律動的幾何與藝術

高雄市國立鳳山高級中學 林亮宇
指導老師 張淑娟

Abstract

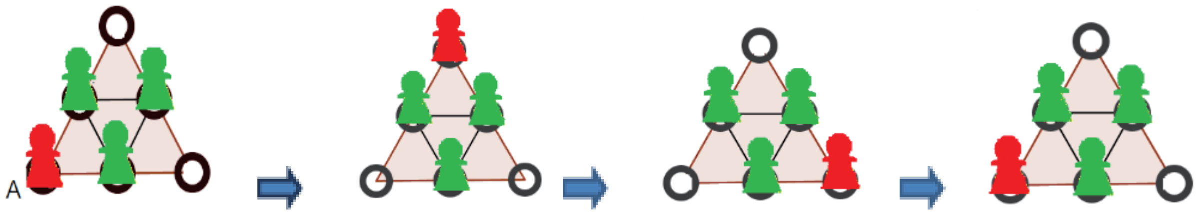
The research is mainly to investigate conditions for a point to be symmetric with respect to N given points. We discover that when N is an odd number, the point in question must go back to the starting position in $2N$ times of the symmetry. On the other hand, when N is an even number, for a point to go back to its starting position after several steps of symmetry, the given N points must satisfy certain condition. We define the point that can go back to the starting position in N times a "Nice point". We find that Nice points with respect to odd number of points are unique. When even number of points are given, in order for the existence of Nice points the given points need to satisfy certain conditions. Furthermore, we adjust the proportion $1:1$ to $1:m$, discovering many fascinating phenomenon. As m varies, the orbits of Nice points can form pictures of closed curves, and they form graceful art designs.

中文摘要

本研究主要是探討從空間中任一點中對給定的 n 個點作跳動後的情形. 我們發現當 n 為奇數時, 經過 $2n$ 次對稱必可回到原初始點. 而偶數點則需在特定條件下才可回到原初始點. 我們並將經 n 次對稱既可回到原初始點的點稱 Nice 點. 我們發現奇數點的 Nice 點為唯一, 而偶數點只要滿足兩兩相隔一邊的邊之向量總和為 0 時, 則 Nice 點可為平面上任一點. 另外, 我們將 $1:1$ 的比例改為 $m:1$ 的比例跳動, 發現許多有趣的現象. 而 Nice 點的軌跡可形成封閉曲線的圖形, 構成優美的藝術圖案.

1 簡介

1.1 研究動機



小時候玩跳棋的時候發現, 如果將跳棋從 A 點跳 3 步就可以回到原來的位置, 那麼如果我們將三點的位置改變, 依序對三點做跳動, 是否也可跳回原來 A 點的位置呢? 如果將三點改為四點呢? 是否也有相同的結果, 因此引發我們一連串的探究.

1.2 研究目的

一、 探討平面上 n 個點, 由初始點依序對 n 個點作 $1:1$ 跳動, 其跳動點的軌跡.

二、 探討平面上 n 個點, 由初始點依序對 n 個點作 $1:1$ 跳動, 其 Nice 點的存在性, 並找出其作圖方法.

三、 將 $1:1$ 的比例改為 $m:1$, 探討其斂散性.

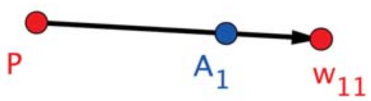
四、 將 $1:1$ 的比例改為 $m:1$, 探討 Nice 點的存在性及作圖方法.

五、 探討 Nice 點的軌跡圖形.

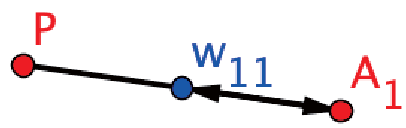
六、 將平面推廣到 $\mathbb{R}^n$ 空間.

1.3 名詞定義

定義. 若有一點 P 對 A_1 做 $m:1$ 跳動到 w_{11} , 則此時 $\overrightarrow{PA_1}:\overrightarrow{A_1w_{11}}=m:1$.



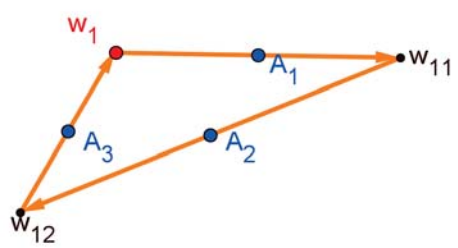
若 $m>0$ 時



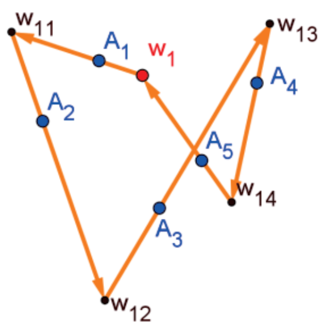
若 $m<0$ 時

定義 (Nice 點)**.** 設有給定 n 個點 $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$, 如下圖, 若由 w_1 點對 n 個點 $A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots,A_n$ 依序作 n 次的 $m:1$ 跳動後恰可回到 w_1 點時, 我們稱 w_1 點為 *Nice* 點.

此外, 如下面的一張圖, w_1 為順序 $A_1A_2A_3$ 的 Nice 點, 而 w_{11} 為順序 $A_2A_3A_1$ 的 Nice 點, w_{12} 為順序 $A_3A_1A_2$ 的 Nice 點, 我們將它們視作不同的 Nice 點, 這點需特別注意.



$n=3$, $m=1$



$n=5$, $m=\dfrac{1}{2}$

2　研究內容

設平面上有 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n (n \geq 3)$, 給定的個 n 點沒有任何限制, 可共線也可重合.

現有一 P 點, 依序對 n 個點作 $m:1$ 跳動, 如: P 點對 A_1 作跳動得 w_{11}, w_{11} 對 A_2 作跳動得 w_{12}, $\ldots$, $w_{1(n-1)}$ 對 A_n 作跳動得 w_{1n}. 這樣稱為做了一輪跳動.

w_{1n} 點對 A_1 作跳動得 w_{21}, w_{21} 對 A_2 作跳動得 w_{22}, w_{22} 對 A_3 作跳動得 w_{23}, $\ldots$, $w_{2(n-1)}$ 對 A_n 作跳動得 w_{2n}. 這樣稱為第二輪跳動.

w_{2n} 對 A_1 作跳動得 w_{31}, w_{31} 對 A_2 作跳動得 $w_{32} \cdots$ w_1 經多次跳動可移動到 w_{ij}, i 為跳動的輪數, j 為當輪跳動的次數.

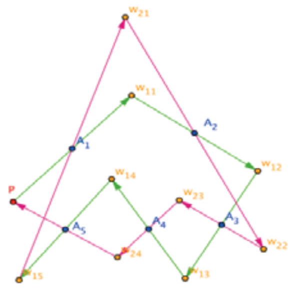
w_{ij} 對 A_{j+1} 做跳動可得 $w_{i(j+1)}$, 且 w_{in} 對 A_n 做跳動可得 $w_{(i+1)1}$.

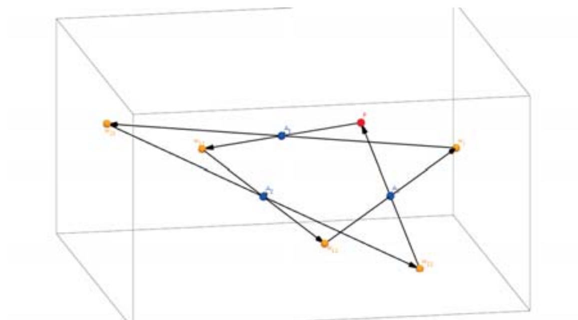
為方便證明, 我們假設 A_1, A_2, $\ldots$, A_n 和初始點 P 為 $\mathbb{R}^s$ 空間中的 n 個點, $s, n \in \mathbb{N}$. A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n 的坐標為 z_1, z_2, z_3, $\ldots$, z_n, 初始點 P 點的坐標為 w_1.

