過已知三點之正多邊形及稱引多邊形性質研究

高雄市立高雄高級中學 姚尚汶
指導老師 黃仁杰

Abstract

Inspired by the circumcircle, the project aims to study the regular polygon through three points and symmetry-induced polygon, which could generalize Fermat point and Napoleon's theorem. In addition, Fermat point and Napoleon's theorem are generalized not only the plotting method but the original properties.

中文摘要

靈感來源來自屬於國中範圍的「過三頂點的外接圓」, 本研究主要分成兩部分: 一是"過已知三點之正 n 邊形", 分別為過已知三點之正 n 邊形的作法, 面積最大值探討；二則是"稱引多邊形", 可分為過已知 n 點之正 n 邊形, 稱引多邊形的性質.

其中, 本作品的重點和最有價值的結果在於研究四中成功對費馬點以及拿破崙定理在稱引多邊形的條件下推廣, 並且不只是把費馬點和拿破崙定理的作法推廣到稱引多邊形, 而是將其在三角形中的部分相關性質也一併推廣.

1 簡介

1.1 研究動機

國中在學三角形的三心時有學到: "給定不共線三點可找到通過此三點的外接圓". 此時, 我突然想到那麼是否也可以找到通過這三個頂點的正三角形呢? 以此類推, 正方形呢? 甚至是正 n 邊形呢? 這個突然浮現的問題讓我開始了這一連串的探索.

1.2 研究目的

(1) 求作過已知三點之正 n 邊形.

(2) 過已知三點之正 n 邊形的面積和周長的最大值探討.

(3) 過已知 n 點之正 n 邊形性質探討.

(4) 推廣並探討費馬點和拿破崙定理與過已知點之正 n 邊形的關係及其性質.

(5) 外拿破崙多邊形一般性探討.

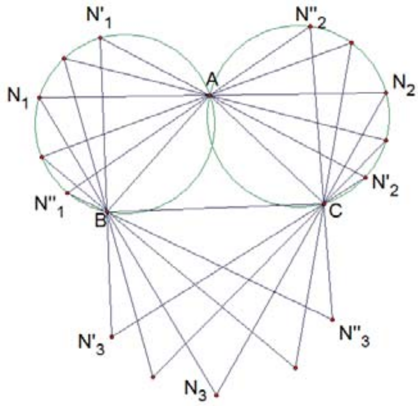
1.3 文獻探討

在全國科展第 51 屆高中數學組的一份作品**你泥中有我, 我泥中有你**中, 對過 n 點之正 n 邊形有與本研究類似的結果. 而兩篇作品的異同之處在於: 文獻探討的是過任意 n 點之正 n 邊形分別在無解, 只有一解, 無限多解的狀況; 而本研究則是由過三點之正 n 邊形得到了稱引 n 邊形, 確認過稱引 n 邊形之等角 n 邊形為正多邊形後在稱引多邊形上推廣了費馬點和拿破崙定理, 此推廣在文獻中是沒有提到的.

1.4 名詞定義

(1) 過已知點之正多邊形: 已知 A, B, C 三點為不共線三點, 若存在一正 n 邊形, 使得 A, B, C 三點都在其邊或邊的延長直線上, 則我們稱此正 n 邊形為過 ΔABC 之正 n 邊形, 符號記為 $N_1N_2\ldots N_n$. 另外, 在本研究中再增加一項限制條件: 已知三點須分別在正多邊形的三個相鄰邊上; n 個點以此類推.

(2) 過已知點之正多邊形的旋轉: 若過 ΔABC 之正三角形的頂點 N_1 以 D 點為旋轉中心, 順(逆)時針旋轉至 $N_1'(N_1'')$, 則另外二個頂點也會分別旋轉至 $N_2', N_3'(N_2'', N_3'')$, 此為 $\Delta N_1N_2N_3$ 的旋轉.



(3) 過已知點之最大正多邊形: 將正多邊形 $N_1N_2\ldots N_n$ 旋轉, 當其面積與周長為最大值時, 稱此正多邊形為最大正多邊形.

(4) 稱引多邊形: 從外拿破崙多邊形(定理 6)的證明中可得由定理 3 所得到的 n 個點可由 P 點關於正 n 邊形 $O_1O_2\ldots O_n$ 之各邊對稱引出, 故我們稱多邊形為稱引多邊形, 符號記為 $A_1A_2\ldots A_n$.

(5) 廣義費馬點: 我們將費馬點推廣到多邊形的情況, 但其只存在於稱引多邊形中, 我們稱此點為廣義費馬點(定理 5), 符號記為 P.

(6) 拿破崙多邊形: 我們將拿破崙定理推廣到正多邊形的情況, 但其只存在於稱引多邊形中, 我們稱此正多邊形為拿破崙多邊形(定理 6, 定理 7), 外拿破崙多邊形符號記為 $O_1O_2\ldots O_n$; 內拿破崙多邊形符號記為 $I_1I_2\ldots I_n$. 另外, 拿破崙多邊形的頂點在此簡稱為拿破崙頂點;拿破崙多邊形的外接圓簡稱為拿破崙外接圓, 以此類推.

1.5 預備定理

(1) 維維安妮定理. 正多邊形內任一點到各邊的距離之和等於定值.

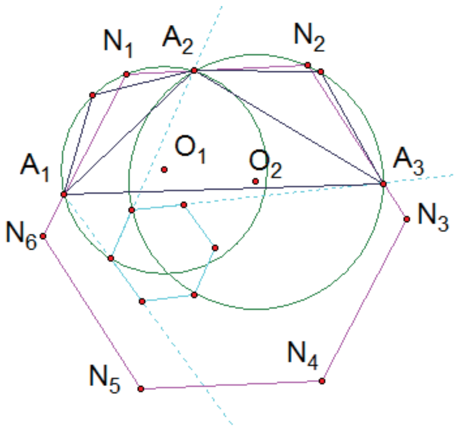
(2) 費馬點. 若有一點 P, 使之到的 ΔABC 三個頂點之距離和為最小, 則 P 點稱為 $\triangle ABC$ 的費馬點;另外, 存在唯一的費馬點與三個頂點的連線形成三個 120°的夾角.

(3) 拿破崙定理. 以三角形各邊分別向外(內)側作正三角形, 則這三個正三角形的外心會構成一個正三角形, 並稱為外(內)拿破崙三角形;且內, 外拿破崙三角形有共同的外心.

1.6 研究結果

1.6.1 求作過已知三點之正 n 邊形

定理 1. 若分別以 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ 為底, 作出頂角為 $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形的外接圓 O_1 及圓 O_2, 在圓 O_1 上取一點 N_1 連 $\overleftrightarrow{N_1A_1}, \overleftrightarrow{N_1A_2}$, 且 $\overleftrightarrow{N_1A_2}$ 交圓 O_2 於 N_2, 再連 $\overleftrightarrow{N_2A_3}$, 以 $\overline{N_1A_2}$ 為邊長, $\angle A_1N_1A_2$ 為內角作通過 A_1, A_2, A_3 三點的正 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$, 則正 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$ 即為過 ΔABC 之正 n 邊形.

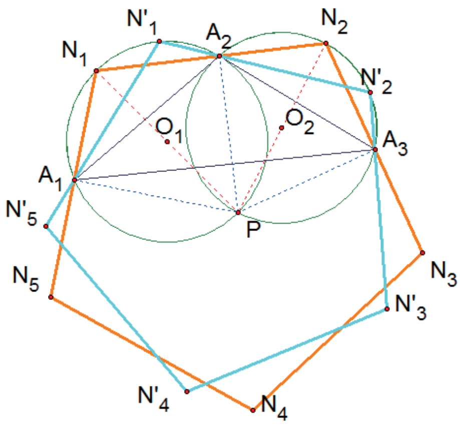


1.6.2 過已知三點之正多邊形的面積最大值探討

定理 2. 若 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA_2}$, 則 $N_1N_2\ldots N_n \geq N_1'N_2'\ldots N_n'$, 等號成立若且唯若 $\overline{N_1'N_2'} \perp \overline{PA_2}$ 時.

