The stamp covering problem of path

國立花蓮女子高級中學 劉薇
指導老師 吳仲奇

1 簡介

本次研究主要討論的是由一連串類似 IC 問題的推演進而衍生出的直線之郵票覆蓋數, 即於直線圖形上取 n 個點並填入數字, 求其所能形成的最大連續正整數. 對於長度為 n 的直線圖, 過去的研究所得到 IC 數的最佳上界為 $\frac{n(n+1)}{2}-1$, 但在 $n \geq 5$ 時, 欲排出此圖形的最大連續數時, 直線圖形中的某些數值會重複出現, 導致最大值少於無聊上界之值.
所謂郵票問題所探討的就是給定所取張數 n 及 m 種面額, 並使其組合出從 1 開始的連續正整數, 探討其所能達到的最大值. 如圖 1 所示. 進一步探討與其相似的圖形所形成的「直線 IC 著色」, 即於直線圖形上給定 n 格格數, 於其中填入不超過格數之正整數, 不相鄰者不能組合, 如圖 2 所示. 簡單來說, 郵票問題是一種任意兩頂點間彼此相連的 IC 著色, 而我們主要探討的則是直線的 IC 著色及變形後的 IC 著色.

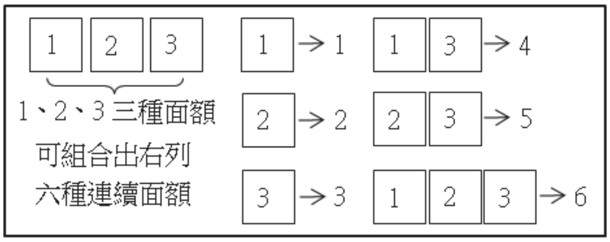


圖 1

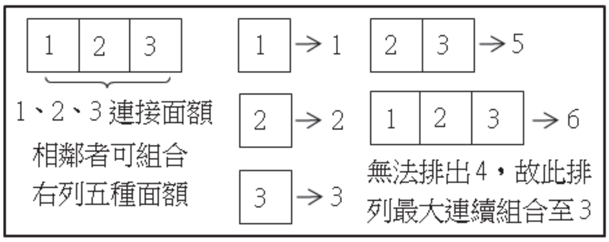


圖 2

設 G 是一個圖, $M(G)$ 是 G 的郵票覆蓋數, $M'(G)$ 是 G 的 IC 數(定義詳見第二節, 名詞釋義), 主要的研究結果是改進了直線圖的上下界.
對於長度為 n 的直線圖 P_n, 過去最好的結果是：

定理. $\frac{n^2+6n-4}{4} \leq M'(P_n) \leq M(P_n) \leq \frac{n(n+1)}{2}-1$. *(參見[2]的結果)*

而我們得到的結果為

定理. $\frac{n^2+8n-8}{4} \leq M'(P_n) \leq M(P_n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3$ *(*當 $n \geq 5$ 時*).*

事實上, 綜合我們的各種證明方法, 當 $n \geq 6$ 時, 可以進一步將 $M'(P_n)$ 的上界降低到 $\frac{n(n+1)}{2} - 3$

接著我們推導出對於長度為 n_c 的圓圈 C_n:

定理. 當 $7 \geq n$ 時, $6n_c - 11 \leq M(C_n) \leq n_c(n_c-1)+1$; 當 $n \geq 7$ 時, $\frac{n_c^2+2n_c-1}{2} \leq M(C_n) \leq n_c(n_c-1)+1$.

2 基本圖論與名詞定義

定義 1. 給定一個圖 G, 圖上的一種著色*(coloring)*, 就相當於分配正整數至任意圖上之頂點. 也就是說, 圖 G 的一個著色可以視為一個由頂點 $V(G)$ 到正整數的函數 f.

定義 2. 對於 G 的一個子圖 H 及 G 的一種著色 f , 定義 $f_s(H) = \sum_{\nu \in V(H)} f(\nu)$

於 1992 年 Glenn Chappel 曾研究一個 "subgraph sums" 問題, 這個問題在 2005 年時在 Salehi, Lee, Khatirinejad 的論文中被稱為 IC-著色問題.

定義 3. 給定一個圖 G 及著色 f, 如果對於所有小於等於 $f_s(G)$ 的正整數 k, 都可以找到一個 G 的連通子圖 H 使得 $f_s(H) = k$, 則我們稱 f 為 G 的 *IC*-著色.
定義 *IC*-數 $M'(G) = \max\{f_s(H) | \ f$ 是 *IC* 著色$\}$

1995 年 Penrice 介紹的郵票覆蓋(stamp covering)的概念如下：給定圖 G、 著色 f 及正整數 K, 如果對於每個小於等於 K 的正整數 k 都存在一個 G 的連通子圖 H, 使得 $f_s(H) = k$, 則稱 f 是 G 的一個 K-標籤(K-labeling). (詳見[2])

定義 4. 如果 f 是 *IC*-著色也就是 f 是 $f_s(G)$-標籤的意思. 定義郵票覆蓋數*(stamp covering number)* $M(G)$ 為在圖 G 上存在 K-標籤的最大整數 K.

此篇報告主要是在研究直線的郵票覆蓋數, 而郵票覆蓋數與 IC 數最大的不同在於 IC 數其頂點內數字總和必須等於所有數字總和, 而郵票覆蓋數則無此限制, 使組合數盡可能的大即可.

3 直線圖之上界

定義名詞：
P_n: 長度為 n 的直線圖.
S：直線上所有數字的總和, 即 $f_s(P_n)$.

因為主要研究的對象是直線圖形, 我們簡化符號令 $M(n) = M(P_n)$ 而 $M'(n) = M'(P_n)$. n 較小時, 可用電腦程式求出 $M(n)$ 和 $M'(n)$, n 比較大時求出其上下界, 且盡可能得到較大下界與較小上界, 以逼近 $M(n)$ 和 $M'(n)$.

定理 1. 直線圖明顯上界為 $M(n) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

證明. 在 P_n 中長度為 1 的連通子圖有 n 個, 從左到右標為 $H_{(1,1)}, H_{(1,2)}, \cdots, H_{(1,n)}$.
在 P_n 中長度為 2 的連通子圖有 $n-1$ 個, 從左到右標為 $H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, \cdots, H_{(2,n-1)}$.
依此類推,總共有 $n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個連通子圖, 所以至多有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個著色數, 因此 $M(n) \le \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

定理 2. $M(n) \le \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 (n \ge 4)$.