2.1　跳動比例為 $1:1$ 時

2.1.1　依序對 n 個點作 $1:1$ 跳動, n 為奇數

定理 1. 若 n 為奇數, 跳動比例為 $1:1$ 時, 經過 $2n$ 次（兩輪）跳動, 必可回到原位置 $(P = w_{2n})$.





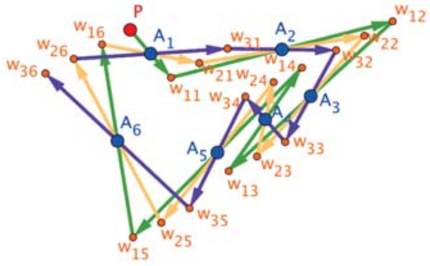
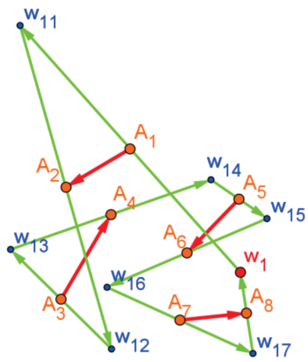
證明. 設 n 個點 A_1, A_2, A_3, $\ldots$, $A_n (n = 2k+1, k \in \mathbb{N})$, 現有一點 P, 依序對 A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n 作 $1:1$ 跳動, 由分點公式可推得:

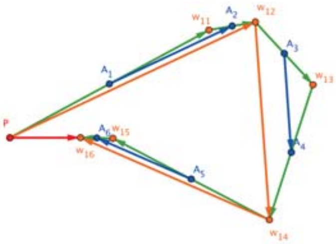
$$\Rightarrow \begin{cases} w_{11} &= 2z_1 - w_1 \\ w_{12} &= 2z_2 - 2z_1 + w_1 \\ \vdots & \\ w_{1(n-1)} &= 2z_{n-1} - 2z_{n-2} + \cdots + 2z_2 - 2z_1 + w_1 \\ w_{1n} &= 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots - 2z_2 + 2z_1 - w_1 \\ w_{21} &= -2z_n + 2z_{n-1} - \cdots + 2z_2 - w_1 \\ w_{22} &= 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots + 2z_3 - w_1 \\ \vdots & \\ w_{2(n-2)} &= -2z_n + 2z_{n-1} + w_1 \\ w_{2(n-1)} &= 2z_n - w_1 \\ w_{2n} &= w_1 \end{cases}$$

$\therefore$ 若 n 為奇數、跳動比例為 $1:1$ 時, 經過 $2n$ 次（兩輪）跳動, 必可回到原位置. □

2.1.2 依序對 n 個點作 $1:1$ 跳動, n 為偶數

經過多次跳動後, 不一定能跳回原來的初始點.



定理 2. 若 n 為偶數, 跳動比例為 $1:1$ 時, 若符合 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{0}$ 時, 則 *Nice* 點 P 可為空間中任意點.

證明. 設 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n (n=2k, k\in\mathbb{N})$, 現有一點 P, 依序對 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 作 $1:1$ 跳動, 由分點公式可推得：

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{11} &= 2z_1 - w_1 \\ w_{12} &= 2z_2 - 2z_1 + w_1 \\ w_{13} &= 2z_3 - 2z_2 + 2z_1 - w_1 \\ \vdots & \\ w_{1(n-1)} &= 2z_{n-1} - 2z_{n-2} + 2z_{n-3} - \cdots + 2z_3 - 2z_2 + 2z_1 - w_1 \\ w_{1n} &= 2z_n - 2z_{n-1} + 2z_{n-2} - \cdots - 2z_3 + 2z_2 - 2z_1 + w_1 \end{cases}$$

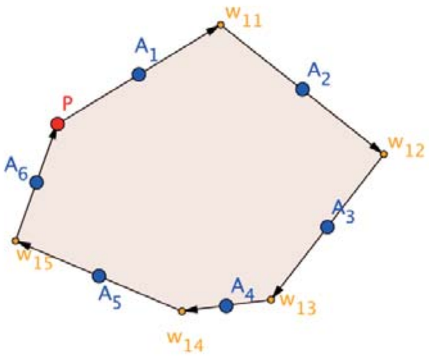
則 $2z_n - 2z_{n-1} + 2z_{n-2} - \cdots - 2z_3 + 2z_2 - 2z_1 = 0$ 若且唯若 w_1 等於 w_{1n}

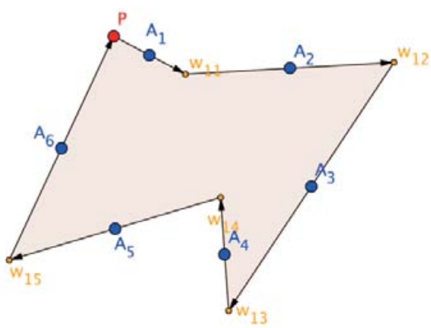
$\because\ 2z_n - 2z_{n-1} + 2z_{n-2} - \cdots - 2z_3 + 2z_2 - 2z_1 = 0$

$\Leftrightarrow z_n - z_{n-1} + z_{n-2} - \cdots - z_3 + z_2 - z_1 = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{0}$ □

定理 3. 當所有點皆在平面上, n 為偶數, 跳動比例為 $1:1$ 時, 偶數個點符合定理 2 的條件時, 由任意 *Nice* 點 P 點作 n 次跳動可得 $w_{11}, w_{12}, w_{13}, \ldots, w_{1(n-1)}$, 此時 n 邊形 $Pw_{11}w_{12}w_{13}\ldots w_{1(n-1)}$ 的有向面積恆為定值.





證明. 設 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 座標分別為 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), \cdots, (x_n,y_n)$, 有一動點 P 點坐標 (x_w,y_w) 對 n 個點作 $1:1$ 跳動, 由分點公式可推得:

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{11} &= (2x_1 - x_w, 2y_1 - y_w) \\ w_{12} &= (2x_2 - 2x_1 + x_w, 2y_2 - 2y_1 + y_w) \\ w_{13} &= (2x_3 - 2x_2 + 2x_1 - x_w, 2y_3 - 2y_2 + 2y_1 - y_w) \\ \vdots & \\ w_{1(n-1)} &= (2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2x_{n-3} - \cdots + 2x_3 - 2x_2 + 2x_1 - x_w, \\ & \quad 2y_{n-1} - 2y_{n-2} + 2y_{n-3} - \cdots + 2y_3 - 2y_2 + 2y_1 - y_w) \\ w_{1n} &= (2x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} - \cdots - 2x_3 + 2x_2 - 2x_1 + x_w, \\ & \quad 2y_n - 2y_{n-1} + 2y_{n-2} - \cdots - 2y_3 + 2y_2 - 2y_1 + y_w) \end{cases}$$