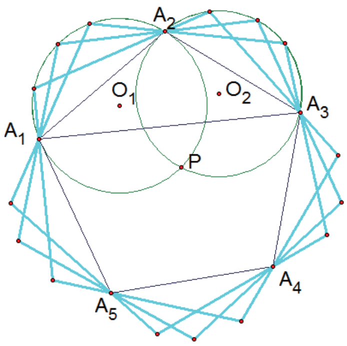
性質 1. P, O_1, N_1 共線, P, O_2, N_2 共線.

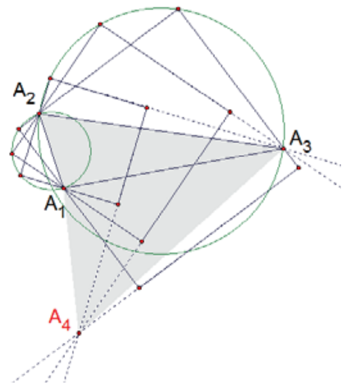
性質 2. $\overline{PA_2} \perp \overline{N_1N_2}$, $\overline{PA_1} \perp \overline{N_nN_1}$, $\overline{PA_3} \perp \overline{N_2N_3}$.



1.6.3 過已知 n 點之正 n 邊形性質探討

定理 3. 若同時作數個過 $\Delta A_1A_2A_3$ 的正 n 邊形, 則這些正 n 邊形的邊都會交於另外 $(n-3)$ 個相同的點 $A_4A_5\ldots A_n$.





定理 4. 若在圓 O_1 取一點 N_1 , 作 $\overrightarrow{N_1A_2}$ 交圓 O_2 於 N_2 , 再作 $\overrightarrow{N_2A_3}$ 交圓 O_3 於 N_3 以此類推, 最後連 $\overline{N_nA_1N_1}$ 作出 $N_1N_2\ldots N_n$後, 則 $N_1N_2\ldots N_n$ 為正 n 邊形.

性質 4. 圓 $O_1,O_2,\ldots,O_n$ 皆交於一點 P.

性質 5. 若 $N_1N_2\ldots N_n$ 為最大正 n 邊形, 則 P,O_i,N_i 共線, $\overline{PA_i}\perp\overline{N_iN_{i-1}}$.

1.6.4 推廣並探討費馬點和拿破崙定理與過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質

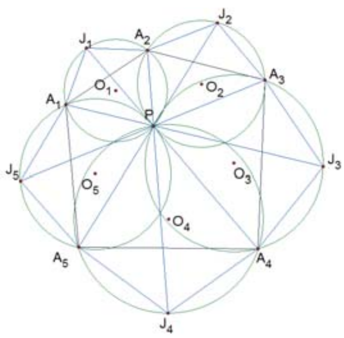
定理 5.(廣義費馬點)若在稱引多邊形各邊上作出圓 $O_1,O_2,\ldots,O_n$, 則其共同交點 P 為多邊形之費馬點

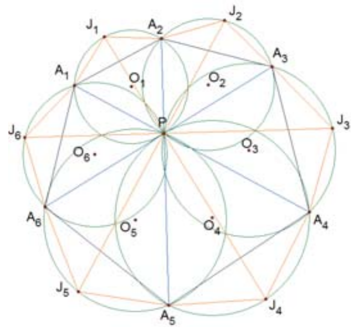
性質 6. $\angle A_iPA_{i+1}=\dfrac{2\pi}{n}$.

性質 7. 若已知稱引多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 及其費馬點 P , 往 $A_1A_2\ldots A_n$ 每邊外側作頂角為 $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形 $\Delta A_iJ_iA_{i+1}$, 則

(1) 假如 $n=2k+1$, 則 $\overline{A_1J_{1+k}}=\overline{A_2J_{2+k}}=\cdots=\overline{A_iJ_{i+k}}$, 且皆交於費馬點 P.

(2) 假如 $n=2k$, 則 $\overline{A_1A_{1+k}}=\overline{A_2A_{2+k}}=\cdots=\overline{A_iA_{i+k}}$, $\overline{J_1J_{1+k}}=\overline{J_2J_{2+k}}=\cdots=\overline{J_iJ_{i+k}}$, 且皆交於費馬點 P.





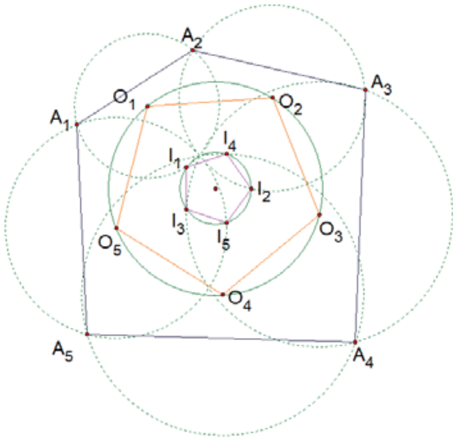
定理 6. 7.(拿破崙定理)

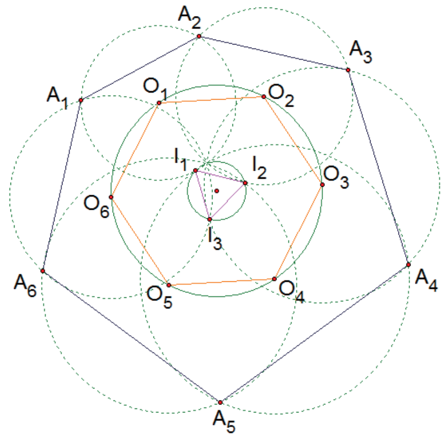
(1) 若 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊向外作頂角為 $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形的外心 $O_1,O_2,\ldots,O_n$, 則 $O_1O_2\ldots O_n$ 是正 n 邊形, 稱為外拿破崙 n 邊形.

(2) 若 I_i 為 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 向內側作正 n 邊形之外心, 則

a. 假如 $n=2k+1$, 則 $I_1I_2\ldots I_n$ 為正 n 邊形, 稱為奇內拿破崙 n 邊形.

b. 假如 $n=2k$, 則因為 $I_i=I_{i+k}$, 故 $I_1I_2\ldots I_k$ 為正 k 邊形, 稱為偶內拿破崙 n 邊形.





性質 8. I_i 和 P 關於直線 $\overline{OO_i}$ 對稱.

性質 9. $A_1A_2\ldots A_n$ 之內, 外拿破崙多邊形有共同外心 O.

性質 10. 稱引多邊形與其拿破崙多邊形有共同重心.

性質 11. 令過 $A_1A_2\ldots A_n$ 之正 n 邊形的各頂點為 N_i, 外心為 C, 和 $A_1A_2\ldots A_n$ 之內拿破崙多邊形為 $I_1I_2\ldots I_n$, 費馬點為 P, 則

(1) N_i, I_i, C 共線;

(2) $P, C, I_1I_2\ldots I_k$ 共圓 O ($n=4$ 時, $\overline{I_1I_2}$ 為直徑).

性質 12. 令過已知 n 點之正多邊形 $N_1N_2\ldots N_n$, $N'_1N'_2\ldots N'_n$ 的外心為 C, C', 其中 $N_1N_2\ldots N_n$ 為最大正 n 邊形, 則

(1) $\overline{CP}$ 為圓 O 直徑;

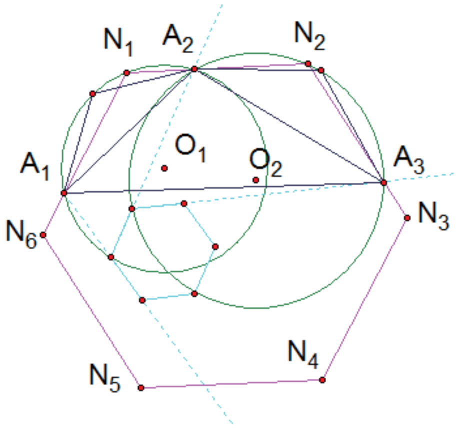
(2) $N'_1N'_2\ldots N'_n = N_1N_2\ldots N_n \times \cos^2 \angle CPC'$.