證明. 假設 $M(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$, 則 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個連通子圖之著色數均相異, 特別的, $f_s(H_{(1,1)}), \cdots f_s(H_{(1,n)})$ 均相異. 將其由小至大排列分別大於或等於 $1,2,3,\cdots,n$.
因此 $\dfrac{n(n+1)}{2} = f_s(P_n) = \sum_{i=1}^{n} f_s(H_{(1,i)}) \ge 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
所以 $\{f_s(H_{(1,1)}), \cdots, f_s(H_{(1,n)})\} = \{1,2,3,\cdots,n\}$.

接著考慮 $H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, \cdots, H_{(2,n-1)}$, 顯然 $f_s(H_{(2,i)}) \le n+(n-1) = 2n-1$.
又 $f_s(H_{(2,i)}) \ne f_s(H_{(1,j)})$,對於任意 i,j, 所以 $f_s(H_{(2,i)}) \ge n+1$.
所以 $\{f_s(H_{(2,1)}), \cdots, f_s(H_{(2,n-1)})\} = \{n+1, n+2, \cdots, 2n-1\}$.

如果 $f_s(H_{(2,j)}) = 2n-1$, 則 $H_{(2,j)}$ 之著色分別為 $n, n-1$, 首先假設 $f(j)=n, f(j+1)=n-1$, 因為有一長度 2 之連通子圖之著色數為 $2n-2$, 則必然有 $f(j-1)=n-2$, 又有一長度 2 之連通子圖之著色數為 $2n-3$, $2n-3=n+(n-3)$ 或 $2n-3=(n-1)+(n-2)$, 但這兩種情況均不可能是長度 2 之連通 f 圖之著色數, 故矛盾.

若假設$f(j+1)=n, f(j)=n-1$, 則類似證明也可推得矛盾. □

定理 3. $M(n) \le \dfrac{n(n+1)}{2} - 2$.

證明. 若 $M(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$, 則所有連通子圖中恰有兩相異連通子圖有相同之著色數.

1. 若所有長度 1 之子圖著色數均相異, 則著色數由小至大分別大於等於 $1,2,3,\cdots,n$, 因此
$$f_s(G)\sum_{i=1}^{n} f_s(H_{(1,i)}) \ge 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$
與 $f_s(G) = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$ 不合. 所以恰有兩個長度 1 之子圖有相同著色數,
亦即 $f_s(H_{(1,k)}) = f_s(H_{(1,l)}), 1 \le k < l \le n$; 且其他連通子圖之著色數均相異.
所以總共有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個連通子圖, 有 $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$ 個相異著色數. 設 $a = f_s(H_{(1,k)})$.
由於 $M(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$, 因此 $\{f_s(H_{(1,1)}), \cdots, f_s(H_{(n,1)})\} = \{1,2,3,\cdots,\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$
2. 如果 $k+1 \ne l$, 則考慮 Γ_1 為從 k 到 $l-1$ 的連通子圖, 考慮 Γ_2 為從 $k+1$ 到 l 的連通子圖, 則 $f_s(\Gamma_1) = f_s(\Gamma_2)$, 矛盾. 所以 $l = k+1$.
3. 以 S_1 代表長度為 1 的子圖的著色數所成之及合, S_2 代表長度為2 的子圖著色數所成之及合, 則$S_1 \cap S_2 = \varphi$
4. 若 $a = n-1$, 則$S_1 = \{1,2,\cdots,n-1\}$, 則$\forall x \in S_2$, $n \le x \le 2n-2$,
所以$S_2 \subset \{n, n+1, \cdots, 2n-2\}$. 但是 S_2 共 $n-1$ 個元素所以 $S_2 = \{n, n+1, \cdots, 2n-2\}$.

假設 $f(j)=f(j+1)=n-1, f_s(H_{(2,j)})=2n-2, 2n-3\in S_2$ 所以 $f(j-1)=n-2$ 或 $f(j+2)=n-2$, 可假設 $f(j-1)=n-2$. $2n-4\in S_2$ 所以 $f(j+1)=n-3$.
如此一來利用 $2n-5\in S_2$ 得到矛盾.

5. 若 $k=n-2$, 則 $f(1),f(2),\cdots,f(n)$ 由小到大分別為 $1,2,3,\cdots,n-2,n-2,n$. 因為 $\forall x\in S_2, n-1\le x\le 2n-2$, 則 $S_2=\{n-1,n+1,\cdots,2n-2\}$.
設 $f(j)=f(j+1)=n-2$. 因為 $2n-2\in S_2$ 所以可假設 $f(j+2)=n$, 因為 $2n-3\in S2$ 所以 $f(j+3)=n-3$. 由於 $2n-5\in S2$ 即得到矛盾.

6. 若 $k=n-3$ 且 $S_1=\{1,2,3,\cdots,n-3,n-3,n-1,n\}$. 因為 $\forall x\in S_2, n-2\le x\le 2n-1$, 所以 $S_2\subset\{n-2,n+1,\cdots,2n-1\}$.
因為 $2n-2$ 不屬於 S_2, 所以得到 $S_2=\{n-2,n+1,\cdots,2n-3,2n-1\}$.
因為 $2n-3\in S_2$ 所以 $f(j+2)=n$, 又因為 $2n-1\in S_2$, 所以 $f(j+3)=n-1$. 由於 $2n-4\in S_2$ 即得到矛盾.

7. 若 $k=n-3$ 且 $S_1=\{1,2,3\cdots,n-3,n-3,n-2,n+1\}$.
因為 $\forall x\in S_2, n-1\le x\le 2n-1$, 所以 $S_2\subset\{n-1,n,n+2,\cdots,2n-1\}$, 且兩個集合間相差一個元素.
如果 $2n-1$ 不屬於 S_2 則 $2n-2,2n-3,2n-4\in S_2$ 可以得到矛盾.
如果 $2n-1\in S_2$ 假設 $f(t)=n+1, f(t+1)=n-2$. 則考慮 $2n-2,2n-3,2n-4$ 至屬於多只有一個元素不屬於 S_2 可以得到矛盾.

8. 持續類似的討論繼續往下做, 每種情況均可以得到矛盾. 但是我們還無法給出一個完全完整的證明.