由 $P = w_{1n}$ 可得 $x_n - x_{n-1} + x_{n-2} - \cdots - x_3 + x_2 - x_1 = 0$

且 $y_n - y_{n-1} + y_{n-2} - \cdots - y_3 + y_2 - y_1 = 0$

n 邊形 $Pw_{11}w_{12}\cdots w_{1(n-2)}w_{1(n-1)}$ 的有向面積為

$$\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_w & 2x_1 - x_w \\ y_w & 2y_1 - y_w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x_1 - x_w & 2x_2 - 2x_1 + x_w \\ 2y_1 - y_w & 2y_2 - 2y_1 + y_w \end{vmatrix}\right.$$
$$+ \begin{vmatrix} 2x_2 - 2x_1 + x_w & 2x_3 - 2x_2 + 2x_1 - x_w \\ 2y_2 - 2y_1 + y_w & 2y_3 - 2y_2 + 2y_1 - y_w \end{vmatrix} + \cdots$$
$$\left. + \begin{vmatrix} 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2x_{n-3} - \cdots + 2x_3 - 2x_2 + 2x_1 - x_w & x_w \\ 2y_{n-1} - 2y_{n-2} + 2y_{n-3} - \cdots + 2y_3 - 2y_2 + 2y_1 - y_w & y_w \end{vmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_w & 2x_1 \\ y_w & 2y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x_1 - x_w & 2x_2 \\ 2y_1 - y_w & 2y_2 \end{vmatrix}\right.$$
$$\left. + \begin{vmatrix} 2x_2 - 2x_1 + x_w & 2x_3 \\ 2y_2 - 2y_1 + y_w & 2y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2x_{n-3} - \cdots + 2x_3 - 2x_2 + 2x_1 & 2x_n \\ 2y_{n-1} - 2y_{n-2} + 2y_{n-3} - \cdots + 2y_3 - 2y_2 + 2y_1 & 2y_n \end{vmatrix}\right]$$

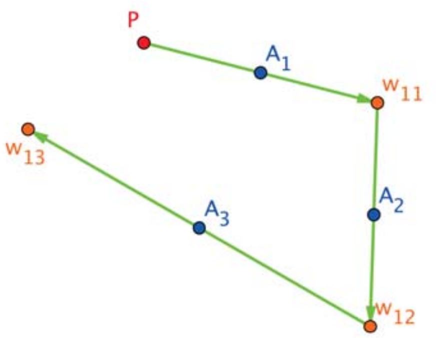
1. 看 x_w 項: $x_w(-2y_n + 2y_{n-1} - 2y_{n-2} + \cdots + 2y_3 - 2y_2 + 2y_1) = 0$

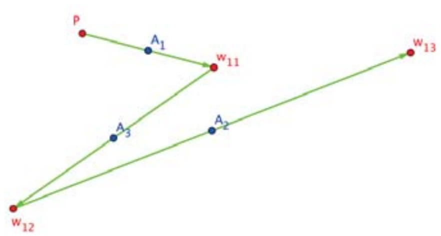
2. 看 y_w 項: $y_w(2x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} - \cdots - 2x_3 + 2x_2 - 2x_1) = 0$

$\therefore$ 不論 P 點為何, 由 P 點做跳動的 n 個點形成的 n 邊形的有向面積恆為定值. $\square$

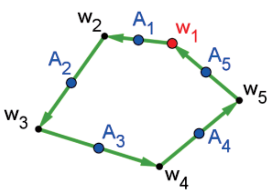
2.1.3 跳動路徑的探討

若有三個點 A_1, A_2, A_3, 有一 P 點對三點做 $1:1$ 的跳動, 跳動順序 $A_1 \to A_2 \to A_3$ 和 $A_1 \to A_3 \to A_2$, 我們稱作不同的跳動路徑.

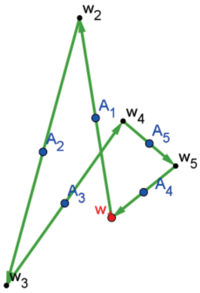




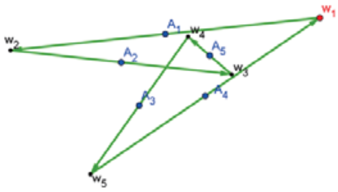
定理 4. 當初始點 $P = w_1$ 對 n 個點做不同順序 $1:1$ 的跳動時, 不同的 *Nice* 點會形成 $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 種路徑圖.



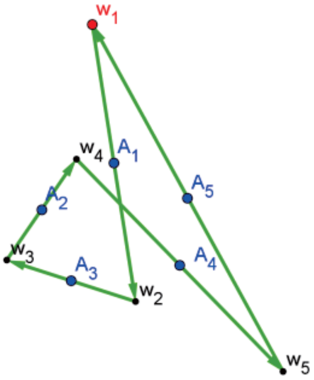
$A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$



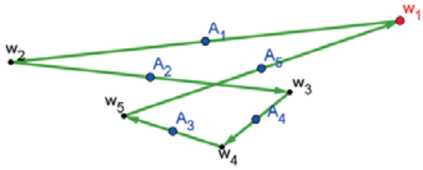
$A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_5 \to A_4$



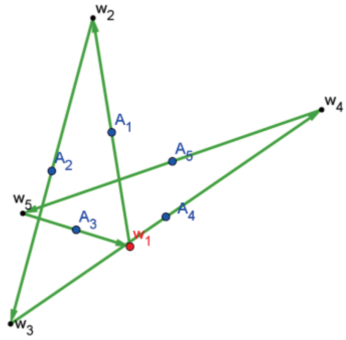
$A_1 \to A_2 \to A_5 \to A_3 \to A_4$



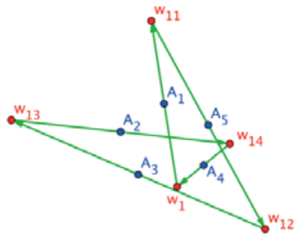
$A_1 \to A_3 \to A_2 \to A_4 \to A_5$



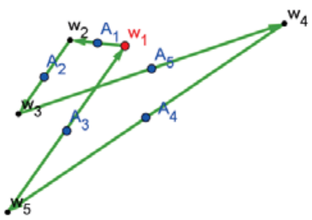
$A_1 \to A_2 \to A_4 \to A_3 \to A_5$



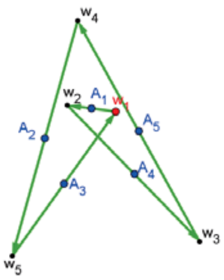
$A_1 \to A_2 \to A_4 \to A_5 \to A_3$



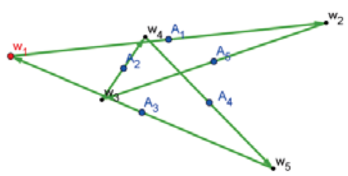
$A_1 \to A_5 \to A_3 \to A_2 \to A_4$



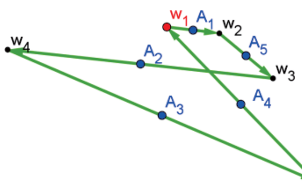
$A_1 \to A_2 \to A_5 \to A_4 \to A_3$



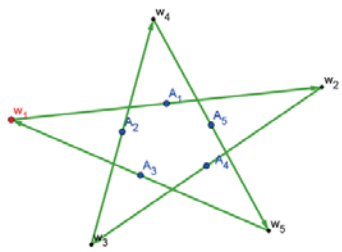
$A_1 \to A_4 \to A_5 \to A_2 \to A_3$



$A_1 \to A_5 \to A_2 \to A_4 \to A_3$



$A_1 \to A_5 \to A_2 \to A_3 \to A_4$



$A_1 \to A_4 \to A_2 \to A_5 \to A_3$

證明. 將 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 排列, 共有 $n!$ 種可能, 因為跳動比例為 $1:1$, 所以順序與逆序 Nice 點相同, 如

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n$$

和

$$A_n \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$$

Nice 點相同

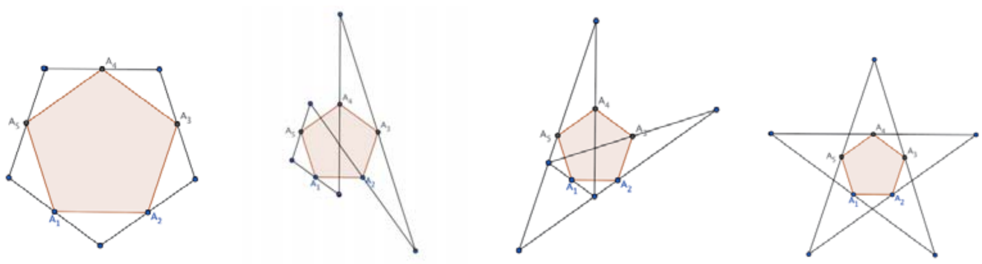
$\therefore$ 會有 $\dfrac{n!}{2}$ 個 Nice 點

又 n 個 Nice 點可組成一種路徑

$\therefore$ Nice 點路徑圖共有 $\dfrac{n!}{2n} = \dfrac{(n-1)!}{2}$ 種.

