2^k}\right)\times n$ ，其中 $F_{l+2}=F_{l+1}+F_l,\ F_0=0,\ F_1=1$ 。

證明.

利用**定理 18** 及**定理 19**，得

$$\hat{h}(3,k)=n-\hat{h}(2,k)-\hat{h}(1,k)=\left(1-\frac{F_k}{2^k}-\frac{F_{k+1}}{2^k}\right)\times n=\left(1-\frac{F_{k+2}}{2^k}\right)\times n$$

□

接著，為了解決原題,以下討論 $h(2,k)$ 與 $\hat{h}(2,k)$ 、 $h(1,k)$ 與 $\hat{h}(1,k)$ 之間的差距：

定理 21.

$-2<h(2,k)-\hat{h}(2,k)<3,\ -3<h(1,k)-\hat{h}(1,k)<4$ 。

證明.

利用數學歸納法：

1. 當 $k=0$ 時， $h(2,0)-\hat{h}(2,0)=0-0,\ h(1,0)-\hat{h}(1,0)=n-n=0$ ，結論成立。
2. 若 $k=t$ 時原命題成立，即 $-2<h(2,t)-\hat{h}(2,t)<3,\ -3<h(1,t)-\hat{h}(1,t)<4$ ，
3. 當 $k=t+1$ 時，

$$\begin{aligned}h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)&=\left(h(2,t)-2\left\lfloor\frac{h(2,t)}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{h(1,t)}{2}\right\rfloor-\frac{\hat{h}(1,t)}{2}\\ h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)&=\left(\left\lfloor\frac{h(2,t)}{2}\right\rfloor-\frac{\hat{h}(2,t)}{2}\right)+\left(\left\lceil\frac{h(1,t)}{2}\right\rceil-\frac{\hat{h}(1,t)}{2}\right)\end{aligned}$$

接下來，利用歸納假設及 $h(2,t)$ 和 $h(1,t)$ 的奇偶性分別討論：

(1) 若 $h(2,t)$ 為奇數， $h(1,t)$ 為奇數，

$$\begin{cases}h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)=\dfrac{h(1,t)-\hat{h}(1,t)+1}{2}\\ h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)=\dfrac{h(2,t)-\hat{h}(2,t)+h(1,t)-\hat{h}(1,t)}{2}\end{cases}$$

得 $-1<h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)<\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2}<h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)<\dfrac{7}{2}$

(2) 若 $h(2,t)$ 為奇數， $h(1,t)$ 為偶數，

$$\begin{cases}h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)=\dfrac{h(1,t)-\hat{h}(1,t)+2}{2}\\ h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)=\dfrac{h(2,t)-\hat{h}(2,t)+h(1,t)-\hat{h}(1,t)-1}{2}\end{cases}$$

得 $-\dfrac{1}{2}<h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)<3,\ -3<h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)<3$

(3) 若 $h(2,t)$ 為偶數， $h(1,t)$ 為奇數，

$$\begin{cases} h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)=\dfrac{h(1,t)-\hat{h}(1,t)-1}{2} \\ h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)=\dfrac{h(2,t)-\hat{h}(2,t)+h(1,t)-\hat{h}(1,t)+1}{2} \end{cases}$$

得 $-2<h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)<\dfrac{3}{2},\ -2<h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)<4$

(4) 若 $h(2,t)$ 為偶數， $h(1,t)$ 為偶數，

$$\begin{cases} h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)=\dfrac{h(1,t)-\hat{h}(1,t)}{2} \\ h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)=\dfrac{h(2,t)-\hat{h}(2,t)+h(1,t)-\hat{h}(1,t)}{2} \end{cases}$$

得 $-\dfrac{3}{2}<h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)<2,\ -\dfrac{5}{2}<h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)<\dfrac{7}{2}$

綜合 (1) ~ (4) ， $-2<h(2,t+1)-\hat{h}(2,t+1)<3,\ -3<h(1,t+1)-\hat{h}(1,t+1)<4$ ，由數學歸納法得證。 □

定理 22.