9. 教授提供以下的證明:
將 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n)$ 由小到大記為 $f_1,f_2,f_3,\cdot,f_n$. 令 $T_1=\{1,2,\cdots,f_n\}$, 則 $S_1\subset T_1$, 令$T_2=\{f_n+1,f_n+2,\cdots,f_n+f_{n-1}\}$, 則 $S_1\cup S_2\subset T_1\cup T_2$. 依此類推可以定義 T_k 滿足 $S_1\cup\cdots\cup S_k\subset T_1\cup T_k$. 且

$$S_1\cup\cdots\cup S_n=T_1\cup\cdots\cup T_n=\{1,2,\cdots,s\},$$

其中 $s=\dfrac{n(n+1)}{2}-1$.
可以證明

$$S_1\cup\cdots\cup S_{n-1}=T_1\cup\cdots\cup T_{n-1}=\{1,2,\cdots,s-1\};$$
$$S_1\cup\cdots\cup S_{n-2}=T_1\cup\cdots\cup T_{n-2}=\{1,2,\cdots,s-3\};$$
$$S_1\cup\cdots\cup S_{n-3}=T_1\cup\cdots\cup T_{n-3}=\{1,2,\cdots,s-6\};$$

所以 $S_n=\{s\}, S_{n-1}=\{s-1,s-2\}, S_{n-2}=\{s-3,s-4,s-5\}$.
由於$S_n=\{s\}, S_{n-1}=\{s-1,s-2\}$, 可以假設 $f(1)=1, f(n)=2, f(2)=x, f(n-1)=y$.
令 $A=f(3)+\cdots+f(n-2)$. 則 $A+x+y=s-3$; $\{A+x+1,A+y+2\}=\{s-4,s-5\}$.
因此 $x=3,y=3$ (矛盾) 或是 $x=4,y=2$.
如果 $x=4,y=2$ 則 $s-6$ 不屬於 S_{n-3} (矛盾), 故得證.

□

4 直線圖之下界

定理 4. 直線明顯下界是 n.

證明. 當格數$=n$, 著色方式為 $f_1=(1,1,1,1,\ldots,1)$, 如圖 3

由圖觀察, 可取 n 個 1 所形成的連通子圖 H_n □

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}}_{n\text{ 格}}$$

圖 3

定理 5. $m(n) \geq [\dfrac{n^2+4n}{4}]$.

證明. 著色方式為利用一正整數 k 與 1 組合著色, 由 $k-1$ 個 1 與 $n-k+1$ 個 k 排出之 f_2, 如圖 4

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & k & k & \cdots & k & k \\ \hline\end{array}}_{n\text{ 格}}$$

圖 4

由圖觀察,
當 $n \leq k+1$ 時, 可以取相鄰 n 個 1 所形成的連通子圖;
當 $n = tk$ 時, 可以取相鄰 t 個 k 所形成的連通子圖;
當 $n = tk+s$ 時, 可以取相鄰 t 個 k 加上與其相鄰的 s 個 1 所形成的連通子圖, 其中 $t \leq n-k+1$, $s \leq k-1$.
當 n 是奇數時取 $k = n+1/2$, 當 n 是偶數時取 $k = n+2/2$ 即得證. □

定理 6. $2 < n < 6$ 時, $m(n) \geq 3n-3$.

證明. 著色方式為 $f_3 = (1,3,3,3,\ldots,3,3,3,2)$, 如圖 5.

□

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ \hline\end{array}}_{n\text{ 格}}$$

圖 5

由圖觀察,
當 $n \leq 2$ 時, 可以取 n 所形成的連通子圖 H_{n1};
當 $n = 3k$ 時, 可以取相鄰 k 個 3 所形成的連通子圖 H_{n2};
當 $n = 3k+1$ 時, 可以取相鄰 k 個 3 加上與其相鄰的 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n3};
當 $n = 3k+2$ 時, 可以取相鄰 k 個 3 加上與其相鄰的 1 個 2 所形成的連通子圖 H_{n4};
又當 $2 < n < 6$ 時, f_3 所排出的最大連續組合數會比 f_2 還要來的大, 故在此範圍內, f_3排法可以作為直線的下界.

定理 7. $8 < n < 18$ 時, $m(n) \geq 7n-27$.

證明. 著色方式為 $f_4 = (1,2,3,7,7,\ldots,7,7,4,4,1)$, 如圖 6

由圖觀察,
當 $n \leq 4$ 時, 可以取 n 所形成的連通子圖 H_{n1};
當 $n = 5$ 時, 可以取 1 個 1 及與 1 相鄰的 1 個 4 所形成的連通子圖 H_{n2};

1	2	3	7	7	$\cdots$	7	4	4	1

n 格

圖 6

當 $n = 6$ 時, 可以取相鄰的 1 個 1, 1 個 2 及 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n3};
當 $n = 7k$ 時, 可以取相鄰 k 個 7 所形成的連通子圖 H_{n4};
當 $n = 7k + 1$ 時, 可以取相鄰 $k - 1$ 個 7 加上與其相鄰的 2 個 4 所形成的連通子圖 H_{n5};
當 $n = 7k + 2$ 時, 可以取相鄰 $k - 1$ 個 7 加上與其相鄰的 2 個 4 及 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n6};
當 $n = 7k + 3$ 時, 可以取相鄰 k 個 1 加上與其相鄰的 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n7};
當 $n = 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6$ 時, 可以取相鄰 k 個 7 再分別加上連通子圖 H_{n1}, H_{n2}, H_{n3};
又當 $6 < n < 18$ 時, f_4 排出的最大連續組合數會比 f_2 還要來的大, 不過當 $n = 8$ 時此著色為其連續最大組合, 而在 $n = 9$ 時最大連續組合數值已不是此著色, 故在 $8 < n < 18$ 範圍內, f_4 排法可以作為下界的最大值. □

先前於文獻資料[2]中有一組排法為 $(1, 1, \ldots, 1, k + 1, k + 1, \ldots, k + 1, k - 1)$, 如圖 7

1	1	1	$\ldots$	1	$k + 1$	$k{+}1$	$\cdots$	$k + 1$	k

n 格

圖 7

當 $n \le k - 1$ 時, 可以取相鄰 n 個 1 所形成的連通子圖 H_{n1};
當 $n = k$ 或 $k + 1$ 時, 可以取 n 所形成的連通子圖 H_{n2};
當 $n = t(k + 1) + s$ 時, 可以取相鄰 t 個 1 加上與其相連的 t 個 $k + 1$ 所形成的連通子圖 H_{n3}, 其中 $s \le k - 1$,$t \le n - k$;
當 $n = t(k + 1) + k$ 時, 可以取相鄰 t 個 $k + 1$ 加上與其相連的 k 所形成的連通子圖 H_{n4}, 其中 $t \le n - k$.

定理 8. $m(n) \ge [\frac{n^2 + 6n - 3}{4}]$.

證明.