□

例子: 五個點可形成正五邊形時, Nice 點跳動路徑圖形有下列四類:

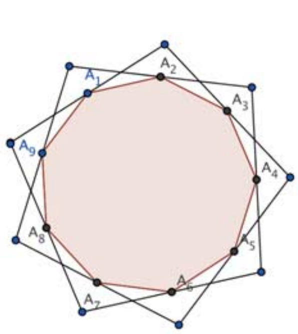


2.1.4 利用跳動路徑畫出星形

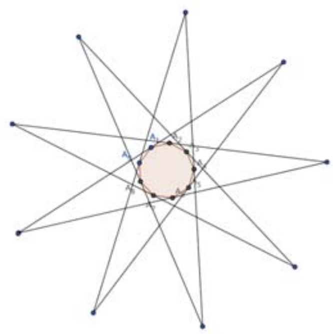
若有 n 個點($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$), 若 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 可形成正 n 邊形, 則如果跳動順序為等差數列 (公差 d 為與 n 互質的數, 且 $d \neq 1$ or $n-1$), 則可劃出 n 角星形.

如九個點可劃出九角星形的順序有:

$$\begin{array}{lll}
A_1 \to A_3 \to A_5 \to A_7 \to A_9 \to A_2 \to A_4 \to A_6 \to A_8 & (d=2) & \text{圖一} \\
A_1 \to A_5 \to A_9 \to A_4 \to A_8 \to A_3 \to A_7 \to A_2 \to A_6 & (d=4) & \text{圖二} \\
A_1 \to A_6 \to A_2 \to A_7 \to A_3 \to A_8 \to A_4 \to A_9 \to A_5 & (d=5) & \text{圖二} \\
A_1 \to A_8 \to A_6 \to A_4 \to A_2 \to A_9 \to A_7 \to A_5 \to A_3 & (d=7) & \text{圖一}
\end{array}$$

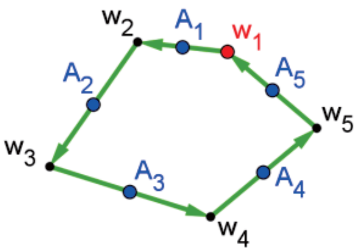


圖一


圖二

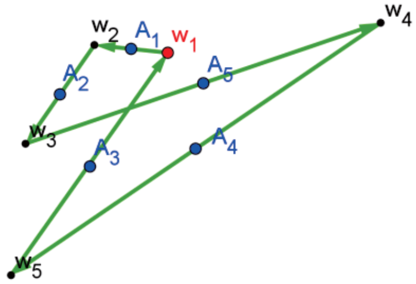
2.1.5 不同路徑, 相同的 Nice 點

定理 5. 跳動比例為 $1:1$ 時, 若跳動路徑順序的奇數項集合相同, 則 *Nice* 點亦會相同.



圖一

$A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$



圖二

$A_1 \to A_2 \to A_5 \to A_4 \to A_3$

證明. 若跳動順序為 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, 初始點為 P 點

$$\Rightarrow \begin{cases} P & = w_1 \\ w_{11} & = 2z_1 - w_1 \\ w_{12} & = 2z_2 - 2z_1 + w_1 \\ \quad\vdots & \\ w_{1(n-1)} & = 2z_{n-1} - 2z_{n-2} + \cdots + 2z_2 - 2z_1 + w_1 \\ w_{1n} & = 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots - 2z_2 + 2z_1 - w_1 \\ w_1 & = w_{1n} = 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots - 2z_2 + 2z_1 - w_1 \end{cases}$$

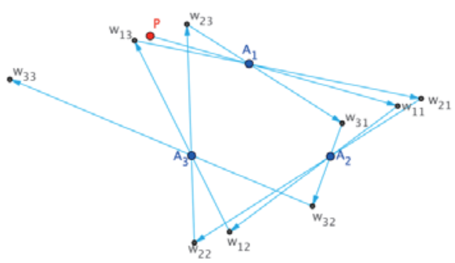
$$\begin{aligned} \Rightarrow w_1 &= z_n - z_{n-1} + z_{n-2} - z_{n-3} - \cdots - z_4 + z_3 - z_2 + z_1 \\ &= \left(z_n + z_{n-2} + z_{n-4} + \cdots + z_5 + z_3 + z_1\right) - \left(z_{n-1} + z_{n-3} + z_{n-5} + \cdots + z_4 + z_2\right) \end{aligned}$$

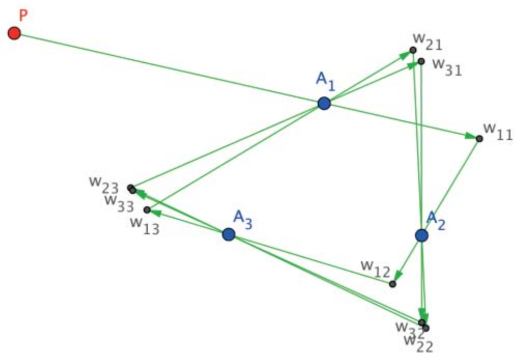
可以看出, 跳動順序的奇（偶）數項點可換等. 所以只要跳動順序的奇數項集合相同, Nice 點就會相同.

□

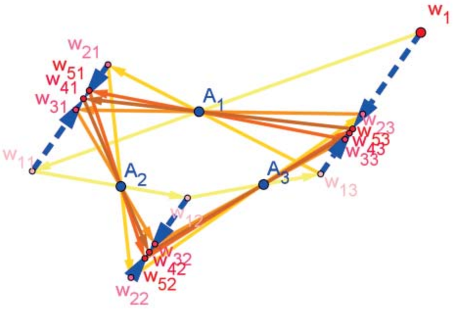
2.2 跳動比例為 $m:1$, $m \neq 1$ 時

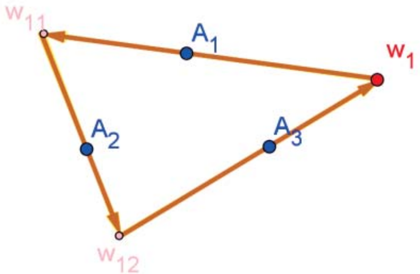
2.2.1 當 $0 < m < 1$ 時, 給定任意 P 點對 n 個點做 $m:1$ 跳動會越跳越遠離初始點; 當 $m > 1$ 時, P 點有越跳越接近某點的現象





定理 6. 由 P 點依序對 n 個點以 $m:1$, $m>1$ 的比例跳動, 則 P 點的跳動軌跡會收斂至 $Nice$ 點.