2 研究內容

2.1 求過已知三點之正 n 邊形

定理 1. 已知 $\Delta A_1A_2A_3$, 則過 $\Delta A_1A_2A_3$ 之正 n 邊形作法如下:

1. 分別以 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ 為底, 作出頂角為 $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形的外接圓 O_1 及圓 O_2.
2. 在圓 O_1 上取一點 N_1 連 $\overleftrightarrow{N_1A_1}, \overleftrightarrow{N_1A_2}$, 且 $\overleftrightarrow{N_1A_2}$ 交圓 O_2 於 N_2, 再連 $\overleftrightarrow{N_2A_3}$.
3. 以 $\overline{N_1N_2}$ 為邊長, $\angle A_1N_1A_2$ 為內角作通過 A_1, A_2, A_3 三點的正 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$, 則正 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$ 即為所求.

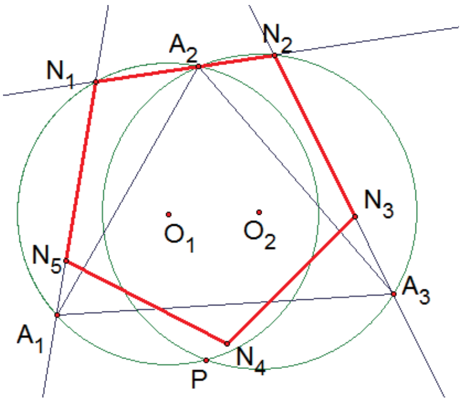


▲ 圖 (1)

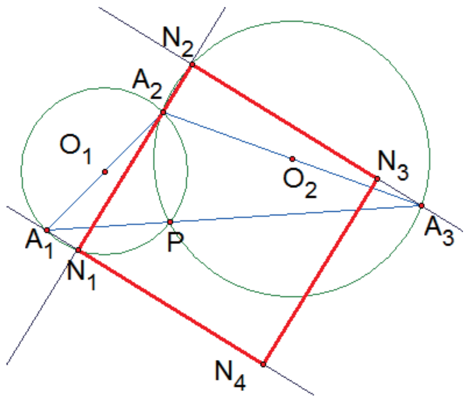
證明. 可知只須證明正多邊形邊長延長線會通過三角形各頂點即可, 以下以 $\overleftrightarrow{N_1N_n}$ 為例.

$$\because \begin{cases} \angle A_1N_1N_n + \angle A_2PA_1 = \pi & ,\text{如圖 } (2a) \\ \angle A_1N_1A_2 = \angle A_1PA_2 & ,\text{如圖 } (2b) \end{cases} \quad \therefore N_1, N_n, A_1 \text{ 三點共線.}$$

以此類推, N_1, N_2, A_2 三點共線, N_2, N_3, A_3 三點共線, 故得證.



▲ 圖 (2a)

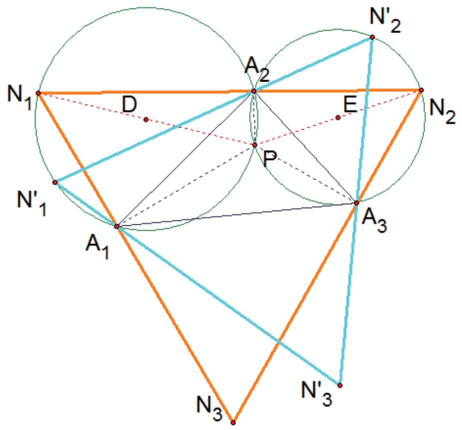


▲ 圖 (2b)

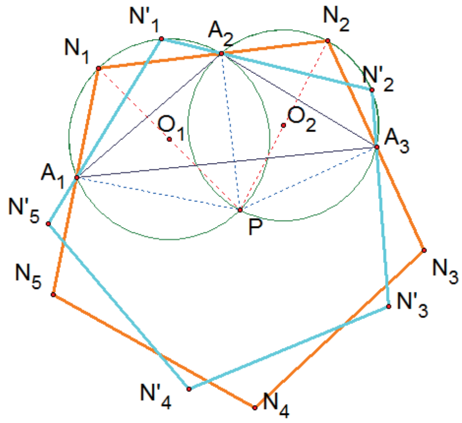
□

2.2 過已知三點之正多邊形的面積最大值探討

定理 2. 若 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA_2}$, 則多邊形面積 $N_1N_2 \dots N_n \geq N_1'N_2' \dots N_n'$, 等號成立若且唯若 $\overline{N_1'N_2'} \perp \overline{PA_2}$.



▲ 圖 $(3a)$

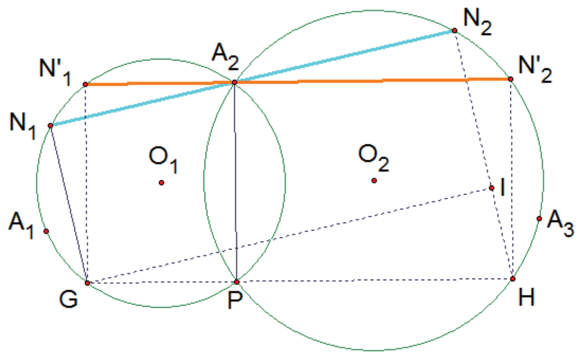


▲ 圖 $(3b)$

證明. 如圖 (4), 已知圓 O_1, O_2 兩交點分別為 A_2, P, 先將 $\overline{N_1A_2N_2}$ 水平平移至 $\overline{GPH}$, 再將 $\overline{N_1'N_2'}$ 水平平移至 $\overline{GI}$.

$\because \angle GIH = \angle A_2N_2'H = \angle A_2N_2H = \dfrac{\pi}{2}$ $\therefore$ ΔGHI 為直角三角形 $\Rightarrow \overline{GH} > \overline{GI}$

$\Rightarrow \overline{N_1N_2} > \overline{N_1'N_2'}$, 得證.



▲ 圖 (4)

$\square$

性質 1. P, O_1, N_1 三點共線, P, O_2, N_2 三點共線.

證明. $\because \angle N_1A_2P = \dfrac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\overline{N_1P}$ 為直徑 $\Rightarrow P, O_1, N_1$ 三點共線

同理, P, O_2, N_2 三點共線, 得證. $\square$

性質 2. $\overline{PA_2} \perp \overline{N_1N_2}$, $\overline{PA_1} \perp \overline{N_nN_1}$, $\overline{PA_3} \perp \overline{N_2N_3}$.

證明.

$\because N_1A_2PA_1$ 為圓內接四邊形 $\therefore \angle N_1A_1P = \pi - \angle N_1A_2P = \dfrac{\pi}{2}$

同理, $\angle N_2A_3P = \dfrac{\pi}{2}$, 得證.

$\square$

性質 3. 令 A_1, A_2, A_3 之座標分別為 $0, z_2, z_3$, 則過 $\Delta A_1A_2A_3$ 之最大正 n 邊形面積為

$$n\cot\frac{\pi}{n}\left|\left(\frac{z_3}{2} - z_2\right) i\cot\frac{2\pi}{n} - \frac{z_3}{2}\right|^2$$

證明. 可知 $\overline{N_1N_2} = 2\overline{O_1O_2}$

$$O_1 = z_2\left(\frac{1}{2} + ti\right) = sz_2\left(\cos\frac{(n-4)\pi}{2n} - i\sin\frac{(n-4)\pi}{2n}\right), \quad t, s \in \mathbb{R}$$
$$= sz_2\left(\sin\frac{2\pi}{n} - i\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$s\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}} \Rightarrow t = -s\cos\frac{2\pi}{n} = -\frac{1}{2}\cot\frac{2\pi}{n}.$$

帶回原式, 可得

$$O_1 = z_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\cot\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$O_2 = s(z_2 - z_3)\left(\sin\frac{2\pi}{n} + i\cos\frac{2\pi}{n}\right) + z_3 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3) + ti(z_2 - z_3), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow s\left(\sin\frac{2\pi}{n} + i\cos\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} + ti \Rightarrow s\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}} \Rightarrow t = s\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\cot\frac{2\pi}{n}.$$