1. 如圖 8, 著色方式為前面 k 個 2 後面接兩個 1, 中間有 $n - 2k - 3$ 個 $2k + 4$, 後面再接著一個 3 及 k 個 2

2	$\cdots$	2	1	1	$2k + 4$	$\cdots$	$2k + 4$	3	2	$\cdots$	2

n 格

圖 8

由圖觀察,
當 $n \le 3$ 時, 可以取 n 所形成的連通子圖 H_{n1};
當 $n = 2k$ 時, 可以取相鄰 k 個 2 所形成的連通子圖 H_{n2};
當 $n = 2k + 1$ 時, 可以取相鄰 k 個 2 加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n3};

當 $n=2k+2$ 時, 可以取相鄰 k 個 2 加上與其相鄰 2 個 1 所形成的連通子圖 H_{n4};
當 $n=2k+3$ 時, 可以取相鄰 k 個 2 加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n5};
當 $n=t(2k+4)$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 所形成的連通子圖 H_{n6};
當 $n=t(2k+4)+1$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n7};
當 $n=t(2k+4)+2$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上與其相鄰 2 個 1 所形成的連通子圖 H_{n8};
當 $n=t(2k+4)+3$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n9};
當 $n=t(2k+4)+2k+2$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上 H_{n4} 所形成的連通子圖 H_{n10};
當 $n=t(2k+4)+2k+3$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上 H_{n5} 所形成的連通子圖 H_{n11};
當 $n=(n-2k-3)(2k+4)+(2k+3)+1$ 時, 可以取相鄰 $n-2k-3$ 個 $2k+4$ 加上 H_{n4} 及與其相鄰的 1 個 1 所形成的連通子圖H_{n12};
當 $n=(n-2k-3)(2k+4)+(2k+3)+2$ 時, 可以取相鄰 $n-2k-3$ 個 $2k+4$ 加上 H_{n5} 及與其相鄰的 2 個 1 所形成的連通子圖H_{n13};
當 $n=(n-2k-3)(2k+4)+(2k+3)+2k+1$ 時, 可以取 $n-2k-3$ 個 $2k+4$ 加上 H_{n4} 及 H_{n3} 所形成的連通子圖 H_{n10};
當 $n=(n-2k-3)(2k+4)+(2k+3)+2k+2$ 時, 可以取 $n-2k-3$ 個 $2k+4$ 加上 H_{n5} 及 H_{n4} 所形成的連通子圖 H_{n11};

2. 如圖 9 , 著色方式為前面 k 個 2 後面接一個 1, 中間有 $n-2k-1$ 個 $2k+2$, 後面再接著 k 個 2

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & \cdots & 2 & 1 & 2k+2 & 2k+2 & \cdots & 2k+2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline\end{array}}_{n\text{ 格}}$$

圖 9

由圖觀察,
當 $n\le 2$ 時, 可以取 n 所形成的連通子圖 H_{n1};
當 $n=2k$ 時, 可以取相鄰 k 個 2 所形成的連通子圖 H_{n2};
當 $n=2k+1$ 時, 可以取相鄰 k 個 2 加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n3};
當 $n=t(2k+2)$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+2$ 所形成的連通子圖 H_{n4};
當 $n=t(2k+2)+1$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+2$ 加上與其相鄰 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n5};
當 $n=t(2k+2)+2k$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+2$ 加上與其相鄰 k 個 2 所形成的連通子圖 H_{n6};
當 $n=t(2k+2)+2k+1$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+2$ 加上 H_{n3} 所形成的連通子圖 H_{n7};
當 $n=t(2k+4)+2$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上與其相鄰 2 個 1 所形成的連通子圖 H_{n8};
當 $n=t(2k+4)+3$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n9};
當 $n=t(2k+4)+2k+2$ 時, 可以取相鄰 t 個 $2k+4$ 加上 H_{n4} 所形成的連通子圖 H_{n10};
當 $n=t(2k+4)+2k+3$ 時, 可以取相鄰 t 個 2 加上 H_{n5} 所形成的連通子圖 H_{n11}.

□

定理 9. $m(n)\ge [\dfrac{n^2+6n+13}{4}]$.

證明. 如圖 10, 著色方式為前面一個 1 和一個 2 後面接 k 個 1 及一個 3 , 中間有 $n-k-6$ 個 $k+7$, 後面再接著一個 $k+4$, 一個4 及一個 1.

1	2	1	$\cdots$	1	3	$k+7$	$\cdots$	$k+7$	$k+4$	4	1

n 格

圖 10

由圖觀察,
當 $n \le 4$ 時, 可以取 n 所形成的連通子圖 H_{n1};
當 $n = k$ 時, 可以取相鄰 k 個 1 所形成的連通子圖 H_{n2};
當 $n = k+1$ 時, 可以取 $k-2$ 個 1 加上與其相鄰的 1 個 2 及 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n3};
當 $n = k+2$ 時, 可以取相鄰 k 個 1 加上與其相鄰的 1 個 2 所形成的連通子圖 H_{n4};
當 $n = k+3$ 時, 可以取相鄰 k 個 1 加上與其相鄰 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n5};
當 $n = k+4$ 時, 可以取 1 個 $k+4$ 所形成的連通子圖 H_{n6};
當 $n = k+5$ 時, 可以取 k 個 1 加上與其相鄰的 1 個 2 及 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n7};
當 $n = k+6$ 時, 可以取 k 個 1 加上與其相鄰 1 個 1 以及 1 個 2 以及 1 個 3 所形成的連通子圖 H_{n8};
當 $n = t(k+7)$ 時, 可以取相鄰 t 個 $k+7$ 所形成的連通子圖 H_{n9};
當 $n = k+8$ 時, 可以取 1 個 $k+4$ 加上 1 個 4 所形成的連通子圖 H_{n10};
當 $n = k+9$ 時, 可以取 1 個 $k+4$ 加上與其相鄰的 1 個 4 及 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n11};
當 $n = t(k+7)$ 時, 可以取相鄰 t 個 $k+7$ 所形成的連通子圖 H_{n12};
當 $n = k+8$ 時, 可以取 1 個 $k+4$ 加上與其相鄰的 1 個 4 所形成的連通子圖 H_{n13};
當 $n = k+9$ 時, 可以取 1 個 $k+4$ 加上與其相鄰的 1 個 4 及 1 個 1 所形成的連通子圖 H_{n14};
當 $n = t(k+7)+k+2$ 時, 可以取相鄰 t 個 $k+7$ 加上與其相鄰的 1 個 3 及 $k-1$ 個 1 所形成的連通子圖 H_{n15};
當 $n = t(k+7)+k+5$ 時, 可以取相鄰 1 個 $k+7$ 加上 H_{n7} 所形成的連通子圖 H_{n16};
當 $n = t(k+7)+k+6$ 時, 可以取相鄰 1 個 $k+7$ 加上 H_{n8} 所形成的連通子圖 H_{n17}. □

由上述討論可得 $\dfrac{(n^2+6n+13)}{4} \le M'(n) \le M(n) \le \dfrac{n(n+1)}{2} - 2$. 接著將格數改為 N, 而 $N = L+n-1$, 討論格數夠大時的最大下界, 而 L 及 n 為變數.