證明. 現有一點 P, 依序對 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 作 $m:1$ 跳動,

由分點公式可推得:

$$\Rightarrow \begin{cases} p &= w_1 \\ w_{11} &= \dfrac{m+1}{m}z_1 - \dfrac{1}{m}w_1 \\ w_{12} &= \dfrac{m+1}{m}z_2 - \dfrac{m+1}{m^2}z_1 + \dfrac{1}{m^2}w_1 \\ w_{13} &= \dfrac{m+1}{m}z_3 - \dfrac{m+1}{m^2}z_2 + \dfrac{m+1}{m^3}z_1 - \dfrac{1}{m^3}w_1 \\ \quad\vdots & \\ w_{1n} &= \dfrac{m+1}{m}z_n - \dfrac{m+1}{m^2}z_{n-1} + \dfrac{m+1}{m^3}z_{n-2} - \cdots - \dfrac{m+1}{m^{n-1}}z_2 + \dfrac{m+1}{m^n}z_1 - \dfrac{1}{m^n}w_1 \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

n 為奇數時:

$$\begin{aligned} w_{kn} = &\left[\frac{m^{n-1}(m+1)(1-(-\frac{1}{m})^{nk})}{m^n+1}\right]z_n - \left[\frac{m^{n-2}(m+1)(1-(-\frac{1}{m})^{nk})}{m^n+1}\right]z_{n-1} \\ &+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)(1-(-\frac{1}{m})^{nk})}{m^n+1}\right]z_{n-2} - \cdots + \left[\frac{(m+1)(1-(-\frac{1}{m})^{nk})}{m^n+1}\right]z_1 + \left[\frac{1}{(-m)^{nk}}\right]w_1 \end{aligned}$$

n 為偶數時:

$$\begin{aligned} w_{kn} = &\left[\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_n - \left[\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_{n-1} \\ &+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_{n-2} - \cdots + \left[\frac{m(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_2 \\ &-\left[\frac{(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_1 + \left[\frac{1}{m^{nk}}\right]w_1. \end{aligned}$$

n 為奇數時, 因為 $m>1$

(1) $$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n+1}\right]z_n-\left[\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n+1}\right]z_{n-1}$$
$$+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n+1}\right]z_{n-2}-\cdots-\left[\frac{m(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n+1}\right]z_2$$
$$+\left[\frac{(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n+1}\right]z_1+\left[\frac{1}{(-m)^{nk}}\right]w_1$$
$$=\left[\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n+1}\right]z_n-\left[\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n+1}\right]z_{n-1}+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n+1}\right]z_{n-2}-\cdots$$
$$-\left[\frac{m(m+1)}{m^n+1}\right]z_2+\left[\frac{m+1}{m^n+1}\right]z_1.$$

(2) 若 P 點為 Nice 點

則 $P=w_{1n}=\dfrac{m+1}{m}z_n-\dfrac{m+1}{m^2}z_{n-1}+\dfrac{m+1}{m^3}z_{n-2}-\cdots-\dfrac{m+1}{m^{n-1}}z_2+\dfrac{m+1}{m^n}z_1-\dfrac{1}{m^n}w_1$

得 $$P=\left[\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n+1}\right]z_n-\left[\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n+1}\right]z_{n-1}+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n+1}\right]z_{n-2}-\cdots$$
$$-\left[\frac{m(m+1)}{m^n+1}\right]z_2+\left[\frac{m+1}{m^n+1}\right]z_1=\lim_{k\to\infty}w_{kn}.$$

n 為偶數時, 因為 $m>1$

(1) $$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_n-\left[\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_{n-1}$$
$$+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_{n-2}-\cdots+\left[\frac{m(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_2$$
$$-\left[\frac{(m+1)\left(1-\left(-\frac{1}{m}\right)^{nk}\right)}{m^n-1}\right]z_1+\left[\frac{1}{m^{nk}}\right]w_1$$
$$=\left[\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n-1}\right]z_n-\left[\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n-1}\right]z_{n-1}+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n-1}\right]z_{n-2}-\cdots$$
$$+\left[\frac{m(m+1)}{m^n-1}\right]z_2-\left[\frac{m+1}{m^n-1}\right]z_1.$$

(2) 若 P 點為 Nice 點

則 $w_1=w_{1n}=\dfrac{m+1}{m}z_n-\dfrac{m+1}{m^2}z_{n-1}+\dfrac{m+1}{m^3}z_{n-2}-\cdots+\dfrac{m+1}{m^{n-1}}z_2-\dfrac{m+1}{m^n}z_1+\dfrac{1}{m^n}w_1$

得 $$w_1=\left[\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n+1}\right]z_n-\left[\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n-1}\right]z_{n-1}+\left[\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n-1}\right]z_{n-2}-\cdots$$
$$+\left[\frac{m(m+1)}{m^n-1}\right]z_2-\left[\frac{m+1}{m^n-1}\right]z_1=\lim_{k\to\infty}w_{kn}.$$

$\therefore$ 由 P 點依序對 n 個點以 $m:1$, $m>1$ 的比例經過無限次跳動後必收斂至 Nice 點.

$\square$

2.3 Nice 點序列的個數探討

空間中, 對特定的 n 個點 A_1, A_2, A_3, …, A_n, 若有一 P 點為跳動比例 $m:1$ 且跳動順序為 A_1, A_2, A_3, …, A_n 的 Nice 點, 則可得 P 點的跳動軌跡 w_{11}, w_{12}, w_{13}, …, $w_{1(n-1)}$, $w_{1n}=w_1$. 我們稱 $\left(P, w_{11}, \ldots, w_{1(n-1)}\right)$ 為一 Nice 點序列. 設 $P=w_1$, 因為作 $m:1$ 跳動, 由分點公式可得:

$$z_1=\frac{w_1+mw_{11}}{m+1}\ ,\ z_2=\frac{w_{11}+mw_{12}}{m+1}\ ,\ z_3=\frac{w_{12}+mw_{13}}{m+1}\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ z_n=\frac{w_{1(n-1)}+mw_1}{m+1}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_{11} & \cdots & w_{1(n-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{m}{m+1} \\ \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{w_1+mw_{11}}{m+1} & \frac{w_{11}+mw_{12}}{m+1} & \cdots & \frac{w_{1(n-1)}+mw_1}{m+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

由上可知 Nice 點序列 $\begin{bmatrix} w_1 & w_{11} & \cdots & w_{1(n-1)} \end{bmatrix}$ 經上述矩陣轉換對應到 $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$.

利用線性方程組解的性質可知此為一對一對應若且唯若該矩陣的行列式不等於零. 另一方面, 由數學歸納法可證得上述矩陣的行列式值如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{m}{m+1} \\ \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

的矩陣行列式值 $=\left(\dfrac{1}{m+1}\right)^n+(-1)^{n+1}\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$

我們注意到此對應矩陣只有當 $m\neq-1$ 時才有意義. 綜合以上討論, 我們將結論歸納如下:

(1) 矩陣行列式值不等於 0 時, 對於空間中任意給定一組相異的點序列 $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ 只有唯一一組 Nice 點序列 $\left(w_1, w_{11}, \ldots, w_{1(n-1)}\right)$ 與之對應. 而矩陣行列式值不等於零若且唯若 n 為奇數或為偶數但是跳動比例不為 $1:1$ 或 $1:(-1)$.

(2) 矩陣行列式值等於 0 時, 空間中有無限多個或沒有 Nice 點序列. 而矩陣行列式值等於零若且唯若當 n 為偶數時且跳動比例為 $1:1$.

1. 當 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 符合定理二的條件時, 有無限多個 Nice 點序列.
2. 當 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 不符合定理二的條件時, 空間中沒有 Nice 點序列.

(3) 當 $m = -1$ 時, 空間中任一點皆為 Nice 點.