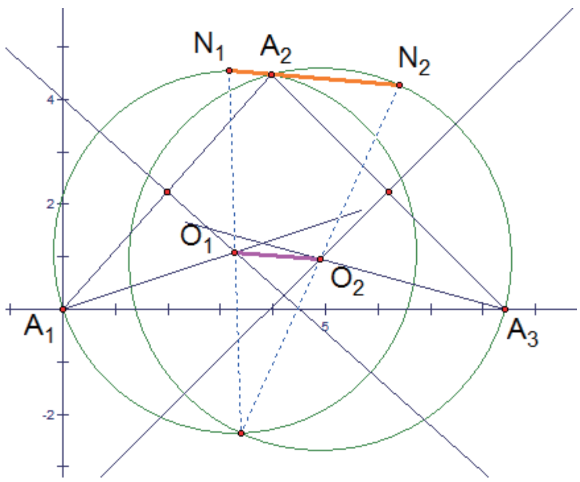
帶回原式, 可得

$$O_2 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3) + \frac{1}{2}i(z_2 - z_3)\cot\frac{2\pi}{n}$$

$$\overline{O_1O_2} = |O_1 - O_2| = \left|z_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\cot\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{1}{2}(z_2 + z_3) + \frac{1}{2}i(z_2 - z_3)\cot\frac{2\pi}{n}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{3z_3}{2} - z_2\right)i\cot\frac{2\pi}{n} - \frac{z_3}{2}\right|$$

$$\overline{N_1N_2} = 2\overline{O_1O_2} = 2\left|\left(\frac{z_3}{2} - z_2\right)i\cot\frac{2\pi}{n} - \frac{z_3}{2}\right|$$

$$N_1N_2\ldots N_n = \frac{n}{2}\left(2\left|\left(\frac{z_3}{2} - z_2\right)i\cot\frac{2\pi}{n} - \frac{z_3}{2}\right| \times \frac{\csc\frac{\pi}{n}}{2}\right)^2 \times \sin\frac{2\pi}{n} .$$
$$= n\cot\frac{\pi}{n}\left|\left(\frac{z_3}{2} - z_2\right)i\cot\frac{2\pi}{n} - \frac{z_3}{2}\right|^2$$

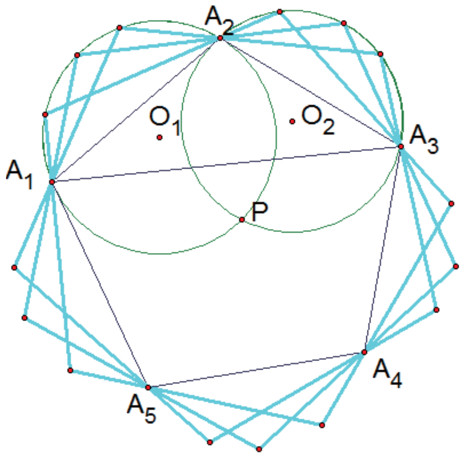


▲ 圖 (5)

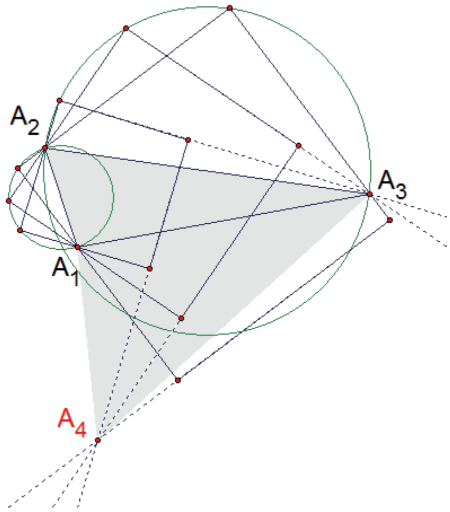
□

2.3 過已知 n 點之正 n 邊形性質探討

定理 3. 若同時有好幾個個過 $\Delta A_1A_2A_3$ 的正 n 邊形, 則這些正 n 邊形除了會通過點 $A_1, A_2, A, 3$ 外, 也都會的交於點 $A_4, A_5, \ldots\ldots, A_n$ 這 $(n-3)$ 個點.



▲ 圖 $(6a)$



▲ 圖 $(6b)$

證明. 如圖 (7), 設 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA_2}$, 連 $\overline{PO_2N_2}, \overline{PN_2'}, \overline{N_2N_2'}$.

$\because \overline{N_1N_2}, \overline{N_1'N_2'}$ 以 P 點位似, 且 $\Delta N_1N_2N_3 \sim \Delta N_1'N_2'N_3'$

$\therefore \overline{N_2N_3}, \overline{N_2'N_3'}$ 以 P 點位似

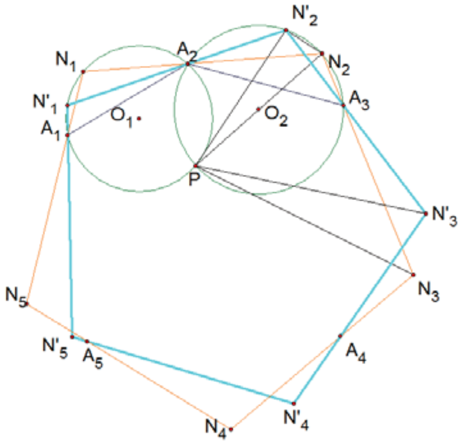
$\Rightarrow \Delta N_2PN_3 \sim \Delta N_2'PN_3' \Rightarrow \angle PN_3'N_2' = \angle PN_3N_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle PN_3'A_3 = \angle PN_3N_2, & \text{如圖 } (7a); \\ \angle PN_3'A_3 + \angle PN_3N_2 = \pi, & \text{如圖 } (7b). \end{cases}$$

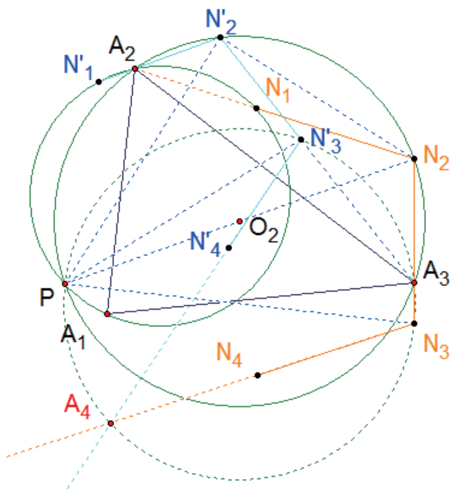
$\Rightarrow P, N_3, N_3', A_3$ 共圓 O_3.

$\because \angle A_3N_3N_4 = \angle A_3N_3'N_4' = \dfrac{(n-2)\pi}{n}$ $\therefore \overleftrightarrow{N_3N_4}$ 和 $\overleftrightarrow{N_3'N_4'}$ 交圓 O_3 於同一點 A_4.

以此類推, 故得證.



▲ 圖 $(7a)$



▲ 圖 $(7b)$

□

逆定理亦成立:

定理 4. 若在圓 O_1 取一點 N_1, 作 $\overrightarrow{N_1A_2}$ 交圓 O_2 於 N_2, 再作 $\overrightarrow{N_2A_3}$ 交圓 O_3 於 N_3 以此類推, 最後連 $\overline{N_nA_1N_1}$ 作出 $N_1N_2\ldots N_n$ 後, 且已知 $LN_i = \dfrac{\pi(n-2)}{n}$ 則 $N_1N_2\ldots N_n$ 為正 n 邊形.

證明. 連 $\overline{N_nA_1}, \overline{A_1N_1}$, 得 $N_1N_2\ldots N_nA_1$ 為 $(n+1)$ 邊形.

可知 $\angle N_1 + \angle N_2 + \cdots + \angle N_n + \angle N_1A_1N_n = \pi(n-1)$.