定理 10. $m(n) \ge \dfrac{(N^2+6N+13)}{4}$.

證明. 如圖 11, 著色方式為前面有 $k-2$ 個 1, 一個 2, $n-2k-1$ 個 1, 一個 k, L 個 n, 一個$n-k$, 一個 $k+1$, $k-2$ 個 1, 長度為 $L+n-1$

1	$\cdots$	1	2	1	$\cdots$	1	k	n	$\cdots$	n	$n-k$	$k+1$	1	$\cdots$	1

$L+n-1$ 格

圖 11

由此著色方式所排出的最小值:
令 L, n 為固定的正整數
$k-2+2+n-2k-1+k+Ln+n-k+k+1+k-2 = k+(L+2)n-2$

由此可得知上式為k的一個斜率為正的線性函數, 所以 k 越大越好.
但 $k>2, n-2k-1>0$ 所以 $k<\frac{(n-1)}{2}$, 所以 k 取 3.
同理將 $k=3$ 代入上式 $3+(L+2)n-2=(L+2)n+1$, L,n 互為斜率為彼此的線性函數, 故 L,n 皆越大越好.
由此可知, 目前最大的下界值為, 當長度(令 N)為 $L+n-1$ 時, 總和為

$$(L+2)n+1=(N-n+1+2)n+1=-(n-\frac{(N+3)}{2})^2+\frac{(N^2+6N+13)}{4}$$

故當 $n=\frac{(N+3)}{2}$ 時, $m(n)=\frac{(N^2+6N+13)}{4}$.
當 $n=$ 偶數時, 與之最接近正整數為 $k=\frac{(N+5)}{2}$, $\frac{(N+1)}{2}$ 時, $m(n)=[\frac{(N^2+6N+13)}{4}]$
因此當格數為N時, 任何介於 1 到 $\frac{(N^2+6N+13)}{4}$ 的數都可被寫出來. □

定理 11. $m(n)\geq[\frac{(N^2+6N+21)}{4}]$.

證明. 如圖 12, 著色方式為前面有 $k-2$ 個 1, 一個 2, $n-2k-3$ 個 1, 一個 2, 一個 k, L 個 n, 一個 $n-k$, 一個 $k+1$, $k-2$ 個 1, 一個 2, 長度為 $L+n-1$.

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{\cdots}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{\cdots}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{k}\boxed{n}\boxed{\cdots}\boxed{n}\boxed{n-k}\boxed{n-k}\boxed{k+1}\boxed{1}\boxed{\cdots}\boxed{1}\boxed{2}}_{L+n-1\text{ 格}}$$

圖 12

由此著色方式所排出的最小值:
令 L,n 為固定的正整數
$k-2+2+n-2k-3+2+k+Ln+n-k+k+1+k-2+2=k+(L+2)n$
由此可得知上式為 k 的一個斜率為正的線性函數, 所以 k 越大越好
但 $k>2, n-2k-3>0$, $\therefore k<\frac{(n-3)}{2}$, $\therefore k$ 取 3.
同理將 $k=3$ 代入上式可得 $3+L_n$. L,n 互為斜率為彼此的線性函數, 故 L,n 皆越大越好.
由此可知, 目前最大的下界值為, 當長度(令 N)為 $L+n-1$ 時, 總和為

$$(L+2)n+3=(N-n+1+2)n+3=-(n-\frac{(N+3)}{2})^2+\frac{(N^2+6N+21)}{4}.$$

故當 $n=\frac{(N+3)}{2}$ 時, $m(n)=\frac{(N^2+6N+21)}{4}$.
當 $n=$偶數時, 與之最接近正整數為 $k=\frac{(N+5)}{2}$, $\frac{(N+1)}{2}$ 時, $m(n)=[\frac{(N^2+6N+21)}{4}]$
因此當格數為 N 時, 任何介於 1 到 $\frac{(N^2+6N+21)}{4}$ 的數都可被寫出來. □

定理 12. $m(n)\geq[\frac{(N^2+8N-8)}{4}]$.

證明. 如圖 13, 著色方式為 $k-2$ 個 1, 一個 2, T 個 1, $M+1$ 個 k, L 個 n, 一個$n-k$, 一個 $k+1$, M個[$k-2$ 個 1 和一個 2]與 $k-2$ 個 1, 長度為 $L+n-1$
由此著色方式所排出的最小值:
令 L,n,k 為固定的正整數

$$k-2+2+T+(M+1)k+nL+n-k+k+1+M(k-2+2)+k-2=(2k)M+nL+n+T+3k-1 \quad (\dagger)$$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & k & \cdots & k & n & \cdots & n & n-k & k+1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline \end{array}}_{L+n-1\text{ 格}}$$

圖 13

又已知 $k-2+1+T+M+1+1+1+M(k-2+1)+k-2=n-1 \therefore T=n-2k-kM-1>0$
可得知 $M<\frac{(n-2k-1)}{k}, M=[\frac{(n-2k-1)}{k}]$ 代入(†)式得: 總和$=(k)M+2n+nL+k-2$
由此可得知 M 為一個斜率為正的線性函數, 故 M 值越大結果越好.
令 L,n 為固定的正整數, $M=\frac{(n-1)}{k}-2-d$, 其中 $1>d\geq 0$. 代入(†)式可得: $(-1-d)k+3n+nL-2$. 由此可以得知 k 值越小越好, 但 $k>2$, 故 k 取 3 為最佳解

令 L 為固定的正整數, $M=\frac{(n-1)}{k}-2-d$, 其中 $1>d\geq 0$, $k=3$ 代入(†)式得: $(L+3)n-3d-5$. 由此可以得知 n 值越大越好, 同理, L 值亦越大越好.