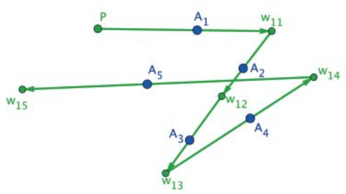
當 $m = -1$ 時, w_1 對任一點跳都會直接跳回來, 所以空間中任一點皆為 Nice 點.

2.4 Nice 點的作圖方法: 找出 n 個點 $m:1$ 的 Nice 點

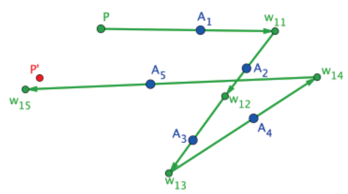
2.4.1 當 n 為奇數

作圖方法:

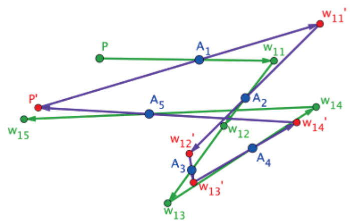
1. 任取一點 P, 依序對 A_1, A_2, …, A_n 作 $m:1$ 的跳動到 w_{1n}, 如圖一.
2. 在 $\overline{Pw_{1n}}$ 之間做一點 P' 符合 $\overline{PP'} : \overline{P'w_{1n}} = m^n : 1$, 如圖二.
3. P' 即為所求, 如圖三.



圖一



圖二



圖三

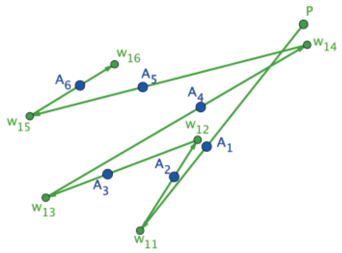
證明. 設 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ $(n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N})$
現有一點 P, 依序對 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 作 $m:1$ 跳動
假設有一 P', 可依序對 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 作 $m:1$ 跳動到原初始點
P 點跳動後得 w_{11}, w_{12}, w_{13}, …, w_{1n},
P' 點跳動後得 w'_{11}, w'_{12}, w'_{13}, …, w'_{1n}
$\because \overline{PA_1} : \overline{A_1w_{11}} = \overline{P'A_1} : \overline{A_1w'_{11}} = m:1$, 且 $\angle PA_1P' = \angle w_{11}A_1w'_{11}$
$\therefore \Delta PA_1P' \approx \Delta w_{11}A_1w'_{11} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = -m\overrightarrow{w_{11}w'_{11}}$
同理, $\overrightarrow{w_{11}w'_{11}} = -m\overrightarrow{w_{12}w'_{12}}$, 可推得 $\overrightarrow{w_{1(n-1)}w'_{1(n-1)}} = -m\overrightarrow{w_{1n}w'_{1n}}$
$\because n$ 為奇數, $\therefore \overrightarrow{PP'} = -m^n\overrightarrow{w_{1n}w'_{1n}}$, 又 $P' = w'_{1n}$, $\therefore \overrightarrow{PP'} = -m^n\overrightarrow{w_{1n}P'}$
$\therefore P$, P', w_{1n} 三點共線, P' 在 $\overrightarrow{Pw_{1n}}$ 之間且 $\overrightarrow{PP'} : \overrightarrow{P'w_{1n}} = m^n : 1$

□

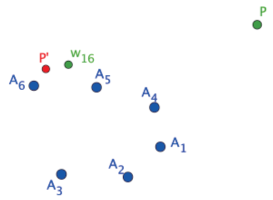
2.4.2 當 n 為偶數

作圖方法:

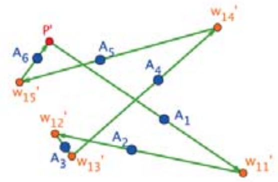
1. 任取一點 P , 依序對 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 作 $m:1$ 的跳動到 w_{1n}, 如圖一.
2. 在 $\overline{Pw_{1n}}$ 上但在 $\overleftrightarrow{Pw_{1n}}$ 之外做一點 P' 符合 $\overline{PP'}:\overline{P'w_{1n}} = m^n:1$, 如圖二.
3. P' 即為所求, 如圖三.



圖一



圖二



圖三

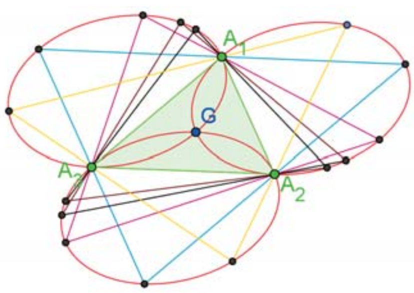
證明. 設 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ $(n = 2k,\ k \in \mathbb{N})$.
現有一點 P, 依序對 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 作 $m:1$ 跳動.
假設有一 P' 可依序對 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 作 $m:1$ 跳動到原初始點.
P 點跳動後得 $w_{11}, w_{12}, w_{13}, \ldots, w_{1n}$,
P' 點跳動後得 $w'_{11}, w'_{12}, w'_{13}, \ldots, w'_{1n}$.
$\because \overline{PA_1}:\overline{A_1w_{11}} = \overline{P'A_1}:\overline{A_1w'_{11}} = m:1$, 且 $\angle PA_1P' = \angle w_{11}A_1w'_{11}$
$\therefore \Delta PA_1P' \approx \Delta w_{11}A_1w'_{11} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = -m\overrightarrow{w_{11}w'_{11}}$.
同理, $\overrightarrow{w_{11}w'_{11}} = -m\overrightarrow{w_{12}w'_{12}}$, 可推得 $\overrightarrow{w_{1(n-1)}w'_{1(n-1)}} = -m\overrightarrow{w_{1n}w'_{1n}}$
$\because n$ 為偶數, $\therefore \overrightarrow{PP'} = m^n\overrightarrow{w_{1n}w'_{1n}}$, 又 $P' = w'_{1n}$, $\therefore \overrightarrow{PP'} = m^n\overrightarrow{w_{1n}P'}$
$\therefore P,\ P',\ w_{1n}$ 三點共線, P' 在 $\overleftrightarrow{Pw_{1n}}$ 之外且 $\overrightarrow{PP'}:\overrightarrow{P'w_{1n}} = m^n:1$. □

2.5 不同比例 Nice 點的軌跡

Nice 點的軌跡: P 點為相異的 n 個點$A_1, A_2, \ldots, A_n$, 比例 $m:1$ 的 Nice 點, P 點經跳動後可到 $w_{11}, w_{12}, w_{13}, \ldots, w_{1(n-1)}$ 不同的比例 m 的 Nice 點 P 點集可構成 Nice 點的軌跡, 同時 $w_{11}, w_{12}, w_{13}, \ldots, w_{1(n-1)}$ 也可構成軌跡.

2.5.1 當 $n = 3$.

定理 7. 當 $n = 3$, *Nice* 點的軌跡為橢圓.