因為 $\angle N_1 + \angle N_2 + \cdots + \angle N_n = \pi(n-2)$, 所以 $\angle N_1A_1N_n = \pi$, 所以

$$N_n, A_1, N_1 \text{共線} \tag{1}$$

由定理 3 的證明可知過 $A_1A_2\ldots A_n$ 的最大正 n 邊形 $N_1'N_2'\ldots N_n'$ 必成立,

$\because \overline{N_i'N_{i+1}'}, \overline{N_iN_{i+1}}$ 以 P 點位似, 所以

$$\overline{N_1N_2} = \overline{N_2N_3} = \cdots = \overline{N_nN_1} \tag{2}$$

由 (1), (2) 得證. □

在文獻“你泥中有我, 我泥中有你”中將可作出無限多組過 n 點之正 n 邊形的 n 邊形視為特例, 而我們發現這種 n 邊形其實只要由三個相鄰頂點就可決定, 如定理 3, 已知點 A_1, A_2, A_3 就可作出點 $A_4, A_5, \ldots, A_n$.

性質 4. 圓 $O_1, O_2, \ldots, O_n$ 皆交於一點 P.

證明. 如圖 (8), 已知 $\angle A_2N_2A_3 = \angle A_3N_3A_4 = \dfrac{(n-2)\pi}{n}$, $\angle A_1PA_2 = \angle A_2PA_3 = \dfrac{2\pi}{n}$

作 ΔPA_3N_3 之外接圓 O_3, 並在圓 O_3 上取一點 A_4 使得 $\angle A_3N_3A_4 = \dfrac{3\pi}{5}$, 同理,

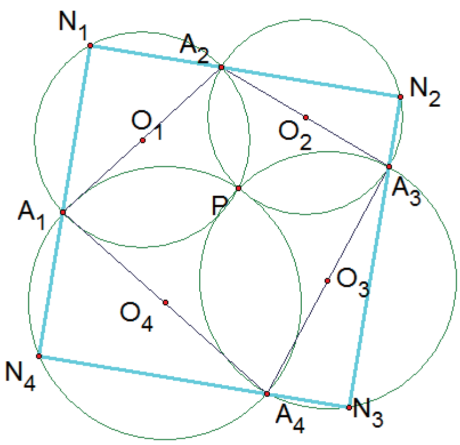
作 ΔPA_4N_4 之外接圓 O_4, 再取 A_5 等; 最後連接 $\overline{N_nN_1}$,

證 P, A_n, N_n, A_1 四點共圓.

$\angle N_n = (n-2)\pi - \sum_{k=1}^{n-1} \angle N_k = \dfrac{(n-2)\pi}{n}$, $\quad \angle A_nPA_1 = 2\pi - \sum_{k=1}^{n-1} \angle A_kPA_{k+1} = \dfrac{2\pi}{n}$

$\angle N_n + \angle A_nPA_1 = \dfrac{(n-2)\pi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} = \pi$, $\quad \therefore P, A_n, N_n, A_1$ 共圓

$\Rightarrow P$ 為圓 $O_1, O_2, \ldots, O_n$ 之共同交點, 得證.



▲ 圖 (8)

□

性質 5. 若 $N_1N_2\ldots N_n$ 為最大正 n 邊形, 則 P, O_i, N_i 共線, $\overline{PA_i} \perp \overline{N_iN_{i-1}}$.

證明. 同性質 1, 性質 2. □

2.4 推廣並探討費馬點和拿破崙定理與過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質

2.4.1 費馬點和第二費馬點的推廣

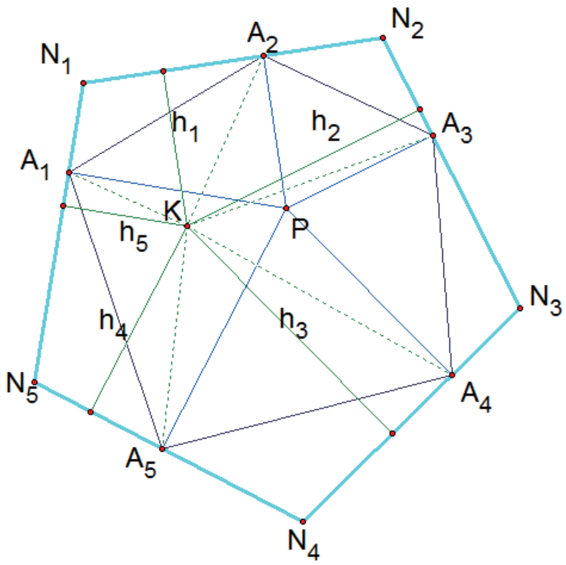
定理 5 (費馬點)**.** 若在稱引多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊上作出圓 $O_1,O_2,\ldots,O_n$ ，則其共同交點 P 為多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 之費馬點.

證明. 如圖 (9), 設已存在 $A_1A_2\ldots A_n$ 及圓 O_1,O_2 之交點 P, 由性質 5 可知過 $A_1A_2\ldots A_n$ 之最大正 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$ 滿足 $\overline{N_iN_{i-1}}\perp\overline{PA_i}$. 在 $N_1N_2\ldots N_n$ 中取任意一點 K 與 P 點不重合, 設 K 到各邊之長度依次為 $h_1,h_2,\ldots,h_n$ ，並連接 $\overline{KA_1},\overline{KA_2},\ldots,\overline{KA_n}$.

由勾股定理可知 $\overline{KA_i}>h_i\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{KA_k}>\sum\limits_{k=1}^{n}h_k\ldots$①

而由維維安尼定理可知 $\sum\limits_{k=1}^{n}h_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{PA_k}\ldots$②

綜合 ①② 可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{PA_k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{KA_k}$, 得證.

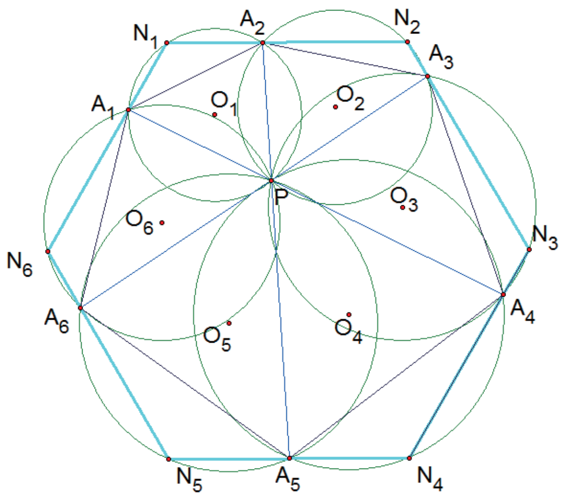


▲ 圖 (9)

□

性質 6. $\angle A_iPA_{i+1}=\dfrac{2\pi}{n}$.

證明. 如圖 (10), 已知 $A_iN_iA_{i+1}P$ 為圓內接四邊形 $\Rightarrow\angle A_iN_iA_{i+1}+\angle A_{i+1}PA_i=\pi$ 得證 $\angle A_iPA_{i+1}=\pi-\angle A_iN_iA_{i+1}=\dfrac{2\pi}{n}$.



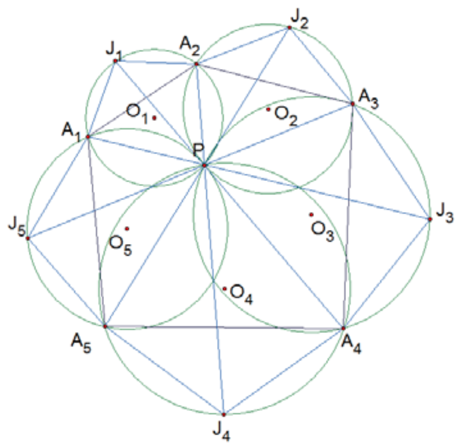
▲ 圖 (10)

□

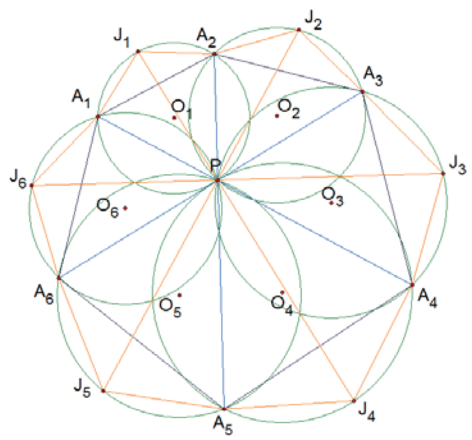
性質 7. 若已知稱引多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 及其費馬點 P, 往 $A_1A_2\ldots A_n$ 每邊外側作頂角為 $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形 $\Delta A_iJ_iA_{i+1}$, 則

(1) 假如 $n=2k+1$, 則 $\overline{A_1J_{1+k}}=\overline{A_2J_{2+k}}=\cdots=\overline{A_iJ_{i+k}}$, 且皆交於費馬點 P.