由此可知, 目前最大的下界值為, 當長度(令 N)為 $L+n-1$ 時, 總和為

$$(L+3)n-6=(N-n+1+3)n-6=-(n-(N+4)/2)^2+(N^2+8N-8)/4.$$

故當 $n=\frac{(N+4)}{2}$ 時, $m(n)=\frac{(N^2+8N-8)}{4}$. 當 $n=$ 奇數時, 與之最接近正整數為 $n=\frac{(N+3)}{2}$, $\frac{(N+5)}{2}$ 時, $m(n)=[\frac{(N^2+8N-8)}{4}]$, 因此當格數為 N 時, 任何介於 1 到 $\frac{(N^2+8N-8)}{4}$ 的數都可被寫出來. 此最大下界代入 Page.18 中程式跑出的結果, 可與表格中 IC 組合數之值吻合. □

經過以上探討可以得知, 當格數為 n 時目前直線郵票覆蓋數的上下界範圍為:

$$\frac{(n^2+8n-8)}{4}\leq M(n)\leq\frac{(n(n+1))}{2}-3.$$

5 圓形圖以及一些俄羅斯方塊圖形

5.1 圓形

定義名詞:
S_c: 圓形所排數的總和.
n_c: 於圓形上取之格數.
$M_c(n_c)$: 所排出的數所能連續組合出的最大值.
$m_c(n_c)$: 所排出的數所能連續組合出的最小值.

定理 13. 圓形明顯上界為$n_c(n_{c-1})+1$.

證明. 當格數$=n_c$, 著色方式為 1 有 n_c 個, 2 有 n_c 個, 3 有 n_c 個 $\cdots$, n_c-1 有 n_c 個, n_c 有 1 個, 所求之值為 $n_c(n_c-1)+1$. □

定理 14. 圓形明顯下界為 n_c.

證明. 當格數$=n_c$, 著色方式為 $1,1,1,1,1,1,\ldots,1,1,1,1,1$ 所求之值為 $1+1+1\ldots+1=n_c$. □

我們考慮一些特殊的著色, 由此我們可以得到圓形圖之下界

定理 15. $m_c(n_c) \le 6n_c - 11$.

證明. 由 1 個 1, 1 個 2, 1 個 4, 加上 $n_c - 3$ 個 6 排出, 如圖14.

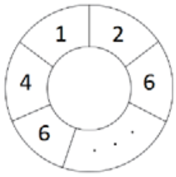


圖 14

$\rightarrow$ 總合為 $1 + 2 + 4 + 6(n_c - 3) = 6n_c - 11$. □

定理 16. 當 $n_c \ge 7$, $m_c(n_c) \le \dfrac{(n_c^2 + 2n_c - 1)}{2}$.

證明. 由 k 個 2 與 $(n_c - k - 1)$ 個 $(2n_c + 2)$ 及 1 個 1 排出, 如圖 15.

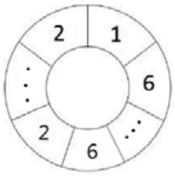


圖 15

$\therefore 1+2+\cdots+2+(2k+2)+\cdots+(2k+2) = -2[k^2-(n_c-1)k+\dfrac{(n_c-1)^2}{4}]+2n_c-1+\dfrac{(n_c^2-2n_c+1)}{2}$.
$\therefore$ 當 $k = \dfrac{(n_c - 1)}{2}$ 時, 有 $\min = \dfrac{(n_c^2 + 2n_c - 1)}{2}$.
而 $\dfrac{(n_c^2 + 2n_c - 1)}{2}$ 在 $n_c \ge 7$ 時會比之前算出來的 $6n_c - 11$ 還大, 故為較大的下界. □

5.2 俄羅斯方塊

在做研究時才發現其實很多俄羅斯方塊的圖形只是直線的變形而已, 如圖 16.

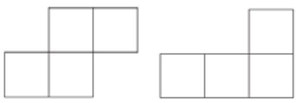


圖 16

所以我們統整後討論凸形與十字兩種不屬於直線的圖形.
名詞定義:
m: 於圖形上其中一分支所取之格數.
a_m: 圖 m.
$M(a_m)$: 所排出的數所能連續組合出的最大值.
$m(a_m)$: 所排出的數所能連續組合出的最小值.

定理 17. 凸形上界為 $\dfrac{2m^3 + 9m^2 + 3m + 1}{2}$.

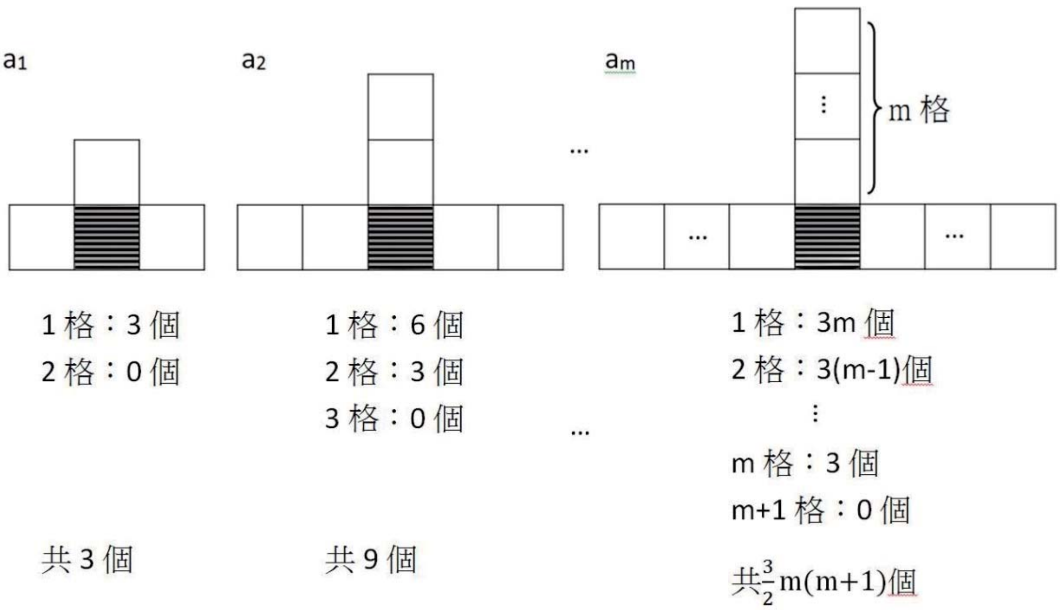


圖 17

證明. 為方便求其組合數, 我們將凸形分為一格中心格子與分支上 $3m$ 個格子 過程中, 我們可以發現未參與中心點的格子所組成的格數有規律, 如圖 17. □

而參與中心點的格子所組成的格數也有規律, 如圖 18.