證明. 設相異的 3 個點 A_1, A_2, A_3, 現有一點 P 點依序對 A_1, A_2, A_3 作 $m:1$ 跳動, $m \in \mathbb{R}$, 因 $A_1,\ A_2,\ A_3$ 必在同一平面上, 所以在此僅在平面上討論.
假設三個點的複數坐標, 令 $A_1 = z_1 = 0,\ A_2 = z_2 = 1,\ A_3 = z_3 = b + ci$
由分點公式可推得:

$P = w_1,\ w_{11} = \dfrac{m+1}{m} z_1 - \dfrac{1}{m} w_1,\ w_{12} = \dfrac{m+1}{m} z_2 - \dfrac{m+1}{m^2} z_1 + \dfrac{1}{m^2} w_1,$
$w_{13} = \dfrac{m+1}{m} z_3 - \dfrac{m+1}{m^2} z_2 + \dfrac{m+1}{m^3} z_1 - \dfrac{1}{m^3} w_1.$

若 P 為 Nice 點, 則 $P = w_{13}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 &= \dfrac{m^2}{m^2-m+1} z_3 - \dfrac{m}{m^2-m+1} z_2 + \dfrac{1}{m^2-m+1} z_1 \\ w_{11} &= -\dfrac{m}{m^2-m+1} z_3 + \dfrac{1}{m^2-m+1} z_2 + \dfrac{m^2}{m^2-m+1} z_1 \\ w_{12} &= \dfrac{1}{m^2-m+1} z_3 + \dfrac{m^2}{m^2-m+1} z_2 - \dfrac{m}{m^2-m+1} z_1 \end{cases}$$

令 $w_1 = x + yi$, 將 z_1, z_2, z_3 代入 w_1, 得 $w_1 = \dfrac{m^2 b - m}{m^2-m+1} + \dfrac{m^2 c}{m^2-m+1} i$.

則知 $x = \dfrac{m^2 b - m}{m^2-m+1},\ y = \dfrac{m^2 c}{m^2-m+1} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{m^2 b - m}{m^2 c} \Rightarrow m = \dfrac{-y}{xc - yb}$.

將 m 代入 y 得 w_1: $c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy - cy = 0$.

由於 $\delta = (c-2bc)^2 - 4c^2(b^2-b+1) = -3c^2 \le 0$,

且 $\Delta = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2c^2 & c-2bc & 0 \\ c-2bc & 2b^2-2b+2 & -c \\ 0 & -c & 0 \end{vmatrix} = -c^4 \le 0$ 且 $b^2-b+1>0$,

由此可知 w_1: $c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy - cy = 0$ 當 $c \neq 0$ 時為一橢圓.

當 $c = 0$ 時, $y = 0$, $x = w_1 = \dfrac{m^2 b - m}{m^2-m+1} \Rightarrow (w_1 - b)m^2 - (w_1-1)m + w_1 = 0$.

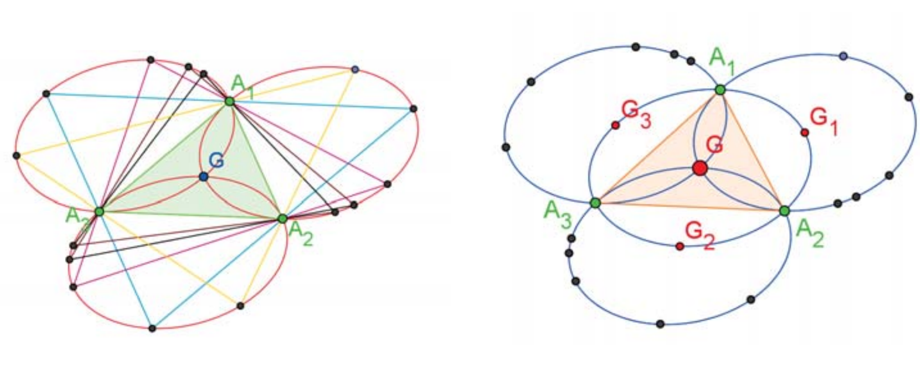
因為 m 為實數, 所以判別式 $(w_1-1)^2 - 4w_1(w_1-b) \ge 0$.

展開化簡之後可得 $-3w_1^2 + (4b-2)w_1 + 1 \ge 0$, 配方之後得到

$(w_1 - \dfrac{2b-1}{3})^2 \le \dfrac{3+(2b-1)^2}{9}$. 由此不等式可解出 w_1 介於兩實數之間, 所以當 $c=0$ 時, 軌跡會退化成線段. 同理, 可推得其他兩橢圓軌跡方程為:

$$\begin{cases} w_{11}: c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy + bcy - cx = 0 \\ w_{12}: c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy - 2c^2x - (2c-2bc)y + c^2 = 0 \end{cases}$$ □

定理 8. 當 A_1, A_2, A_3 不共線時 $(c \neq 0)$, 三橢圓的交點即為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心.



證明.

w_1: $c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy - cy = 0$;

w_{11}: $c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy + bcy - cx = 0$;

w_{12}: $c^2x^2 + (b^2-b+1)y^2 + (c-2bc)xy - 2c^2x - (2c-2bc)y + c^2 = 0$.

將橢圓 w_1, w_{11}, w_{12} 三式解聯立, 得到 $x = \dfrac{b+1}{3},\ y = \dfrac{c}{3}$,

恰為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心. □

定理 9. 當 $n=3$, A_1, A_2, A_3 不共線時 $(c \neq 0)$, 由 *Nice* 點所形成三橢圓的中心 G_1, G_2, G_3 與三角形三頂點 A_1, A_2, A_3 此六點共橢圓, 此橢圓的中心即為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, 且此四橢圓全等.

證明. 現在將 w_1 的中心 $G_1\left(\frac{2b-1}{3},\frac{2}{3}c\right)$ 移至 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心 $\left(\frac{b+1}{3},\frac{c}{3}\right)$，

移動了 $\left(\frac{-b+2}{3},-\frac{c}{3}\right)$，則可得新方程式

$$w_n:\ c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-c^2x+(bc-c)y=0$$

而發現將三橢圓的中心 G_1, G_2, G_3 與三頂點 A_1, A_2, A_3 分別代入發現皆在 w_n 方程式上, 由於$\delta=(c-2bc)^2-4c^2(b^2-b+1)=-3c^2<0$, 且

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2c^2 & c-2bc & -c^2 \\ c-2bc & 2b^2-2b+2 & bc-c \\ -c^2 & bc-c & 0 \end{vmatrix}=-c^4<0\&b^2-b+1>0.$$

由此可知 w_x: $c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-c^2x+(bc-c)y=0$ 為一橢圓.

以此類推, 將 w_{11} 橢圓中心 $G_2\left(\frac{2b+2}{3},\frac{2c}{3}\right)$ 移動 $\left(\frac{-b-1}{3},-\frac{c}{3}\right)$, w_{12} 橢圓中心 $G_3\left(\frac{-b+2}{3},-\frac{c}{3}\right)$ 移動 $(\frac{2b-1}{3},\frac{2c}{3})$ 亦可得到相同結果.

將 w_x: $c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-c^2x+(bc-c)y=0$ 分別對 x, y 微分

$$\Rightarrow\begin{cases} (2b^2-2b+2)y+(c-2bc)x+bc-c & =0; \\ 2c^2x+(c-2bc)y-c^2 & =0. \end{cases}$$

解聯立得 $x=\frac{b+1}{3}$, $y=\frac{c}{3}$, $\therefore$ w_x 之橢圓中心 $\left(\frac{b+1}{3},\frac{c}{3}\right)$. 由結果發現 w_x 之橢圓中心恰為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, 且由於橢圓 w_x 和橢圓 w_1, w_{11}, w_{12} 二次項係數相同, 故可知四個橢圓全等. □

2.5.2 當 $n>3$.

2.5.2.1 當 $n=4$.