若 $h(2,k)=x,\ h(1,k)=y$ ，其中 $k\in\mathbb{N}$ ，則 $h(2,k-1),\ h(1,k-1)$ 至多僅有四種可能情形：

$$\begin{cases} h(2,k-1) = 2y-2x+3 \\ h(1,k-1) = 2x-2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} h(2,k-1) = 2y-2x+1 \\ h(1,k-1) = 2x-1 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} h(2,k-1) = 2y-2x \\ h(1,k-1) = 2x \end{cases} \text{或} \begin{cases} h(2,k-1) = 2y-2x-2 \\ h(1,k-1) = 2x+1 \end{cases}$$

證明.

由定義，

$$\begin{cases} h(2,k)=h(2,k-1)-2\left\lfloor\dfrac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{h(1,k-1)}{2}\right\rfloor \\ h(1,k)=\left\lceil\dfrac{h(1,k-1)}{2}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor \end{cases}$$

設 $h(2,k-1)=2y-2x+a,\ h(1,k-1)=2x+b$ ，其中$a,b\in\mathbb{Z}$ ，帶入上式得

$$\begin{cases} x=2y-2x+a-2\left\lfloor\dfrac{2y-2x+a}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{2x+b}{2}\right\rfloor \\ y=\left\lceil\dfrac{2x+b}{2}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{2y-2x+a}{2}\right\rfloor \end{cases}$$

化簡後得

$$\begin{cases} a-2\left\lfloor\dfrac{a}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{b}{2}\right\rfloor=0 & (1) \\ \left\lceil\dfrac{b}{2}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{a}{2}\right\rfloor=0 & (2) \end{cases}$$

又$a-2\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor=0$ 或 1 ，故 $\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor=0$ 或 -1 ，即 $b=-2$ 或 -1 或 0 或 1 ，
另外 $(1)+(2)\times 2$ 得 $a+\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor+2\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil=0$ ，將 b 的四個可能值代入，即得 a 值，
因此 $(a,b)=(-3,-2)$ 或 $(1,-1)$ 或 $(0,0)$ 或 $(-2,1)$ ，即得結論。 □

定理 22 是指 $h(2,k-1),\ h(1,k-1)$ 至多只有四種可能性，但不一定都有可能發生，例如當 $h(2,k)=h(1,k)=2$ 時，依照最初的定義， $h(2,k-1)\geq 0,\ h(1,k-1)\geq 0$ ，所以其中的 $h(2,k-1)=-2,\ h(1,k-1)=5$ 就不可能。

定理 23.

(1) $h(1,k)\geq 1, \forall k\in\mathbb{N}$

(2) $h(1,k)\geq h(2,k)-1, \forall k\in\mathbb{N}$ ，更精確地說，除了 $h(1,k)=1,\ h(2,k)=2$ 這種情形外， $h(1,k)\geq h(2,k)$ 。

(3) $h(2,k)\geq 0, \forall\in\mathbb{N}$ ，更精確地說，除了 $h(1,k)=2,\ h(2,k)=0$ 這種情形外， $h(2,k)\geq 1$ 。

(4) $2h(2,k)-h(1,k)\geq -2,\ \forall\in\mathbb{N}$

證明.

首先依照原本的定義，人數不能為負，故 $h(1,k)\geq 0,\ h(2,k)\geq 0$ 。

(1) $h(1,k)=\left\lceil\frac{h(1,k-1)}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor$ ，當 $h(1,k)=0$ ，可得 $h(1,k-1)=0$ ，重複此步驟，得 $h(1,0)=0$ ，矛盾！所以 $h(1,k)\geq 1,\ \forall k\in\mathbb{N}$ 。

(2) 根據定義

$$\begin{cases} h(2,k)=h(2,k-1)-2\left\lfloor\frac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{h(1,k-1)}{2}\right\rfloor \\ h(1,k)=\left\lceil\frac{h(1,k-1)}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor \end{cases}$$

則

$$\begin{aligned} h(1,k)-h(2,k)+1 &= \left(\left\lceil\frac{h(1,k-1)}{2}\right\rceil-\left\lfloor\frac{h(1,k-1)}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor \\ &\quad +\left(2\left\lfloor\frac{h(2,k-1)}{2}\right\rfloor-h(2,k-1)+1\right)\geq 0\quad(\forall k\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

而 $h(1,k)-h(2,k)+1=0$ ，只在 $h(2,k-1)=1$ 且 $h(1,k-1)$ 為偶數的情形下才有可能，設 $h(1,k-1)=2t,\ t\in\mathbb{N}$ ，根據**定理** 22 ，得

$$\begin{cases} h(2,k-2) \\ h(1,k-2) \end{cases} = \begin{cases} 4t+1 \\ 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 4t-1 \\ 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 4t-2 \\ 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 4t-4 \\ 3 \end{cases}$$

