棋藝 n 點

新竹市立培英國民中學 張家翔
指導老師 黃珮漩

Abstract

Consider an $n \times n$ square borad, where n is a positive integer greater than one. The board is divided into $n \times n$ unit squares. Two different squares on the board are adjacent if they have a common side. N unit squares on the board are marked in such a way that every square (marked or unmarked) on the board is adjacent to at least one marked square. In this project we determine the smallest possible value of N, as shown in the table below. We also extend our study to hexagon boards.

n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
The number of marked squares	$\dfrac{n(n+2)}{4}$	$\dfrac{(n+1)^2}{4}$	$\dfrac{n(n+2)}{4}$	$\dfrac{(n+1)^2}{4}-1$

中文摘要

本研究主要討論“在一個 $n \times n$ 方格盤中標記一些方格, 使得任一個方格(包含標記方格)都至少與一個標記方格相鄰得最少標記數量”. 本論文決定了上述的最少標記方格數, 如下表所示. 我們並將研究推廣到正六邊形盤.

方格盤邊長 n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
最少標記方格數	$\dfrac{n(n+2)}{4}$	$\dfrac{(n+1)^2}{4}$	$\dfrac{n(n+2)}{4}$	$\dfrac{(n+1)^2}{4}-1$

1 簡介

1.1 研究動機與研究目的

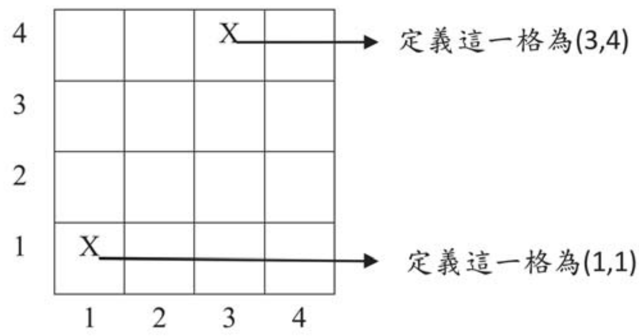
在電視新聞中看到一則山難新聞, 警方為了搜尋失蹤人口, 派了數百名人力搜山, 我好奇的問自己有沒有什麼分派的方式可以最節省人力資源. 剛好在這之前曾經在一本書上看到一道題目: “有個 4×4 的方格盤, 盤上的兩個不同方格若有一條共同邊則稱為“相鄰”, 但一個方格不與本身相鄰. 現在把某些方格塗上標記, 使得方格盤上的每一個方格(不論標記與否)都至少和一個標記了的方格相鄰, 請問標記的方格最少需要幾塊? ”如果我們將此道題目運用在上述的新聞事件中, 假設這座山的平面圖是正方形的, 其中一個標記即代表一個人力, 為了不造成危險, 每組搜救人員至少要有一位以上, 並搜尋他們的前、後、左、右四處森林. 我們希望以最少的人力(即最少標記點), 在短時間中完成救難任務, 這樣不但能提高失蹤者的存活率, 也能降低救難時所耗費的資源. 因此, 考慮將前述 4×4 方格盤的問題擴張為討論 $n \times n$ 方格盤的問題.

經過查詢知道, 這個問題曾出現在 1999 年的第 40 屆國際數學奧林匹亞(International Mathematical Olympiad, IMO)競賽試題第 3 題, 但該試題只探討 n 是偶數時的 $n \times n$ 方格盤. 本篇論文將 n 是奇數時的 $n \times n$ 方格盤的答案補齊, 得到一般 $n \times n$ 方格盤的問題的答案. 我們並將研究推廣到正六邊形盤.

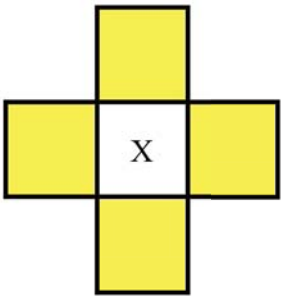
2　一般 $n \times n$ 方格盤的全控制數

2.1　名詞定義

為了方便討論, 我們先定義一些相關的名詞. 將 $n \times n$ 方格盤的最左下方當作起始點, 向右依序為第 1 、 2 、 3 ...行, 向上依序為第 1, 2, 3 . . . 列, 第一行第一列的方格記為 $(1,1)$, 第二行第一列的方格記為 $(2,1)$, 第三行第四烈的方格記為 $(3,4)$, 第 a 行第 b 列方格記為 (a,b). 以 4×4 方格盤為例圖示如下:



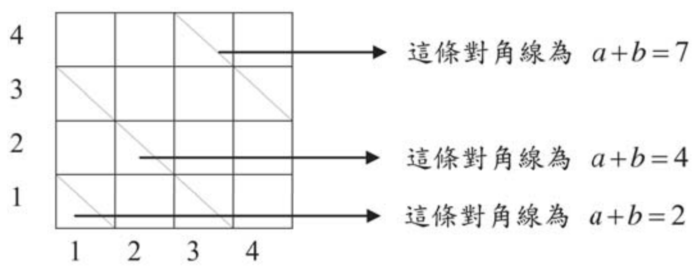
$n \times n$ 方格盤上的一格方格, 能夠控制住此方格的上, 下, 左, 右四格(不含本身). 下圖中, 標記 X 的方格可以控制控制黃色的方格.



在 $n \times n$ 方格盤中, 一個全控制集是指方格盤上的一些方格的集合, 使得方格盤上的每一個方格(不論在此集合與否)都至少和此集合的某個方格相鄰; $n \times n$ 方格盤的**全控制數**是一個全控制集的最少元素個數. 所以我們的問題就是要求 $n \times n$ 方格盤的**全控制數**.

全控制的對偶是全獨立, 其定義如下. 在 $n \times n$ 方格盤中, 一個**全獨立集**是指方格盤上的一些方格的集合, 使得此集合中任一方格, 不會被方格盤上的兩個相異方格同時控制; $n \times n$ 方格盤的**全獨立數**是一個全獨立集的最多元素個數.

在 $n \times n$ 方格盤中, 每一條左上右下斜線(稱為**對角線**)上的方格 (a,b) , 其 $a+b$ 都是固定數, 所以將該條對角線定義為 $a+b=c$, 其中 c 會隨著對角線位置不同而改變. 例如, 最左下角方格為 $(1,1)$, 因為 $a+b=1+1=2$, 所以稱這對角斜線為 $a+b=2$. 以 4×4 方格盤為例說明如下:



2.2　邊長為偶數時 $n \times n$ 方格盤的全控制數

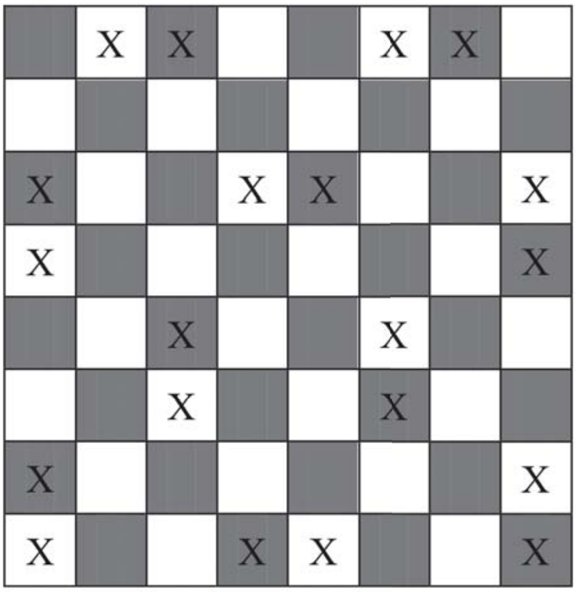
當 n 為偶數時, 國際數學奧林匹亞第 40 屆競賽試題第 3 題的參考答案有詳細的說明, 如何找出 $n \times n$ 方格盤的全控制數. 它的方法充分利用“標記其中一條對角線上的某一個方格, 至多可以控制旁邊一條對角線的兩個方格”的性質.

將 $n \times n$ 方格盤的方格黑白交錯著色, $a+b$ 是偶數的方格 (a,b) 著白色, $a+b$ 是奇數的方格 (a,b) 著黑色. 包含白色方格的對角線叫做**白對角線**, 而包含黑色方格的對角線叫做**黑對角線**.