(2) 假如 $n=2k$, 則 $\overline{A_1A_{1+k}}=\overline{A_2A_{2+k}}=\cdots=\overline{A_iA_{i+k}}$, $\overline{J_1J_{1+k}}=\overline{J_2J_{2+k}}=\cdots=\overline{J_iJ_{i+k}}$, 且皆交於費馬點 P.



▲ 圖 (11a)



▲ 圖 (11b)

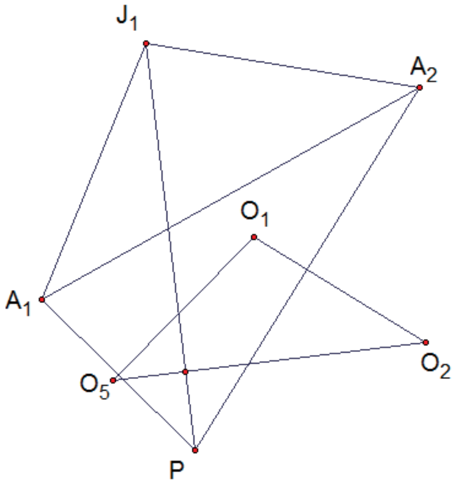
證明. 1. $n=2k+1$.

(1) $\overline{A_iJ_{i+k}}$ 皆交於費馬點 P. 此處須要先用到稱引多邊形的概念: 設已存在一正 n 邊形 $O_1O_2\ldots O_n$, 並有任意一點 P, 則 $A_1A_2\ldots A_n$ 為 P 點關於 $O_1O_2\ldots O_n$ 各邊作對稱所得的圖形. 先將問題簡化, 以 $n=5$ 為例, 如圖 (12a), 由稱引多邊形定義知 P 點以 $\overline{O_3O_4}$ 對稱於 A_4, 意即等價於證 $\overline{PJ_1}\perp\overline{O_3O_4}$, 且又因為 $\overline{O_3O_4}\parallel\overline{O_2O_5}$, 所以只須證明 $\overline{PJ_1}\perp\overline{O_2O_5}$. 令 $\overleftrightarrow{PJ_1}$ 交 $\overleftrightarrow{O_2O_5}$ 於 Y, $\overleftrightarrow{PA_2}$ 交 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 於 Z, 再連 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交 $\overleftrightarrow{PJ_1}$ 於 X, 如圖 (12b).

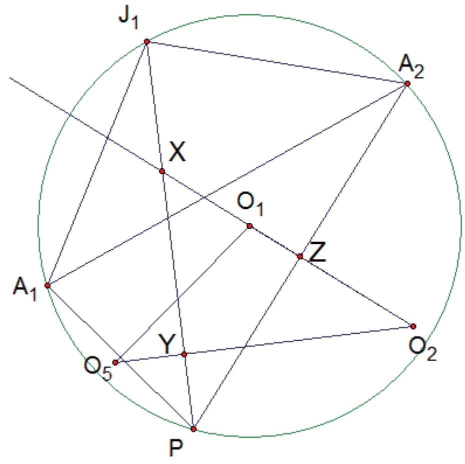
$\because \angle A_2PA_1+\angle A_2J_1A_1=\angle A_2PA_1+\angle O_5O_1O_2=\pi$, $\therefore P, A_1, A_2, J_1$ 共圓.

$\because \angle A_2PJ_1=\angle A_2A_1J_1=\angle O_1O_2O_5$, 且$\angle PXZ=\angle YXO_2$

$\therefore \Delta PXZ \sim \Delta O_2XY(AA$ 相似$) \Rightarrow \angle XYO_2 = \angle XZP = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \overline{PJ_1} \perp \overline{O_2O_5}$, 得證.



▲ 圖 $(12a)$



▲ 圖 $(12b)$

(2) $\overline{A_1J_{1+k}} = \overline{A_2J_{2+k}} = \cdots = \overline{A_iJ_{i+k}}$. 以 $n = 5$ 為例, 令 $\overline{J_1P}$ 中點為 M_1, $\overline{O_3O_4}$ 垂直平分 $\overline{PA_4}$ 於 K_1, $\overline{O_1H_1} \perp \overline{O_3O_4}$ 於 H_1. 可得知 $\overline{M_1K_1} = \dfrac{1}{2}\overline{J_1P} \ldots$ ① $\because \overline{J_1P}$ 為圓 O_1 之弦 $\therefore \overline{O_1M_1} \perp \overline{J_1P}$

又 $\because \overline{O_1M_1} \perp \overline{J_1P}$, $\overline{PK_1} \perp \overline{O_3O_4}$, $\overline{O_1H_1} \perp \overline{O_3O_4}$, $\quad \therefore O_1M_1K_1H_1$ 為矩形

$\Rightarrow \overline{M_1K_1} = \overline{O_1H_1} \ldots$ ②

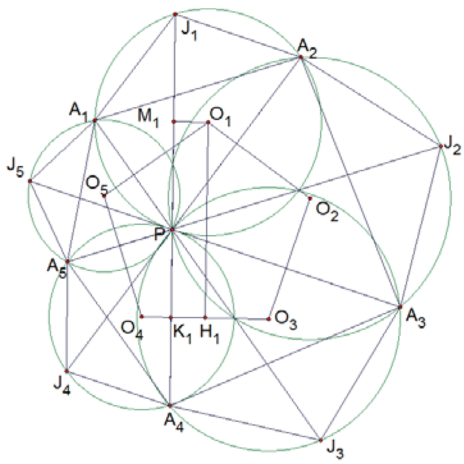
由 ①② , 得 $\overline{A_4J_1} = 2\overline{O_1H_1}$

以此類推, $\overline{A_iJ_{i+k}} = 2\overline{O_{i+k}H_{i+k}} \ldots$ ③

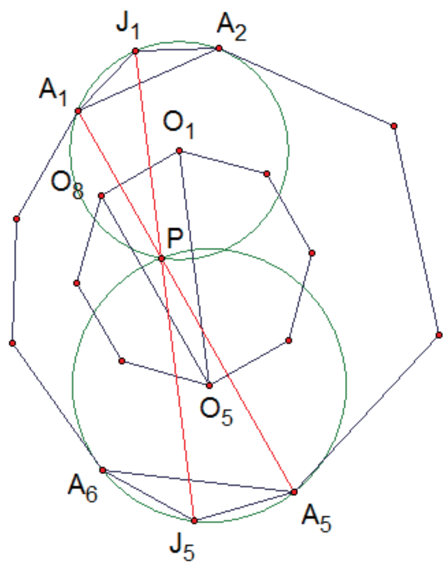
又知 $\overline{O_1H_1} = \overline{O_2H_2} = \cdots = \overline{O_iH_i} \ldots$ ④

由 ③④, 得證 $\overline{A_1J_{1+k}} = \overline{A_2J_{2+k}} = \cdots = \overline{A_iJ_{i+k}}$.

2. $n = 2k$ 證明雷同, 其中可得 $\overline{A_iA_{i+k}} = 2\overline{O_iO_{i+k+1}}$, $\overline{J_iJ_{i+k}} = 2\overline{O_iO_{i+k}}$ 故得證.