若假設 $A_1=(a,b)$, $A_2=(c,d)$, $A_3=(1,0)$, $A_4=(0,0)$ 可用相同方法求得其中一條 Nice 點軌跡為:

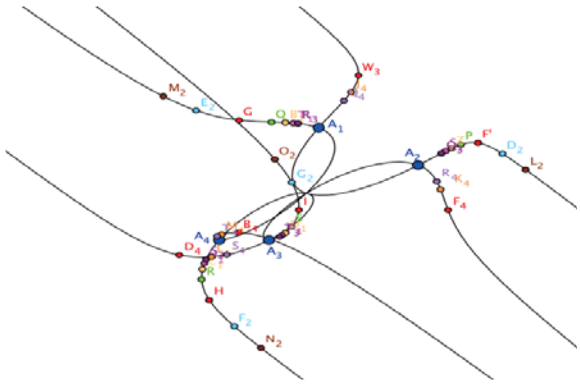
$$\begin{aligned} &d^3x^3-(3cd^2-3bd-d^2)x^2y-(3ad+3bc-3c^2d+2cd-2b-d)xy^2 \\ &\qquad -(c^3-c^2+2a-3ac+c-2)y^3+(cd-2b)y^2-d^2xy \\ &=\left[(c^2-a-c+1)y^2+d^2x^2+(b-2cd+d)xy-dy\right]\sqrt{(cy-dx)^2-4y(ay-bx)} \end{aligned}$$

我們改用參數式的寫法, 為方便發現規律, 我們假設:
$A_1=(x_{11},x_{12})$, $A_2=(x_{21},x_{22})$, $A_3=(x_{31},x_{32})$, $A_4=(x_{41},x_{42})$

$$\Rightarrow\begin{cases} w_1 & =\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_4-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_3+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_2-\frac{m+1}{m^4-1}z_1 \\ w_{11} & =-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_4+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_3-\frac{m+1}{m^4-1}z_2+\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_1 \\ w_{12} & =\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_4-\frac{m+1}{m^4-1}z_3+\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_2-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_1 \\ w_{13} & =-\frac{m+1}{m^4-1}z_4+\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_3-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_2+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll}
w_1 \text{ 軌跡參數式為} & \begin{cases} x = \dfrac{(m+1)(m^3x_{41}-m^2x_{31}+mx_{21}-x_{11})}{m^4-1} \\ y = \dfrac{(m+1)(m^3x_{42}-m^2x_{32}+mx_{22}-x_{12})}{m^4-1} \end{cases} \\
w_{11} \text{ 軌跡參數式為} & \begin{cases} x = \dfrac{(m+1)(m^3x_{11}-m^2x_{41}+mx_{31}-x_{21})}{m^4-1} \\ y = \dfrac{(m+1)(m^3x_{12}-m^2x_{42}+mx_{32}-x_{22})}{m^4-1} \end{cases} \\
w_{12} \text{ 軌跡參數式為} & \begin{cases} x = \dfrac{(m+1)(m^3x_{21}-m^2x_{11}+mx_{41}-x_{31})}{m^4-1} \\ y = \dfrac{(m+1)(m^3x_{22}-m^2x_{12}+mx_{42}-x_{32})}{m^4-1} \end{cases} \\
w_{13} \text{ 軌跡參數式為} & \begin{cases} x = \dfrac{(m+1)(m^3x_{31}-m^2x_{21}+mx_{11}-x_{41})}{m^4-1} \\ y = \dfrac{(m+1)(m^3x_{32}-m^2x_{22}+mx_{12}-x_{42})}{m^4-1} \end{cases}
\end{array}$$

其中 $m \neq \pm 1$. 首先 $m \neq 1$, 因為 $m = 1$ 時不一定會有 Nice 點.



$m = -1$ 時, 平面上任一點都為 Nice 點. 但當 m 趨近於 -1 時, 發現 $\lim_{m\to -1} w_1 = \lim_{m\to -1} w_2 = \lim_{m\to -1} w_3 = \lim_{m\to -1} w_4$.

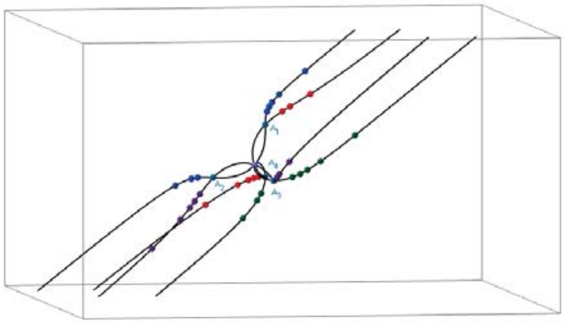
得到 $\begin{cases} x = \dfrac{x_{31}-x_{21}+x_{11}-x_{41}}{4} \\ y = \dfrac{x_{32}-x_{22}+x_{12}-x_{42}}{4} \end{cases}$, 即為 A_1, A_2, A_3, A_4 的重心.

2.5.2.2 四點在空間中的情形

假設 $A_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$, $A_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$, $A_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})$, $A_4 = (x_{41}, x_{42}, x_{43})$

$$w_1 = \frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_4 - \frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_3 + \frac{m(m+1)}{m^4-1}z_2 - \frac{m+1}{m^4-1}z_1$$

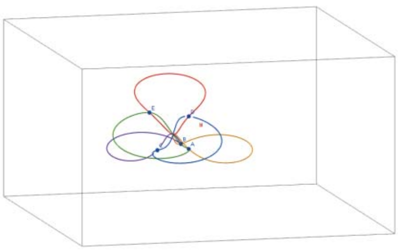
$$\therefore w_1 \text{ 軌跡參數式為} \begin{cases} x = \dfrac{(m+1)(m^3x_{41}-m^2x_{31}+mx_{21}-x_{11})}{m^4-1} \\ y = \dfrac{(m+1)(m^3x_{42}-m^2x_{32}+mx_{22}-x_{12})}{m^4-1} \\ z = \dfrac{(m+1)(m^3x_{43}-m^2x_{33}+mx_{23}-x_{13})}{m^4-1} \end{cases}$$



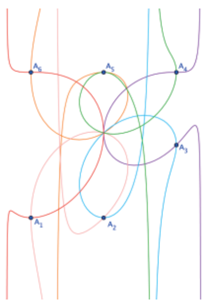
同理, 可求出 w_{11}, w_{12}, w_{13} 的軌跡參數式, 當 m 趨近於 -1 時,
四條軌跡皆收斂到

$$\left(\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{4},\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{4},\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}}{4}\right),$$

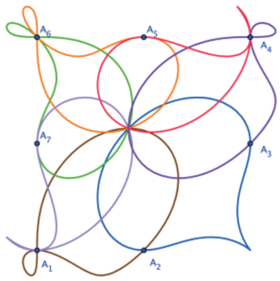
即為 A_1, A_2, A_3, A_4 的重心.
運用這種方法, 可表示在 $\mathbb{R}^n$ 空間的 n 個點的 Nice 點軌跡,
以下是利用 geogebra 軟體輸入參數時所得的圖形:



空間中五個點

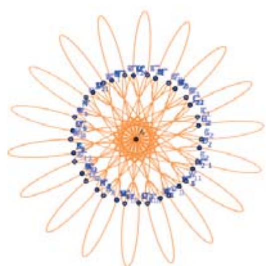


平面上六個點



平面上七個點

2.5.3 利用 Nice 點畫出的藝術圖形



1. 以一點為圓心, 任意半徑畫圓, 在圓上取 n 等分點.
2. 取圓心和圓上 n 等分點中任意相鄰兩點, 可畫出三個點的橢圓軌跡
3. 將所有相鄰兩點與圓心的 Nice 點軌跡畫出, 可得到一朵花朵的圖形

參考文獻

[1] H.S.M.Coxeter, Introduction to Geometry(1969), John Wiley & Sons, New York.

[2] Hiward Eves, A Survey of Geometry(1963), Volume Boston, Allyn and Bacon.

[3] John R. Silvester, Geometry Ancient & Modern. Oxford University Press.

[4] Tristan Needham, Visual Complex Analysis(1977), Oxford University Press.