要控制黑對角線 $a+b=3$ 上的兩個方格, 白對角線 $a+b=2$ 上的方格 $(1,1)$ 便可以將其完全控制. 再來, 白對角線 $a+b=6$ 上的方格以控制黑對角線 $a+b=5$ 及黑對角線 $a+b=7$, 因為對角線 $a+b=5$ 上有 4 個方格, 對角線 $a+b=7$ 上有 6 個方格, 若要完全控制至少需要 3 個方格, 方格 $(1,5)$, $(3,3)$ 及 $(5,1)$ 便可將對角線 $a+b=5$ 對角線 $a+b=7$ 完全控制. 以此類推, 在間隔的白對角線標記, 這樣不但可以控制到旁邊的兩條黑對角線, 也不會造成浪費. 由此可知, 控制黑色區域只需, 而且必須的方格數為

$$1+3+\cdots+\frac{n}{2}+\cdots+4+2=\left(1+\frac{n}{2}\right)\times\frac{n}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n(n+2)}{8}.$$

如果將方格盤依順時鐘方向旋轉 90 度, 則黑白的位置對調. 所以, 可以用同樣方法標記黑色區域的方格來控制白色區域, 所需方格數量與上式相同. 因此要將 $n \times n$ 方格控制, 共需 $\dfrac{n(n+2)}{4}$ 個方格.



值得注意的是, 上述的論證用到 n 為偶數時 $n \times n$ 方格盤的兩個重要性質. 首先, 長度最大的主對角線是黑對角線, 上式中的 $\dfrac{n}{2}$ 就是它旁邊的白對角線中用來控制此黑對角線的方格數. 其次, 將 $n \times n$ 方格盤依順時鐘方向旋轉 90 度, 則黑白的位置對調, 所以, 可以用同樣方法標記黑色區域的方格來控制白色區域. 這兩個性質在 n 是奇數時的 $n \times n$ 方格盤並不成立, 因此要有不同的論述.

2.3　邊長為奇數時 $n \times n$ 方格盤的全控制數上界

當邊長 n 為奇數時, 主對角線是白對角線, 且其方格數是奇數, 而 $n \times n$ 方格盤的四個角都是白色, 且白色和黑色的方格數不同, 因此, 如前面所說, 無法使用如同邊長為偶數時一樣的方法來推導 $n \times n$ 方格盤的全控制數. 不過我們還是可以利用“標記其中一條對角線上的某一個方格, 至多可以控制另一條對角線的兩個方格”的性質, 將前述的方法加以修改來找出全控制數. 這一小節先談上界.

首先, 討論白色方格控制黑色方格的方法. 如果還是按照方格盤的邊長為偶數時的方式標記, 從左下角開始, 有時會造成四個角落的白方格都被標記, 產生浪費. 為了避免這樣的問題, 我們從最中間的主對角線開始, 往兩旁在間隔的白對角線上選取方格來控制兩旁的黑對角線. 黑色方格控制白色方格的方法採取每條大約取前述方法一半的方法, 詳細描述如下. 因為方格盤邊長不同, 要分成邊長為 $4p+1$ 及 $4p+3$ 兩種不同情況討論.

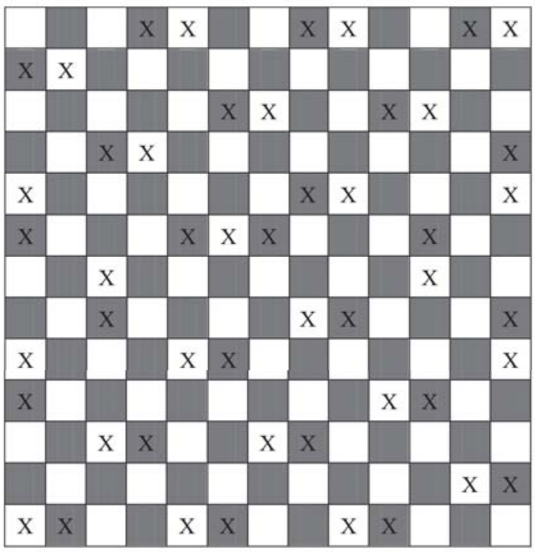
當邊長 $n=4p+1$ 時. 先討論白色方格控制黑色方格的方法. 首先, 最長的白色對角線從第 2 格開始選 $2p$ 格. 接著依對稱的方式, 同時往右上及左下選取白色方格. 首先, 從主對角線跳過一條白對角線到下一條白對角線, 從第 1 格開始選 $2p-1$ 格, 依次往下每次跳過一條白對角線到下一條白對角線, 也是從第 1 格開始選出比上次少 2 格的白方格, 直到最後在白對角線 3 選 1 格. 白方格的選取如下圖所示. 白色方格控制黑色方格所需的數量總計為:

$$2[1+3+5+\cdots+(2p-1)]+2p=2p^2+2p.$$

再來討論黑色方格控制白色方格的方法. 從左下角開始, 黑對角線 3 從下方開始選 1 格, 接著黑對角線 5 從上方開始選 1 格, 再來黑對角線 7 從下方開始選 2 格, 接著黑對角線 9 從上方開始選 2 格, 這樣一直做到主對角線前的黑對角線 $4p+1$ 線從上方開始選 p 格. 接著, 主對角線的右上方選取黑方格的方式則依 $p, p, p-1, p-1, \ldots, 1, 1$ 的數量類似地選取, 唯一要修改的是, 主對角線的右上方黑對角線 $4p+3$ 要多選 1 格, 這樣才足夠控制主對角線. 黑方格的選取如下圖所示. 黑色方格控制白色方格所需的數量總計為:

$$4(1+2+3+\cdots+p)+1=2p^2+2p+1.$$

將這兩個量相加得到方格盤的全控制數的上界 $4p^2+4p+1=\dfrac{(n+1)^2}{4}$.



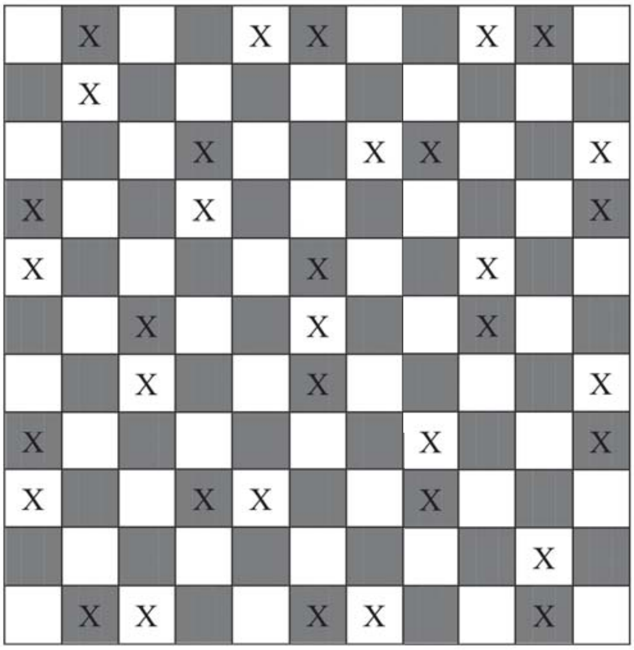
當邊長 $n=4p+3$ 時. 白色方格控制黑色方格的方法和 $n=4p+1$ 時一樣, 是從主對角線往兩旁選取, 不同的是主對角線從第 2 格開始選 $2p+1$ 格. 接著, 主對角線的兩側選取的白格, 每一側都是 $2p, 2p-2, \ldots, 4, 2$. 白方格的選取如下圖所示. 白色方格控制黑色方格所需的數量總計為:

$$2[2+4+6+\cdots+2p]+2p+1=2p^2+4p+1.$$

黑色方格控制白色方格的方法也和 $n=4p+1$ 時一樣, 到主對角線之前選取的數量是 $1, 1, 2, 2, \ldots, p, p, p+1$, 而從主對角線的右上方選取黑方格的方式則依 $p+1, p, p-1, p-1, \ldots, 1, 1$ 的數量類似地選取, 而且主對角線的右上方黑對角線 $4p+5$ 並不必多選 1 格. 黑方格的選取如下圖所示. 黑色方格控制白色方格所需的數量總計為:

$$4(1+2+3+\cdots+p)+2(p+1)=2p^2+4p+2.$$

將這兩個量相加得到方格盤的全控制數的上界 $4p^2+8p+3=\dfrac{(n+1)^2}{4}-1$.



2.4　邊長為奇數時的全控制數的下界

為方便稱呼, 定義方格盤從外往內算起的第 i 圈中所有方格叫做**第 i 圈**, 當 i 為奇數時, 稱這一圈為**奇圈**, 當 i 為偶數時, 稱這一圈為偶圈. 一個很重要的性質是, 方格盤的任一方格, 最多只能控制方格盤內的 2 格奇圈內的方格, 唯一的例外是, 當邊長為 $4p+3$ 時, 最中間的那一格會控制 4 格奇圈內的方格. 因此, 奇圈內所有方格數的一半即為全控制數的下界, 而當邊長為 $4p+3$ 時, 數量再降 1. 當方格盤的邊長不同時, 圈數也會有所差異, 所以必須分開討論.