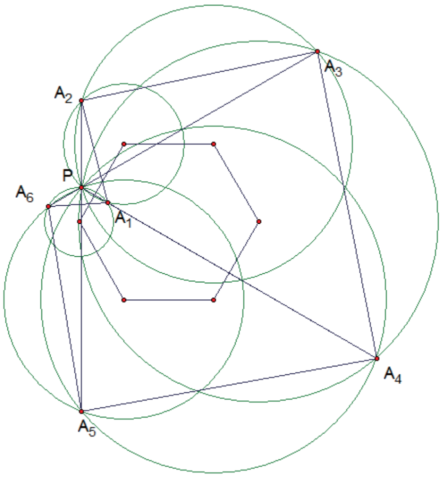
▲ 圖 (13)



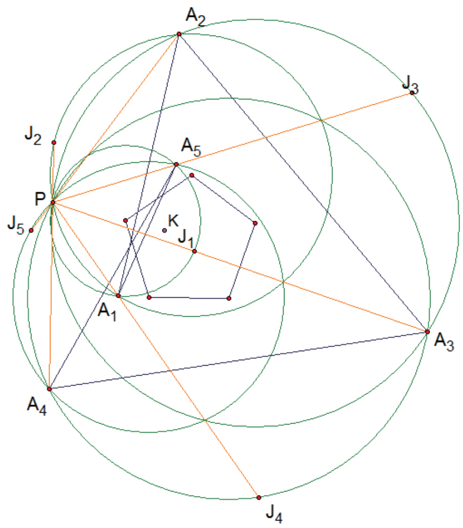
▲ 圖 (14)

□

當 P 點到 $O_1O_2\ldots O_n$ 外時, 若且唯若 $A_1A_2\ldots A_n$ 有至少一內角大於 $\dfrac{(2n-4)\pi}{n}$, P 點到 $A_1A_2\ldots A_n$ 各頂點的距離和就不為最小值, 但性質 6, 性質 7 仍成立; 其中, 若 $A_1A_2\ldots A_n$ 為凹多邊形, 則此大於 $\dfrac{(2n-4)\pi}{n}$ 之內角的頂點與各頂點距離和最小, 如圖 $(15a)$;若 $A_1A_2\ldots A_n$ 為折多邊形, 則到各頂點距離和最小的點無法作出, 在圖 $(15b)$ 中估計約為 K 點位置.



▲ 圖 $(15a)$

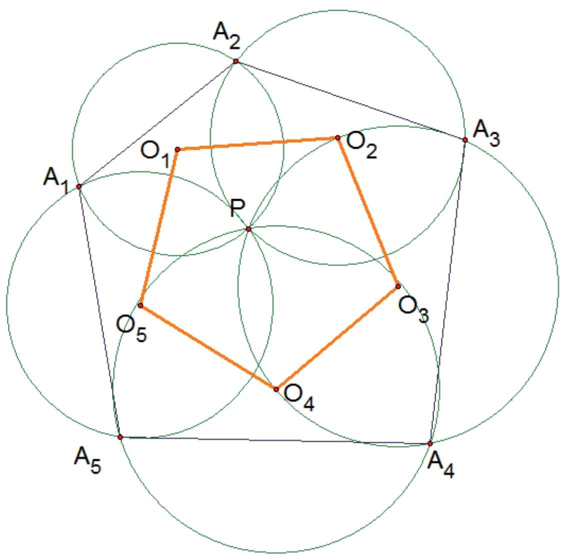


▲ 圖 $(15b)$

我們試著將這結論帶入到任意 n 邊形看是否會成立, 卻發現圓 $O_1,O_2,\ldots,O_n$ 不會交於同一點, 利用程式也觀察出其費馬點可以不在圓的任何交點上, 故可知此處的廣義費馬點的存在沒有一般性.

2.4.2 拿破崙定理之推廣

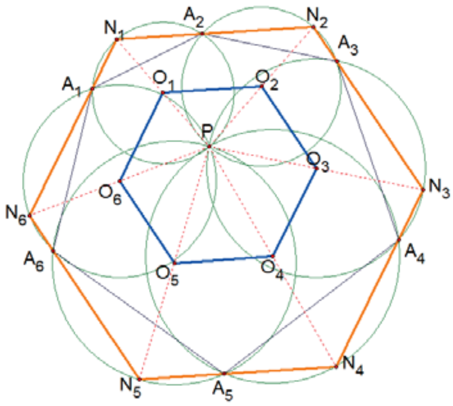
定理 6 (外拿破崙多邊形). 若 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊向外作頂角為 $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形的外心 $O_1,O_2,\ldots,O_n$, 則 $O_1O_2\ldots O_n$ 是正 n 邊形.



▲ 圖 (16)

證明. 如圖 (17) , 作過 $A_1A_2\ldots A_n$ 最大正 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$, 連 $\overline{O_iO_{i+1}}$, 再由

性質 5 連 $\overline{PO_iN_i}$ $\because$ $\overline{PO_i}=\overline{O_iN_i} \Rightarrow \overline{O_iO_{i+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{N_iN_{i+1}}$,
且 $\overline{O_iO_{i+1}} \,/\!/\, \overline{N_iN_{i+1}} \Rightarrow N_1N_2\ldots N_n \sim O_1O_2\ldots O_n$ $\therefore$ $O_1O_2\ldots O_n$ 為正 n 邊形,
得證.



▲ 圖 (17)

□

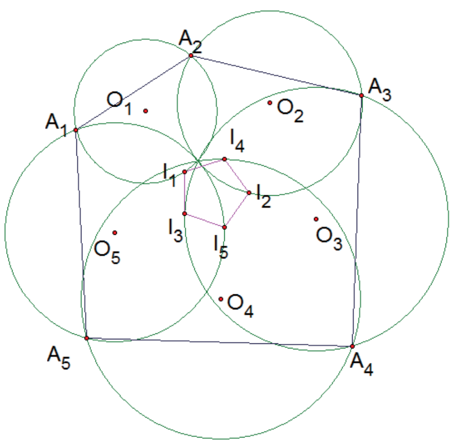
因為兩圓 O_{i-1}, O_i 之交點 P, A_i 以連心線對稱, 故可將 $A_1A_2\ldots A_n$ 考慮為以 P 點關於正 n 邊形 $O_1O_2\ldots O_n$ 之各邊對稱後連線的多邊形, 並將其命名為稱引多邊形.

此處的外拿破崙多邊形的存在沒有一般性.

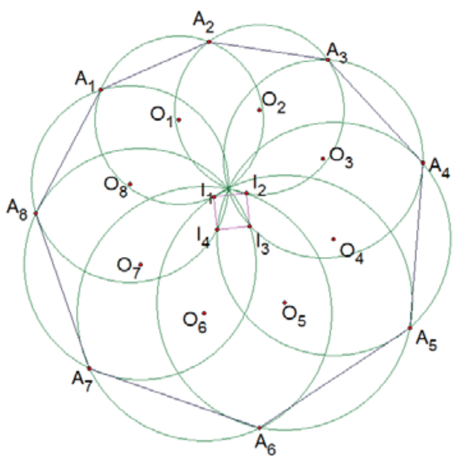
定理 7 (內拿破崙多邊形)**.** 若 I_i 為 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 向內側作正 n 邊形之外心, 則

(1) 假如 $n=2k+1$, 則 $I_1I_2\ldots I_n$ 為正 n 邊形.

(2) 假如 $n=2k$, 則因為 $I_i=I_{i+k}$, 故 $I_1I_2\ldots I_k$ 為正 k 邊形(其中當 $n=4$ 時, 則只存在 $\overline{I_1I_2}$, 無法形成正多邊形).



▲ 圖 (18a)



▲ 圖 (18b)

證明. 在證明 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ 形成正 n 邊形前, 首先先證明下面這個性質:

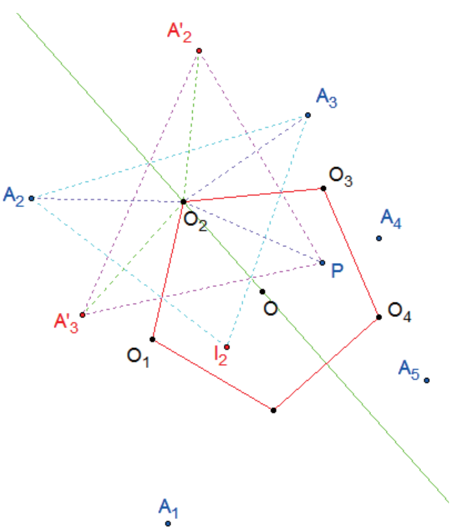
性質 8. 設 O 為外拿破崙 n 邊形的中心, 將 A_i 視為 P 關於 $\overline{O_{i-1}O_i}$ 的對稱點(其中 $O_n=O_0$), I_2 為 $\overline{A_2A_3}$ 向內作正 n 邊形的中心, 則 I_i 和 P 關於直線 $\overline{OO_i}$ 對稱.