由 (1) ， $h(1,k)\geq 1$ ，故只剩後三種可能，再配合除了 $h(2,k-1)=1$ 且 $h(1,k-1)$ 為偶數這種情形外，恆有 $h(1,k)\geq h(2,k)$ ，以下分成 $t\neq 1$ 和 $t=1$ 進行討論：

(a) 若 $t\neq 1$ ，即 $t\geq 2$ ，則這三種可能皆有 $h(2,k-2)\geq h(1,k-2)$ ，因此根據**定理** 22 及 $h(2,k-3)=1$ 且 $h(1,k-3)$ 為偶數，得

$(h(1,k-2),h(2,k-2))$	$(4t-1,1)$	$(4t-2,2)$	$(4t-4,3)$
$(h(1,k-3),h(2,k-3))$	$(2,1)$	$(4,1)$	$(6,1)$

而計算得到之 t 值皆與原假設矛盾。

(b) 若 $t = 1$ ，實際上確實有可能發生。

因此，除了 $h(2,k) = 2$ 且 $h(1,k) = 1$ 這種情形外， $h(1,k) \geq h(2,k)$ 。

(3) 設 $h(2,k) = 0,\ h(1,k) = a,\ a \in \mathbb{N}$ ，利用**定理** 22 ，

$$\begin{cases} h(2,k-1) \\ h(1,k-1) \end{cases} = \begin{cases} 2a+3 \\ -2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2a+1 \\ -1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2a \\ 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2a-2 \\ 1 \end{cases},$$

由 (1) ， $h(2,k-1) = 2a-2,\ h(1,k-1) = 1$ 是唯一可能，再利用 (2) ， $1 \geq 2a-3$ ，即 $a = 1,2$ ，但若 $a = 1$ ，即 $h(2,k) = 0,\ h(1,k) = 1$ ，往前推得 $h(2,k-1) = 0,\ h(1,k-1) = 1$ ，重複此步驟，和初始條件矛盾！
故 $a = 2$ ，而得結論。

(4) 根據定義

$$\begin{cases} h(2,k) = h(2,k-1) - 2\left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(1,k) = \left\lceil \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} 2h(2,k) - h(1,k) &= 2h(2,k-1) - 5\left\lfloor \frac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{h(1,k-1)}{2} \right\rceil \\ &= 2h(2,k-1) - 5\left\lfloor \frac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor + 3\left\lfloor \frac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor - h(1,k-1) \\ &\geq 2h(2,k-1) - 5 \times \frac{h(2,k-1)}{2} + 3\left(\frac{h(1,k-1)-1}{2}\right) - h(1,k-1) \\ &= \frac{h(1,k-1) - h(2,k-1) - 3}{2} \end{aligned}$$

再利用 (2) 的 $2h(2,k) - h(1,k) \geq -2,\ \forall k \in \mathbb{N}$ 。

□

接下來我們討論最後的幾次行動，對於大於或等於 5 的正整數 n 而言，考慮最後的 7 次行動，發現 $h(1,k),\ h(2,k)$ 的數值是固定的，詳細的過程在**定理** 24 討論：

定理 24.
當 $n \geq 5$ 時， $h_n(l,k)$ 之值是唯一確定的（如下表所示），其中 $l = 1,2,\ g(n,3)-6 \leq k \leq g(n,3),\ k \in \mathbb{N}$ 。

k	$g(n,3)-6$	$g(n,3)-5$	$g(n,3)-4$	$g(n,3)-3$	$g(n,3)-2$	$g(n,3)-1$	$g(n,3)$
$h(2,k)$	2	1	2	1	2	0	1
$h(1,k)$	3	3	2	2	1	2	1

證明.
根據定義， $h(2,g(n,3)) = h(1,g(n,3)) = 1$ ，利用**定理** 22 往前推 $h(2,k-1)$ 及 $h(1,k-1)$ 之值：