當邊長 $n=4p+1$ 時. 奇圈內所方格數的算法如下:

(1) 奇圈格數 + 偶圈格數 $=n^2$

(2) 奇圈格數 − 偶圈格數 $=8p+1=2n-1$

第 (2) 式成立是因為比較相鄰的奇圈與偶圈, 共比較 p 次, 每次奇圈比偶圈多 8 格, 而最中間的奇圈再多一格.

將 (1) 式與 (2) 式相加再除以 2, 得到奇圈格數 $\dfrac{n^2+2n-1}{2}$, 所以至少標記 $\dfrac{n^2+2n-1}{4}$ 格才能控制所有的奇圈的方格, 其中 $n^2+2n-1=16p^2+16p+2$, 所以 $\dfrac{16p^2+16p+2}{4}=4p^2+4p+\dfrac{1}{2}$, 得到下界 $\left\lceil\dfrac{n^2+2n-1}{4}\right\rceil=\dfrac{(n+1)^2}{4}$.

當邊長 $n=4p+1$ 時. 奇圈內所方格數的算法如下:

(3) 奇圈格數 + 偶圈格數 $=n^2$

(4) 奇圈格數 − 偶圈格數 $=8p+7=2n+1$

第 (4) 式成立是因為比較相鄰的奇圈與偶圈, 共比較 p 次, 每次奇圈比偶圈多 8 格, 而最後一個奇圈再比最後一個偶奇圈多 7 格.

將 (3) 式與 (4) 式相加再除以 2, 得到奇圈格數 $\dfrac{n^2+2n+1}{2}$, 如前所述, 全控制數的下界為 $\dfrac{n^2+2n+1}{4}-1=\dfrac{(n+1)^2}{4}-1$.

從上述的上界與下界公式可得知, 當邊長分別為 $4p+1$ 及 $4p+3$ 時, 所得的上界公式與下界公式完全一樣. 因此可以得知, 當邊長為 $4p+1$ 時, 全控制數為 $\dfrac{(n+1)^2}{4}$; 當邊長為 $4p+3$ 時, 全控制數為 $\dfrac{(n+1)^2}{4}-1$.

3 全控制數與全獨立數之間的關係

第 53 屆全國中小學科展作品“潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密”所討論的題目為“在一個 40×40 的格子方陣中, 對任意一個 1×1 格子塗上紅色, 但限制每一個 1×1 格子其無論是否被塗上紅色, 與其相鄰共用邊的四個 1×1 格子至多有一個 1×1 格子是紅色的, 求解 40×40 在的格子方陣中最多有多少個 1×1 的格子可被塗上紅色? ”當 n 為偶數時, 得到的解圖形結果竟然與本研究的偶數結果一樣, 而且在邊長為奇數時的標記數量公式也一樣. 一開始認為該題目與本研究所討論的主題是相同的, 但實際操作後發現本題目結果有更多可能性, 且最佳解並不是唯一解, 因此討論的困難度增加許多. 在“潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密”中所討論的是最多標記點, 而此研究中所討論的是最少標記點, 但所需的標記數量卻是相同的.

其實, 他探討就是方格盤的全獨立數. 任意給定方格盤的一個全控制集及一個全獨立集, 有下面的關係.

1. 全控制集可將整個方格盤面完全控制, 因此每個全獨立點旁都至少與一個全控制點相鄰.

2. 全獨立點在盤面中的控制區域不可有交集, 因此每個全控制點最多只與一個全獨立點相鄰.

從上述兩點可看出來, 全獨立點旁一定有全控制點, 全控制點旁卻不一定有全獨立點, 所以可以得到: 全控制數 $\geq$ 全獨立數.

由於全控制數不可能小於全獨立數, 因此若全獨立集和全控制集個數相等, 則此數量一定就等於全獨立數和全控制數.