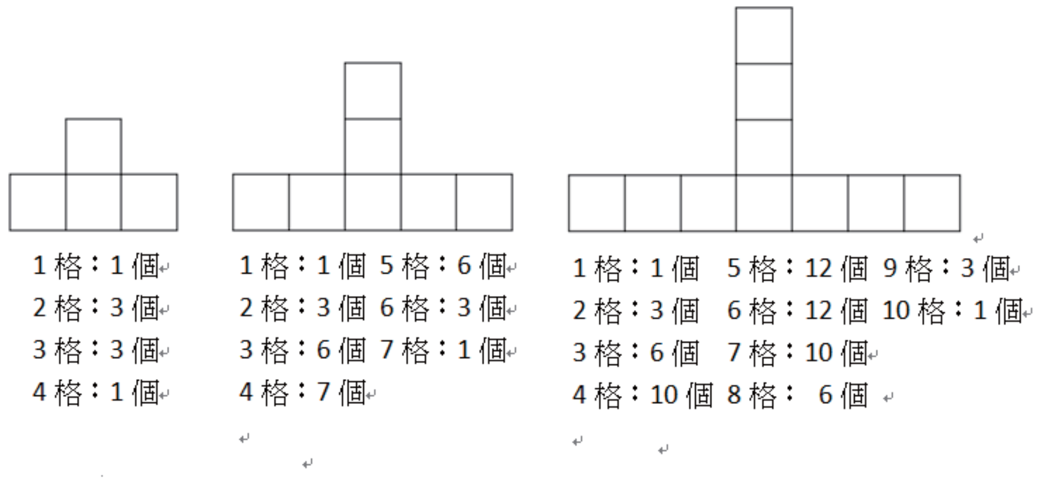


圖 18

故其著色最大值為:

$$1(m+1)+2m+2(m-1)+2(m-2)+\cdots+2\times2+2\times1+3m+\frac{3}{2}m(m+1)=\frac{(2m^3+9m^2+3m+1)}{2}$$

目前最大下界值為第 50 屆中小學科學展覽會作品「圈圈相連到天邊」中所算出來的 $m(a_m)=(m+1)^3+2m-1$(詳見[1])

定理 18. 十字型的上界.

證明. 與凸形相同, 將十字分為一個中心格子與 $4m$ 個分支格子, 分開討論. 並也找出未參與中心格子所組成的格數規律, 如圖 19.

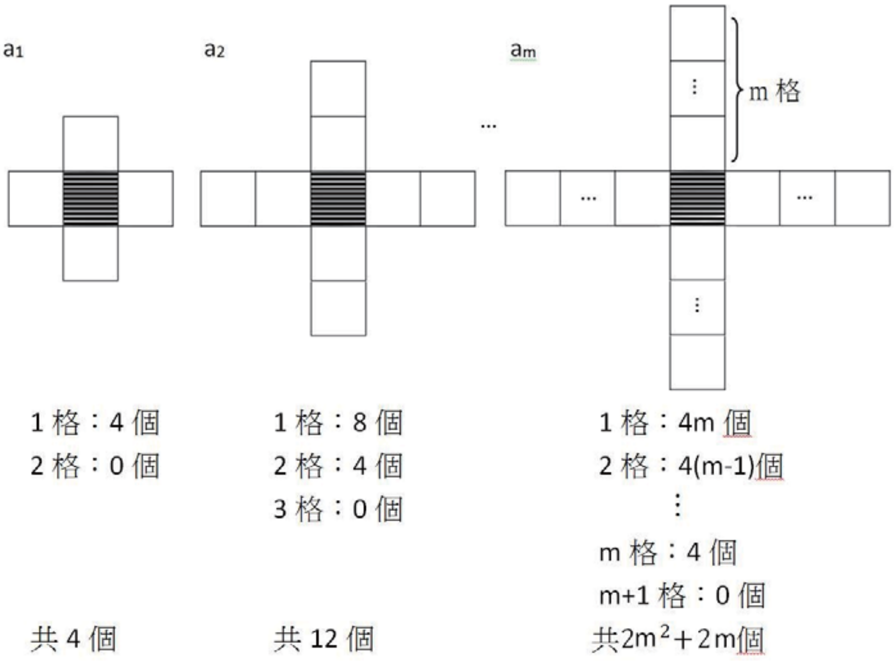


圖 19

運用著色組合, 求出参與中心點的各組合個數如下圖 20
故以此推論 a_m 的總和 $M(a_m)$ 應為$[(m+1)^2]^2$

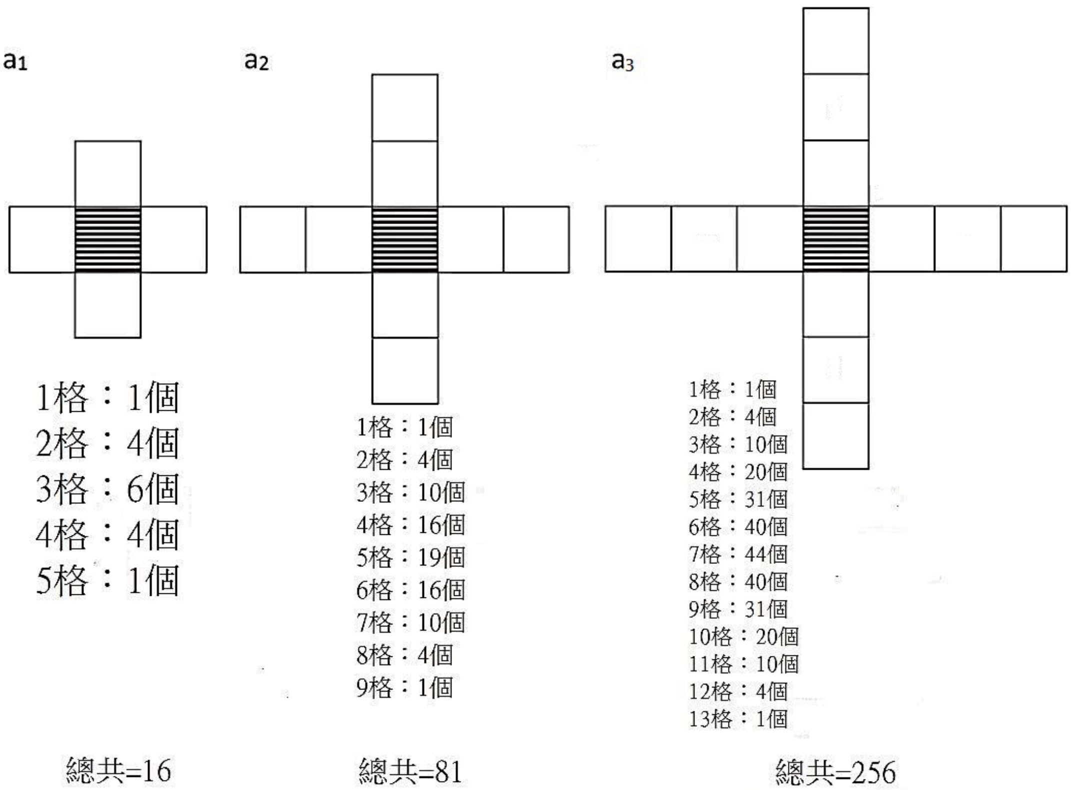


圖 20

→ 將参與中心點與未参與中心點之組合個數相加
→ $[(m+1)^2]^2 + 2n^2 + 2n \rightarrow M(a_m) = m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 6m + 1$