$h(2,g(n,3)-1)$	1	3	-2	0
$h(1,g(n,3)-1)$	1	0	3	2

由 **定理** 23 及 $g(n,3)$ 的定義，得 $h(2, g(n,3)-1)=0,\ h(1, g(n,3)-1)=2$ 。

$h(2,g(n,3)-2)$	5	7	2	4
$h(1,g(n,3)-2)$	-1	-2	1	0

由 **定理** 23 (1) ，得 $h(2,g(n,3)-2)=2,\ h(1,g(n,3)-2)=1$ 。

$h(2,g(n,3)-3)$	-1	1	-4	-2
$h(1,g(n,3)-3)$	3	2	5	4

顯然 $h(2,g(n,3)-3)=1,\ h(1,g(n,3)-3)=2$ 。

$h(2,g(n,3)-4)$	3	5	0	2
$h(1,g(n,3)-4)$	1	0	3	2

由 **定理** 23 ，得 $h(2,g(n,3)-4)=2,\ h(1,g(n,3)-4)=2$ 。

$h(2,g(n,3)-5)$	1	3	-2	0
$h(1,g(n,3)-5)$	3	2	5	4

由 **定理** 23 ，得 $h(2,g(n,3)-5)=1,\ h(1,g(n,3)-5)=3$ 。

$h(2,g(n,3)-6)$	5	7	2	4
$h(1,g(n,3)-6)$	1	0	3	2

由 **定理** 23 ，得 $h(2,g(n,3)-6)=2,\ h(1,g(n,3)-6)=3$ 。 □

如果將 $h(2,g(n,3)-6)=2,\ h(1,g(n,3)-6)=3$ 再往前推

$h(2,g(n,3)-7)$	3	5	0	2
$h(1,g(n,3)-7)$	3	2	5	4

由 **定理** 23 ，得 $(h(2,g(n,3)-7), h(1,g(n,3)-6))=(3,3)$ 或 $(2,4)$ ，而實際上這兩種情形 皆有可能。

2.6.1 $g(n,3)$ 的上下界估計–方法 1

定理 25.
$\hat{g}(n,3)-8 \le g(n,3) \le \hat{g}(n,3)+8$ 若 $n \ge 12$ 。

證明.
根據 $\hat{g}(n,3)$ 的定義， $0 < \hat{h}(1,\hat{g}(n,3) \le 1,\ 0\hat{h}(2,\hat{g}(n,3)) \le 1$ ，配合**定理** 21 ，得 $-3 < h(1,\hat{g}(n,3)) < 5,\ -2 < h(2,\hat{g}(n,3)) \le 1$ 因此， $h(1,\hat{g}(n,3))=1$ 或 2 或 3 或 4 且 $h(2,\hat{g}(n,3))=0$ 或 1 或 2 或 3 接下來討論這些組合：

(1) $(h(1,\hat{g}(n,3)), h(2,\hat{g}(n,3)))=(1,0),(3,0),(4,0),(1,3),(2,3)$ 時，由**定理** 23 不可能！

(2) $(h(1,\hat{g}(n,3)),h(2,\hat{g}(n,3)))=(4,1)$ 時， $(h(1,\hat{g}(n,3)+1),h(2,\hat{g}(n,3)+1))=(2,3)$ 和**定理** 23 矛盾！

(3) $(h(1,\hat{g}(n,3)),h(2,\hat{g}(n,3)))=(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)$ 時，由**定理** 24， $g(n,3)\le\hat{g}(n,3)+6$。

(4) $(h(1,\hat{g}(n,3)),h(2,\hat{g}(n,3)))=(3,3),(4,2)$ 時， $(h(1,\hat{g}(n,3)+1),h(2,\hat{g}(n,3)+1))=(3,2)$ 由**定理** 24 知 $g(n,3)\le\hat{g}(n,3)+7$ 。

(5) $(h(1,\hat{g}(n,3)),h(2,\hat{g}(n,3)))=(4,3)$ 時，$(h(1,\hat{g}(n,3)+1),h(2,\hat{g}(n,3)+1))=(3,3)$ 由**定理** 24 和 (4) 知 $g(n,3)\le\hat{g}(n,3)+8$ 。

根據 (1) ~ (5) ，得 $g(n,3)\le\hat{g}(n,3)+8$ 。另一方面，根據 $\hat{g}(n,3)$ 的定義，

$$\max\left\{\hat{h}(1,\hat{g}(n,3)-1),\hat{h}(2,\hat{g}(n,3)-1)\right\}>1$$

但是

$$\hat{h}(1,k)=\frac{F_k}{2^k}\times n\le\frac{F_{k+1}}{2^k}\times n=\hat{h}(1,k)$$