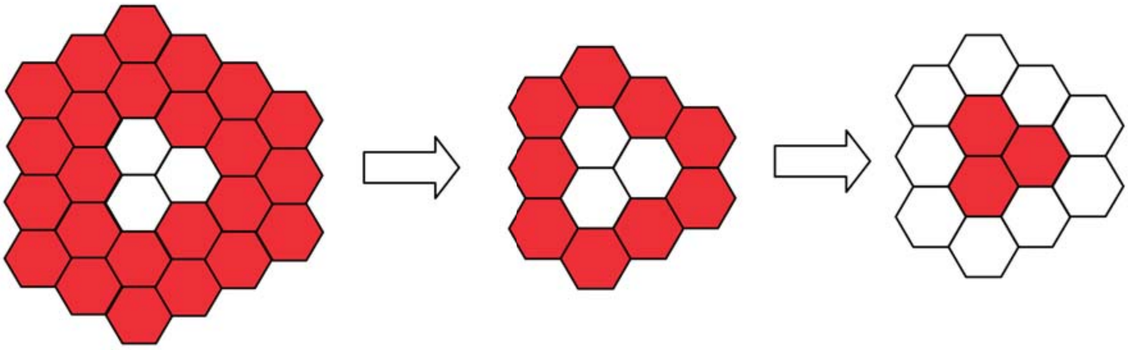
在 $n\times n$ 方格盤中, 全控制數等於全獨立數, 那麼在一般的 $m\times n$ 方格盤上, 全控制數是否也都會等於全獨立數? 於是開始探討在 $m\times n$ 方格中全獨立數以及全控制數之間的關係. 在 $m\times n$ 方格盤中, 有許多例子的全獨立集個數都等於全控制集個數, 此時全獨立數和全控制數就相等. 但還是找到了一些全控制集個數與全獨立集個數不同的例子, 例如 5×7 的盤面, 找到的全獨立集個數是 11, 而全控制集個數則是 12, 兩者數量並不同, 為了證明這兩個個數的確是全控制數及全獨立數, 使用了矛盾證明法和設計 C++ 程式碼的方式, 都成功證明這個結果是正確的, 也就是全控制數不一定等於全獨立數.

4 將此題目推廣至正六邊形盤

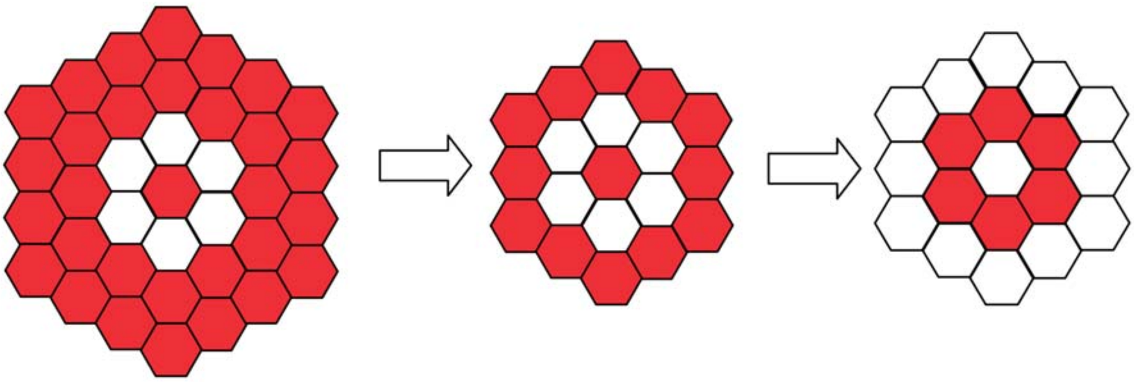
意外找出一個性質: 研究“正方形盤上每一個方格都至多與三個標記方格相鄰時, 求最多的標記數量”, 最外圈角落會與兩個方格相鄰, 最外圈非角落會與三個方格相鄰, 因此最外圈可全部標記, 而其他的方格因為最多只能與三個標記方格相鄰, 所以都至少會與一個未標記的方格相鄰, 若將標記變成未標記, 未標記變成標記, 就變成了“盤上每個方格都至少與一個標記方格相鄰”, 也就是本研究所討論的題目. 只要將最外圈的方格扣掉(邊長少 2), 將整個盤面格子數減去前述問題的標記數, 就變成了全控制數.

由於上述這樣的發現, 因為在“潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密”這篇科展中已討論正方形、正三角形以及正六邊形的最多標記數量, 所以可以直接利用他們的結果, 依照以下的步驟來找出全控制數.