目前最大下界值為第 50 屆中小學科學展覽會作品「圈圈相連到天邊」中所算出來的
$m(a_m) = (m+1)^4 + 2m - 1$(詳見[1]) $\square$

6 討論與結論

6.1 動手做做看

在探討直線 IC 著色時, 利用動手著色及程式輔助可得以下結果:

$n=1$ $S=1 \to (1) \to M(1)=1;$

$n=2$ $S=2 \to (1,1), S=3 \to (1,2) \to M(2)=3;$

$n=3$ $S=3 \to (1,1,1), S=4 \to (1,1,2), S=5 \to (1,2,2), S=6 \to (1,3,2) \to M(3)=6;$

$n=4$ $S=4 \to (1,1,1,1), S=5 \to (1,1,1,2), S=6 \to (1,1,1,3),(1,1,2,2);$

$S=7 \to (1,1,1,4),(1,1,2,3),(1,2,2,2), S=8 \to (1,2,4,1),(1,1,3,3),(1,3,2,2);$

$S=9 \to (1,3,3,2) \to M(4)=9;$

以上 M' 和 M 都相同.

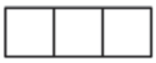
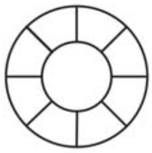
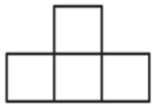
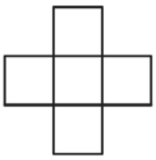
由指導教授提供的電腦程式跑的結果, 得到

n	$M'(n)$	$M(n)$
5	13 [2,2,3,5,1]	同左
6	17 [2,2,2,3,7,1]	18 [6,3,1,7,5,2]
7	23 [2,3,2,6,6,3,1]	24 [8,7,2,3,1,10,8]
8	29 [1,2,3,7,7,4,4,1]	同左
9	36 [1,2,3,7,7,7,4,4,1]	37 [7,15,5,1,3,8,2,16,7]
10	43 [1,2,3,7,7,7,7,4,4,1]	45 [28,5,2,8,6,11,9,3,1,18]

其中 $n = 5, 6, 7, 8$ 的 $M(n)$ 結果與 Penrice 在 1995 的論文的數據吻合(詳見[2]), 其他結果我們則尚未在其他資料中發現. 由上表可推知郵票覆蓋數一定大於等於 IC 數, 因 IC 數的限制較郵票覆蓋數為大.

而至 $n = 11$ 以後的著色組合, 藉由程式計算需花上超過一天的時間還未能跑出結果, 因此當 $n \le 10$ 的範圍在有限時間可用電腦跑出正確答案.

經由上述一連串的研討, 我們可以發現結果如表：

圖示	原始上界	改進上界	原始下界	改進下界
	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\leq \frac{n(n+1)}{2} - 2$	n	$\geq \frac{n^2+6n+13}{4}$
	$n_c(n_c-1)+1$	尚未改進	n_c	當 $7 \geq n$ 時 $\geq 6n-11$ 當 $n \geq 7$ 時 $\geq \frac{{n_c}^2+2n_c-1}{2}$
	$\frac{2m^3+9m^2+3m+1}{2}$	尚未改進	$1+3m$	$\geq (m+1)^3+2m-1$
	$m^4+4m^3+8m^2$ $+6m+1$	尚未改進	$1+4m$	$\geq (m+1)^4+2m-1$

7　討論與結論

上下界之範圍縮小：往後可繼續將上界變小下界變大, 使連續組合數的範圍縮小.

二維圖形之連續組合數的延伸：目前我們只針對二維圖形(直線、圓形及俄羅斯方塊)做研究, 並以二維圖形為基礎, 逐步研究在三維空間中所著色出的連續組合數.

先前的科展作品, 如「圈圈相連到天邊」, 大多停留在下界, 經過這次的研究, 我們除了改進下界值, 更增添了上界, 並將研究擴展到更多圖形, 使其有較精確的範圍. 從一開始較簡單也較麻煩的窮舉法推導並縮小了直線的上界值, 進而使用著色與些微邏輯推理使證明與研究更深入. 發現這些之後朝趨於複雜的圖形做了探討, 雖然並未得出完美符合預期的成果, 但與[2]學術論文比較, 我們的直線下界值 $\frac{(n^2+6n+13)}{4}$ 改進了此論文的下界 $\frac{(n^2+6n-3)}{4}$. 本次的結果給我們的不僅僅是題目侷限的紙上內容, 還點綴了其他本該不會發現的插曲, 更說明了數學的延展性與奧妙！期望能繼續延伸本次內容, 並能用簡單且高效率的方法解決問題！

參考文獻

[1] 鄭晏奇、楊翔雲、黃紹宸、李育霖, 圈圈相連到天邊, 中華民國第50屆中小學科學展覽會, 2013.
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/040413.pdf

[2] Ebrahim Salehi, Sin-Min Lee, Mahdad Khatirinejad, IC-Colorings and IC-Indices of graphs, Discrete Mathematics, 299, 297-310, 2005.

[3] Yao-Ren Lin, A Study of IC-Coloring of Graphs, Thesis for Master of Science, Department of Applied Mathematics, Tatung University, June 2008.

[4] Douglas B. West, Introduction to Graph Theory, Second Edition, Prentice Hall 2001.

[5] Chin-Lin and Shiue and Hung-Lin Fu, The IC-Indices of Complete Bipartite Graphs, Electronic Journal of Combinatorics, 15 (2008).

[6] 周俊全, 郵票問題的研究, 交通大學應用數學研究所碩士論文, 中華民國九十六年六月.
Chun-Chuan Chou, A Study Of Stamp problem, Thesis for Master of Science, Department of Applied Mathematics, National Chiao Tung University, Hsinchu, June 2007.