，所以 $\hat{h}(1,\hat{g}(n,3)-1)>1$ ，根據 $\hat{h}(1,k)=\dfrac{F_{k+1}}{2^k}$ ，得

$$\frac{\hat{h}(1,k)}{\hat{h}(1,k+t)}=2^t\times\frac{F_{k+1}}{F_{k+t+1}},\forall k\in\mathbb{N}$$

其中 $F_{l+2}=F_{l+1}+F_l,\ F_0=0,\ F_1=1$ ，由數學歸納法，易知 $\dfrac{3}{5}\le\dfrac{F_l}{F_{l+1}}\le\dfrac{5}{8}$ ，若 $l\ge4$ ，
因此，當 $\hat{g}(n,3)\ge11$ 時， $\dfrac{\hat{h}(1,\hat{g}(n,3)-9)}{\hat{h}(1,\hat{g}(n,3)-1)}=2^8\times\dfrac{F_{\hat{g}(n,3)-8}}{F_{\hat{g}(n,3)}}\ge\left(\dfrac{6}{5}\right)^8$ ，
再配合 $\hat{h}(1,\hat{g}(n,3)-1)$ ，知 $\hat{h}(1,\hat{g}(n,3)-9)>\left(\dfrac{6}{5}\right)^8$ ，在加上**定理** 21 ，
知 $h(1,\hat{g}(n,3)-9)>\left(\dfrac{6}{5}\right)^8-3>1$ ，即 $g(n,3)\ge\hat{g}(n,3)-8$ ，因此，接下來討論怎樣的 n 值會使得 $\hat{g}(n,3)\ge11$ ：

由於 $\hat{g}(n,3)$ 的定義為 $\min=\left\{k|\dfrac{F_{k+1}}{2^k}\times n\le1,\ k\in\mathbb{N}\right\}$ ，易知 $\hat{g}(n,3)$ 對於 n 而言為遞增函數，直接計算得 $\hat{g}(12,3)=11$ ，故當 $n\ge12$ 時， $g(n,3)\ge\hat{g}(n,3)-8$ 。 □

2.6.2 $g(n,3)$ 的上下界估計–方法 2

定理 26.

$g(n,3)\ge\min\left\{k\left|\dfrac{F_k}{2^k}>\dfrac{21}{16n},\ k\in\mathbb{N}\right.\right\}+1$ ，其中 $F_{l+2}=F_l+F_{l+1},\ F_0=0,F_1=1$。

證明.

根據定義，

$$\begin{cases}h(2,k+1)-\hat{h}(2,k+1)=\left(h(2,k)-2\left\lfloor\dfrac{h(2,k)}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\dfrac{h(1,k)}{2}\right\rfloor-\dfrac{\hat{h}(1,k)}{2}\\ h(1,k+1)-\hat{h}(1,k+1)=\left(\left\lfloor\dfrac{h(2,k)}{2}\right\rfloor-\dfrac{\hat{h}(2,k)}{2}\right)+\left(\left\lceil\dfrac{h(1,k)}{2}\right\rceil-\dfrac{\hat{h}(1,k)}{2}\right)\end{cases}$$

接下來利用類似**定理** 21 的概念來處理問題，若已知 $h(2,k)$ 和 $h(1,k)$ 的奇偶性且掌握 $h(2,k)-\hat{h}(2,k)$ 和 $h(1,k)-\hat{h}(1,k)$ 的範圍,即可得到 $h(2,k+1)-\hat{h}(2,k+1)$ 和 $h(1,k+1)-\hat{h}(1,k+1)$ 的範圍（因為掌握一些資訊，所以結果會比**定理** 21 好一些），然後再配合**定理** 24 的結論，在最後幾次的行動中， $h(2,k)$ 和 $h(1,k)$ 的數值是明確的，就可以得到下表：

k	$g(n,3)-6$	$g(n,3)-5$	$g(n,3)-4$	$g(n,3)-3$	$g(n,3)-2$
$h(2,k)$	2	1	2	1	1
$h(1,k)$	3	3	2	2	1
$h(2,k)-\hat{h}(2,k)$	$-2\sim 3$	$-2\sim \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}\sim\frac{5}{2}$	$-1\sim\frac{11}{8}$	$\frac{3}{8}\sim-\frac{37}{16}$
$h(1,k)-\hat{h}(1,k)$	$-3\sim 4$	$-2\sim 4$	$-2\sim\frac{11}{4}$	$-\frac{5}{4}\sim\frac{21}{8}$	$-\frac{13}{8}\sim\frac{3}{2}$