首先先將邊長加 2, 這是因為在他們的題目中, 最外圈會全部標記, 因此要將這些標記數量一併算進來. 再依照他們推出來的公式, 用全部格子數減去標記數量, 這時剩下的就是未標記的格子數量. 例如在 8×8 的方格盤中, 先將邊長加 2, 變成 10×10 的方格盤, 再將邊長 10 代入公式, 得到數量為 80 (當每個方格都至多與 3 個標記方格時, 最多可標記 80 格), 再將全部方格數量 100 減去標記數量 80 可得 20, 也就是本題目所要的答案.



邊長為偶數時的正六邊形盤標記變化圖



邊長為奇數時的正六邊形盤標記變化圖

潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密題目“在正 n 邊形中, 每個標記方格都至多與 $n-1$ 個方個相鄰時, 求最多標記方格”公式:

本題目“在正 n 邊形每個方格都至少與 1 個標記方格相鄰時, 求最少標記方格”, 利用上述公式推算出來的新公式 (可以直接將邊長代入公式, 不須加 2).

公式推算過程:

六邊形棋盤的方格總數 $\dfrac{3}{4}n^2$ 和 $\dfrac{3n^2+1}{4}$ 分別減掉他們的公式, 以下是 $n = 6p$ 時, 所需標記數量運算過程:

$$\frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{12}(7n^2 + 8n - 8) = \frac{1}{6}n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} = \frac{n^2 - 4n + 4}{6}.$$

由於邊長需要加 2 經過轉換後才能得到正確的數量, 因此將此公式中的 n 由 $n+2$ 取代:

$$\frac{(n+2)^2 - 4(n+2) + 4}{6} = \frac{n^2}{6}.$$

正方形邊長 n	最多標記數量公式
$n=2p$	$\frac{1}{4}\left(3n^2+2n\right)$
$n=2p+1$	$\frac{1}{4}\left(3n^2+2n-1\right)$

正六邊形邊長 n	標記數量公式
$n=6p+1$	$\frac{1}{12}\left(7n^2+4n+1\right)$
$n=6p+2$	$\frac{1}{12}\left(7n^2+8n-8\right)$
$n=6p+3$	$\frac{1}{12}\left(7n^2+6n-9\right)$
$n=6p+4$	$\frac{1}{12}\left(7n^2+6n-16\right)$
$n=6p+5$	$\frac{1}{12}\left(7n^2+8n-11\right)$

正方形邊長 n	最少標記數量公式
$n=2p$	$\frac{1}{4}n\left(n+2\right)$
$n=4p+1$	$\frac{1}{4}\left(n+1\right)^2$
$n=4p+3$	$\frac{1}{4}\left(n+1\right)^2-1$

正六邊形邊長 n	標記數量公式
$n=6p+1$	$\frac{1}{6}\left(n^2+n+4\right)$
$n=6p+2$	$\frac{1}{6}\left(n^2+n+6\right)$
$n=6p+3$	$\frac{1}{6}\left(n^2+3\right)$
$n=6p+4$	$\frac{1}{6}\left(n^2+n-2\right)$
$n=6p+5$	$\frac{1}{6}\left(n+1\right)^2$
$n=6p$	$\frac{1}{6}n^2$

另外, 利用數學歸納法, 已找出部分長方形棋盤的全控制數, 當邊長差偶數時, 可以直接使用類似正方形棋盤的方式, 由內而外擴張, 並證明最中央棋盤的全控制數, 利用數學歸納法即可證明得到的標記數量都是全控制數並且推出公式, 但當邊長差偶數時, 卻會出現“每增加一圈, 都會出現浪費”, 因此無法找出所有圖形的全控制數. 證明的方法如下.

$$(4p-3)\times(4p-1):\begin{cases} p=1 & \text{時, 標記數量為 } 2; \\ p=2 & \text{時, 標記數量為 } 12; \\ p=3 & \text{時, 標記數量為 } 30; \\ p=4 & \text{時, 標記數量為 } 56. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{p}[2+(k-1)8]=\sum_{k=1}^{p}(8k-6)=\frac{p(2+8p-6)}{2}=4p^2+2p.$$

最外圈有 $(4k+1)\times 4 = 16k+4$ 格, 所以 $a+b+c \geq 8k+8$. 假設當 $p=k$, $(4k-3)\times(4k-1)$ 時, 控制數為 $4k^2-2k$ 成立. 則當 $p=k+1$, $(4k+1)\times(4k+3)$ 時, 控制數應為

$$4k^2-2k+8k+8 = 4k^2+6k+2 = 4(k+1)^2-2(k+1).$$

得證.

