張家翔作品評語

張鎮華教授
國立臺灣大學數學系

這篇論文是在研究下面這個方格盤的問題: 在一個 $n \times n$ 方格盤中選取一些最少數量的方格, 使得方格盤上任一個方格, 都至少與一個被選取的方格相鄰. 這個問題曾經出現在 1999 年第 40 屆國際數學奧林匹亞 (International Mathematical Olympiad) 競賽試題第 3 題, 該試題只探討 n 是偶數時 $n \times n$ 的方格盤的情況. 這篇論文將 n 是奇數時的 $n \times n$ 方格盤的情況解答出來, 得到一般 $n \times n$ 方格盤上的答案: 當 $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$ 時, 所需要的最少方格數分別為 $\dfrac{n(n+2)}{4}$, $\dfrac{(n+2)^2}{4}$, $\dfrac{n(n+2)}{4}$, $\dfrac{(n+2)^2}{4} - 1$. 這篇論文並試圖將研究推廣到 $m \times n$ 方格盤, 只是並未得到太多結果. 這篇論文的另一個推廣方向, 是將圖形推廣到正六邊形盤, 得到相當完整的答案.

如果轉換成圖形理論的語言描述, 這篇論文所討論的題目, 等同於在 $n \times n$ 方格圖($n \times n$ grid)中, 找一個最小全控制集, 也就是一個最少點數的頂點集合, 使得圖中的每一個頂點都與此集合中至少一個頂點相鄰. 圖形理論中的控制集理論源自於運籌學中的選址問題, 一般是很困難的, 縱使在特殊圖中也常常不容易得到完整的答案. 以一個國中學生來說, 能夠完全決定 $n \times n$ 方格圖的全控制數, 實屬不易.