在此舉例說明：
當 $k=g(n,3)-6$ 時， $h(2,k),\ h(1,k)=3$ ，所以

$$h(2,k+1)-\hat{h}(2,k+1)=\frac{h(1,k)-\hat{h}(1,k)-1}{2}$$
$$h(1,k+1)-\hat{h}(1,k+1)=\frac{h(2,k)-\hat{h}(2,k)+h(1,k)-\hat{h}(1,k)+1}{2}$$

配合**定理** 21 的結論， $-2<h(2,k)-\hat{h}(2,k)<3,\ -3<h(1,k)-\hat{h}(1,k)<4$ ，得到 $-2<h(2,k+1)-\hat{h}(2,k+1)<\frac{3}{2},\ -2<h(1,k+1)-\hat{h}(1,k+1)<4$ 。而觀察到表中，當 $k=g(n,3)-1$ 時， $h(2,k)=0$ 且 $-\frac{21}{16}<h(2,k)-\hat{h}(2,k)<\frac{1}{4}$ ，所以 $\hat{h}(2,g(n,3)-1)<\frac{21}{16}$ ，而根據**定理** 19 ，

$$\hat{h}(2,g(n,3)-1)=\frac{F_{g(n,3)-1}}{2^{g(n,3)-1}}\times n$$

因此 $\frac{F_{g(n,3)-1}}{2^{g(n,3)-1}}<\frac{21}{16n}$ ，故 $g(n,3)\geq\min\left\{k\,\middle|\,\frac{F_k}{2^k}>\frac{21}{16n},\ k\in\mathbb{N}\right\}+1$ 。 □

由於 $\hat{h}(2,k)$ 及 $h(1,k)$ 始終 ≥ 0 ，用**定理** 26 的方法無法得出上界，故採用另一個方法：

定理 27.
$g(n,3)\leq n-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+3$ 。

證明.
當 $n=3,4$ 時，直接計算可得結論，因此接下來討論 $n>4$ 的情形，根據定義可得下列兩個資訊：

(1) 若 $h(2,k)\neq 0,1$ ，則 $h(3,k+1)-h(3,k)\geq 1$

(2) $h(2,k)=0,1$ 的充要條件是 $(h(2,k),h(1,k))=(1,3),(1,2),(2,0),(1,1)$ 其中 $k\in\mathbb{N}$

而比較**定理** 23 的資訊，知若 $k\neq g(n,3)-5,\ g(n,3)-3,\ g(n,3)-1,\ g(n,3)$ ，
則 $h(3,k+1)-h(3,k)\geq 1$ ，根據定義及**定理** 23 ，知 $h(3,2)=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor, h(3,g(n,3)-6)=n-5$ ，配合當 $2\leq k\leq g(n,3)-6$ 時， $\{h(3,k)\}$ 為嚴格遞增數列，
因此， $(g(n,3)-6)-2\leq n-5-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$ ，即 $g(n,3)\leq n-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+3$ 。 □

2.6.3 $g(n,3)$ 的上下界估計–方法 3

定理 28.

$$8+\min\left\{k \,\middle|\, \left(\frac{11}{15}\right)^k \le \frac{5}{n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor},\ k\in\mathbb{N}\right\} \le g(n,3) \le 8+\max\left\{k \,\middle|\, \left(\frac{11}{12}\right)^k \ge \frac{5}{n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor},\ k\in\mathbb{N}\right\}。$$

證明.