同理, 可找出邊長差為偶數的長方形圖形公式並證明公式是正確的.

以下是目前找到的全控制數公式:

邊長 $n\times(n+2)$	全控制數
$(4p-3)\times(4p-1)$	$4p^2-2p$
$(4p-2)\times 4p$	$4p^2$
$(4p-1)\times(4p+1)$	$4p^2+2p$
$4p\times(4p+2)$	$4p^2+4p$

邊長 $n\times(n+4)$	全控制數
$(4p-3)\times(4p+1)$	$4p^2-1$
$(4p-2)\times(4p+2)$	$4p^2+2p$
$(4p-1)\times(4p+3)$	$4p^2+4p$
$4p\times(4p+4)$	$4p^2+6p+2$

邊長 $n\times(n+6)$	全控制數
$(4p-3)\times(4p+3)$	$4p^2+2p$
$(4p-2)\times(4p+4)$	$4p^2+4p$
$(4p-1)\times(4p+5)$	$4p^2+6p+2$
$4p\times(4p+6)$	$4p^2+8p+2$

兩邊長和 $(m+n)$	全控制數
$8p-4$	$4p^2-2p$
$8p-2$	$4p^2$, $4p^2-1$
$8p$	$4p^2+2p$
$8p+2$	$4p^2+4p$
$8p+4$	$4p^2+6p+2$
$8p+6$	$4p^2+8p+2$

可以發現當兩邊長和為同一數時, 控制數公式也會是同一個, 只有在邊長和為 $8p-2$ 時有例外, 而每相鄰的兩個公式間控制數都會差 $2p$, 但還是有許多例外, 這個部分還需要進一部探討. 這樣的公式規律目前只有找到在邊長差為偶數時才會發生, 邊長差為奇數時尚未完全被研究出來.

5 研究結果

(一) 全控制數 $\geq$ 全獨立數.

正方形邊長 n	最少標記數量公式
$n = 2p$	$\frac{1}{4}n(n+2)$
$n = 4p+1$	$\frac{1}{4}(n+1)^2$
$n = 4p+3$	$\frac{1}{4}(n+1)^2 - 1$

正六邊形邊長 n	標記數量公式
$n = 6p+1$	$\frac{1}{6}\left(n^2+n+4\right)$
$n = 6p+2$	$\frac{1}{6}\left(n^2+n+6\right)$
$n = 6p+3$	$\frac{1}{6}\left(n^2+3\right)$
$n = 6p+4$	$\frac{1}{6}\left(n^2+n-2\right)$
$n = 6p+5$	$\frac{1}{6}(n+1)^2$
$n = 6p$	$\frac{1}{6}n^2$

(二) 當全獨立集和全控制集個數相等, 則此數量一定就等於全獨立數和全控制數.

(三) 在 $n \times n$ 方格中, 全獨立數等於全控制數; 在 $m \times n$ 方格中, 全獨立數不一定等於全控制數.

(四) 可利用對偶方式, 找出正六邊形棋盤的全控制數.

6 未來展望

6.1 推廣至正三角形棋盤及立體圖形

在使用對偶方式找出正六邊形棋盤全控制數時, 也曾試著找出三角形棋盤的全控制數, 但發現因為當題目是"在正三角形棋盤中, 每一個方格都至多與兩個標記方格相鄰時, 求最多標記方格"時, 轉換過程中會出現間隙, 這是因為三角形棋盤形狀較特殊的原因, 因此目前還沒找到方法找出正三角形的全控制數.

而在立體圖形中, 找出全控制數的方法是用立體賓果的方式, 所以尚未證明找出的標記數量, 而由於每個標記方格可控制六個方格, 因此更為複雜, 將來也會繼續研究.

$n \times n \times n$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
標記數量	4	9	16

6.2 全獨立數和全控制數之間的關係

在尋找全控制數以及全獨立數時, 發現有時候兩者相同, 有時候兩者不同, 表示其中還有許多地方值得繼續探討, 例如兩者何時相同, 何時不同, 全獨立數以及全控制數之間的一對一關係.

參考文獻

[1] 教育部審定國中數學課本 1 下, 康軒文教.

[2] 教育部審定國中數學課本 2 下, 康軒文教.

[3] 數學奧林匹亞競試集 1959 ~ 2001, 水木耳譯輯, 凡異出版社.

[4] 游垚騰, 潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密, 第 53 屆全國中小學科展作品.