設 $2 \le k \le g(n,3)-2$ 根據定義，

$$\begin{cases} h(2,k) = h(2,k-1) - 2\left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor \\ h(1,k) = \left\lfloor \dfrac{h(2,k-1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{h(1,k-1)}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

接下來利用定理 23 的結論：

$$h(2,k-1) \le h(1,k-1) \le 2h(2,k-1)+2, \tag{1}$$

及討論 $h(2,k-1)$ 和 $h(2,k-1)$ 的奇偶性得到 $h(1,k)$ 和 $h(2,k)$ 的關係，底下分成四種情形討論：

(1) 若 $h(2,k-1)$ 為奇數、 $h(1,k-1)$ 為奇數，則
$h(2,k) = \dfrac{h(1,k-1)+1}{2},\ h(1,k) = \dfrac{h(1,k-1)+h(2,k-1)}{2}$ ，化簡後得
$h(1,k-1) = 2h(2,k)-1,\ h(2,k-1) = 2h(1,k)-2h(2,k)+1$ ，再利用 (1) 及奇偶性
$(2h(1,k)-2h(2,k)+1)+1 \le 2h(2,k)-1 \le 2(2h(1,k)-2h(2,k)+1)+1$，即
$\dfrac{h(1,k)+1}{2} \le h(2,k) \le \dfrac{2h(1,k)+2}{3}$ ；

(2) 若 $h(2,k-1)$ 為奇數、 $h(1,k-1)$ 為偶數，則
$h(2,k) = \dfrac{h(1,k-1)+2}{2},\ h(1,k) = \dfrac{h(1,k-1)+h(2,k-1)-1}{2}$ ，化簡後得
$h(1,k-1) = 2h(2,k)-2,\ h(2,k-1) = 2h(1,k)-2h(2,k)+3$ ，再利用 (1) 及奇偶性
$(2h(1,k)-2h(2,k)+3)+1 \le 2h(2,k)-2 \le 2(2h(1,k)-2h(2,k)+3)+2$ ，即
$\dfrac{h(1,k)+3}{2} \le h(2,k) \le \dfrac{2h(1,k)+5}{3}$ ；

(3) 若 $h(2,k-1)$ 為偶數、 $h(1,k-1)$ 為奇數，則
$h(2,k) = \dfrac{h(1,k-1)-1}{2},\ h(1,k) = \dfrac{h(1,k-1)+h(2,k-1)+1}{2}$ ，化簡後得
$h(1,k-1) = 2h(2,k)+1,\ h(2,k-1) = 2h(1,k)-2h(2,k)-2$ ，再利用 (1) 及奇偶性
$(2h(1,k)-2h(2,k)-2)+1 \le 2h(2,k)+1 \le 2(2h(1,k)-2h(2,k)-2)+1$ ，即
$\dfrac{h(1,k)-1}{2} \le h(2,k) \le \dfrac{2h(1,k)-2}{3}$ ；

(4) 若 $h(2,k-1)$ 為偶數、 $h(1,k-1)$ 為偶數，則
$h(2,k) = \dfrac{h(1,k-1)}{2},\ h(1,k) = \dfrac{h(1,k-1)+h(2,k-1)}{2}$ ，化簡後得
$h(1,k-1) = 2h(2,k),\ h(2,k-1) = 2h(1,k)-2h(2,k)$ ，再利用 (1) 及奇偶性
$2h(1,k)-2h(2,k) \le 2h(2,k) \le 2(2h(1,k)-2h(2,k))+2$ ，即
$\dfrac{h(1,k)}{2} \le h(2,k) \le \dfrac{2h(1,k)+1}{3}$ 。

綜合 (1) ~ (4) ， $\dfrac{h(1,k)-1}{2}$ ，設 $h(1,k)+h(2,k)=t$ ，透過直接計算可知

$$h(1,k+1)+h(2,k+1)=t-\left\lfloor\frac{h(2,k)}{2}\right\rfloor$$

因此，接下來討論 $\left\lfloor\dfrac{h(2,k)}{2}\right\rfloor$ 的範圍：

將 $h(1,k)=t-h(2,k)$ 代入 $\dfrac{h(1,k)-1}{2}\le h(2,k)\le\dfrac{2h(1,k)+5}{2}$ ，可化簡為

$$\frac{t-1}{3}\le h(2,k)\le\frac{2t+5}{5}$$

討論 $h(2,k)$ 的奇偶性可得 $\dfrac{t-4}{6}\le\left\lfloor\dfrac{h(2,k)}{2}\right\rfloor\le\dfrac{2t+5}{10}$ ，代回

$$h(1,k+1)+h(2,k+1)=t-\left\lfloor\frac{h(2,k)}{2}\right\rfloor$$

可得

$$\frac{8t-5}{10}\le h(1,k+1)+h(2,k+1)\le\frac{5t+4}{6}$$

若 $t\ge5$ ，配合 $h(1,k+1)+h(2,k+1)\in\mathbb{N}$ ，可將上式改寫成

$$\frac{11}{15}t\le h(1,k+1)+h(2,k+1)\le\frac{11}{12}t$$

而

$$h(1,2)+h(2,2)=n-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor,\ h(1,g(n,3)-6)+h(2,g(n,3)-6)=5$$

若利用

$$h(1,k)+h(2,k)=t$$

則

$$\frac{11}{15}t\le h(1,k+1)+h(2,k+1)\le\frac{11}{12}t$$

可得

$$8+\min\left\{k\left|\left(\frac{11}{15}\right)^k\le\frac{5}{n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor},\ k\in\mathbb{N}\right.\right\}\le g(n,3)\le8+\max\left\{k\left|\left(\frac{11}{12}\right)^k\ge\frac{5}{n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor},\ k\in\mathbb{N}\right.\right\}$$

□

比較估算 $g(n,3)$ 的方法 1 、方法 2 和方法 3 ，可以發現定理 25 能得到最少的可能性，但其使用範圍有 $n\ge12$ 這樣的限制，而方法 2 和方法 3 的部分，定理 28 所得出的上界比定理 27 好的多，而下界的部分，定理 28 與定理 26 的結果是差不多的。例如 $g(100,3)$ ， 以定理 25 得到 $13\le g(100,3)\le29$ ，以定理 26 和定理 27 可得 $18\le g(100,3)\le78$ ，而以定理 28 可得$17\le g(100,3)\le39$ 。

3 未來展望與應用

3.1 討論

不難發現， $g(n,r)$ 的情況比 $f(n,r)$ 複雜得多，目前也僅處理到 $g(n,3)$ 的情況，以下列出一些以電腦 $C++$ 程式或是觀察數據而得到的結果， 目前無法使用數學方法證明：

1.
$$\hat{g}(n,3)-2 \le g(n,3) \le \hat{g}(n,3), \forall n \ne 4, n \ge 3$$
其中 $\hat{g}(n,3) = \min\left\{k \,\middle|\, \frac{F_k}{2^k} \times n \le 1, k \in \mathbb{N}\right\}$

2.
$$\begin{aligned} &-2 < h(3,k) - \hat{h}(3,k) \le 0 \\ &-1 < h(2,k) - \hat{h}(2,k) < 2 \\ &-1 < h(1,k) - \hat{h}(1,k) < 2 \end{aligned}$$
若此結果確實正確,可以使定理 26 的結果更加精確，得到 $\frac{3}{n} < \frac{F_{g(n,3)-3}}{2^{g(n,3)-5}} < \frac{5}{n}$ 其解的個數大約為 $2 \sim 3$ 個。

3. $g(n_1,3) \ge g(n_2,3), \forall n_1 > n_2 \ge 3,\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ 。

4. 在 $g(n,4)$ 的情況下，去除天花板及地板符號，得到：
$$\hat{h}(1,k) = \frac{1}{2^k} \times \left[\hat{h}(1,k-1) + 2\hat{h}(1,k-2) - \hat{h}(1,k-3)\right]$$
在 $g(n,5)$ 的情況下，去除天花板及地板符號，得到：
$$\hat{h}(1,k) = \frac{1}{2^k} \times \left[\hat{h}(1,k-1) + 3\hat{h}(1,k-2) - 2\hat{h}(1,k-3) - \hat{h}(1,k-4)\right]$$
因此推測，在 $g(n,r)$ 的情況下，去除天花板及地板符號， $\hat{h}(1,k)$ 可寫成：
$$\begin{aligned} \hat{h}(1,k) \quad = \quad & \frac{1}{2^k} \times \Big[\hat{h}(1,k-1) + (r-2)\hat{h}(1,k-2) - (r-3)\hat{h}(1,k-3) \\ & - (r-4)\hat{h}(1,k-4) - \cdots - (r-(r-1))\hat{h}(1,k-4)\Big] \end{aligned}$$
而 $g(n,3)$ 所得到的與費氏數列有關，但明顯 $g(n,r)$ 的情況更加複雜。

3.2 未來展望

1. 找到更佳的計算 $f(n,r)$ 的方法。
2. 試著證明 3.1 討論中觀察到的結果。
3. 找到 $g(n,3)$ 更佳的上界與下界。
4. 嘗試計算 $g(n,r)$ 的值。