證明. 如圖 (19), 設 A_2, A_3 關於 $\overline{OO_2}$ 的對稱點分別為 A_2', A_3', 則只需證 P 為 $\overline{A_2'A_3'}$ 向內作正邊 n 形的中心, 首先由 $\overline{O_2P}=\overline{O_2A_2}=\overline{O_2A_3}=\overline{O_2A_2'}=\overline{O_2A_3'}$ 可知 O_2 為

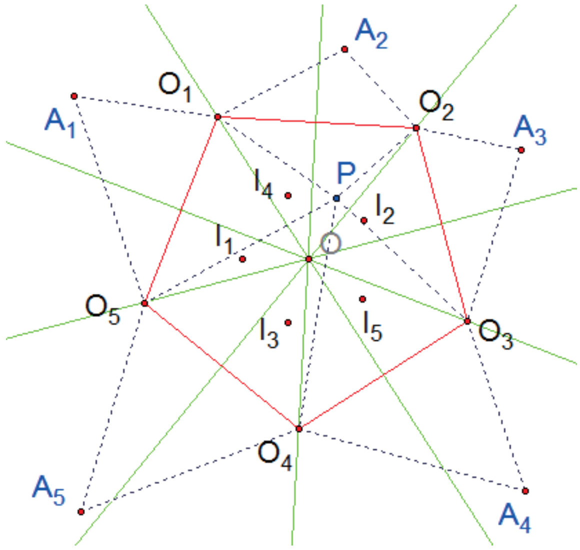
$\Delta PA_2'A_3'$ 的外心, 又

$$\begin{aligned}\angle PO_2A_3' &= 2\pi - \angle A_3'O_2A_3 - \angle A_3O_2P = 2\pi - 2(\pi - \angle OO_2A_3) - 2\angle A_3O_2O_3 \\ &= 2(\angle OO_2A_3 - \angle A_3O_2O_3) = 2\angle OO_2O_3 = \pi - \frac{2\pi}{n}.\end{aligned}$$

同理可證得 $\angle PO_2A_2' = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$, 故 $\angle A_3'PA_2' = \dfrac{2\pi}{n}$ 且 $\overline{PA_2'} = \overline{PA_3'}$,
於是得證 I_2 和 P 關於直線 $\overline{OO_2}$ 對稱, 以此類推. □



▲ 圖 (19)

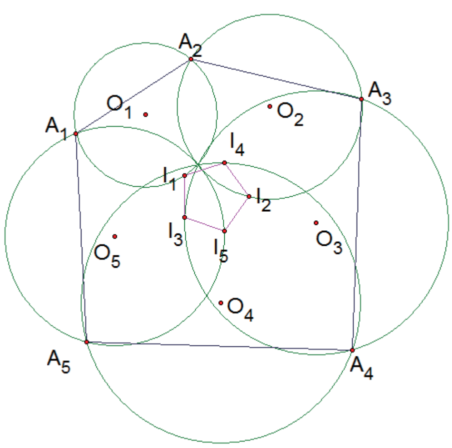


▲ 圖 (20)

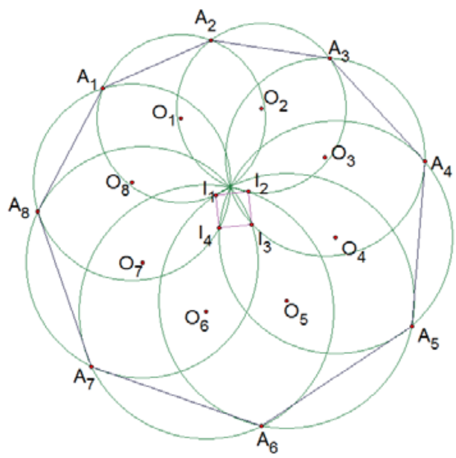
現在回到原題, 如圖 (20), 由上性質可推得 $\overline{OP} = \overline{OI_1} = \overline{OI_2} = \cdots = \overline{OI_n}$, 且
$\angle I_1OI_2 = \angle I_1OP - \angle I_2OP = 2\angle POO_1 - 2\angle POO_2 = 2\angle O_1OO_2 = \dfrac{4\pi}{n}$, 同理可得
$\angle I_2OI_3 = \angle I_3OI_4 = \cdots = \angle I_nOI_1 = \dfrac{4\pi}{n}$, 所以多邊形 $I_1I_2\ldots I_n$ 形成正 n 邊形得
證.(註: 當 n 為偶數時, 由 $\overleftrightarrow{OO_i} = \overleftrightarrow{O_iO_{i+\frac{n}{2}}}$ 可知 I_i 和 $I_{i+\frac{n}{2}}$ 重合, 故此時此圖形為正
$\dfrac{n}{2}$ 邊形.) □

此處的內拿破崙多邊形仍沒有一般性.

性質 9. $A_1A_2\ldots A_n$ 之內, 外拿破崙多邊形有共同外心 O.



▲ 圖 (21a)



▲ 圖 (21b)

證明. 由內拿破崙多邊形的證明中可知 $\overline{OI_1} = \overline{OI_2} = \cdots = \overline{OI_n}$, 即得證 O 為 $I_1I_2\ldots I_n$ 之外心. □

性質 10. 稱引多邊形與其拿破崙多邊形有共同重心.

證明. 利用複數解析, 以 $O_1O_2\ldots O_n$ 的中心 O 為原點, O_1 的座標為 1, 記 $\omega = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, 則可知 $O_k = \omega^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 我們先導出 P 關於任意兩點 A, B 的對稱點的座標公式. 設 P, A, B 的複數座標分別為 p, a, b, 設 P 到 $\overline{AB}$ 的垂足座標為 z, 則 z 滿足:

$$\begin{cases} \dfrac{z-a}{a-b} \in \mathbb{R} \\ \\ Re\left(\dfrac{p-z}{z-b}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z-a}{a-b} & = \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{a}-\overline{b}} \\ \\ \dfrac{p-z}{a-b} & = \dfrac{-\overline{p}+\overline{z}}{\overline{a}-\overline{b}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\overline{b}-\overline{a})z + a(\overline{a}-\overline{b}) & = (b-a)\overline{z} + \overline{a}(a-b) \\ (\overline{b}-\overline{a})z + p(\overline{a}-\overline{b}) & = (b-a)\overline{z} + \overline{p}(a-b) \end{cases}$$

將兩式相加, 得

$$2(\overline{b}-\overline{a})z = \overline{p}(b-a) + p(\overline{b}-\overline{a}) + (a\overline{b}-b\overline{a}) \Rightarrow z = \frac{b-a}{2(\overline{b}-\overline{a})}\overline{p} + \frac{1}{2}p + \frac{a\overline{b}-\overline{a}b}{2(\overline{b}-\overline{a})}.$$

所以對稱點的座標為

$$2z - p = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}p + \frac{a\overline{b}-b\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

回到原題, 所以可知 P 關於 $\overline{O_kO_{k+1}}$ 的對稱點為

$$\begin{aligned} \frac{\omega^k-\omega^{k-1}}{\overline{\omega^k}-\overline{\omega^{k-1}}}p + \frac{\omega^{k-1}\overline{\omega^k}-\overline{\omega^{k-1}}\omega^k}{\overline{\omega^k}-\overline{\omega^{k-1}}} &= \frac{\omega^k-\omega^{k-1}}{\omega^{1-k}-\omega^{2-k}}p + \frac{\omega^{k-1}\omega^{1-k}-\omega^{2-k}\omega^k}{\omega^{1-k}-\omega^{2-k}} \\ &= \omega^{2k-1}p + \frac{1-\omega^2}{\omega^{1-k}-\omega^{2-k}} = \omega^{2k-1}p + \frac{\omega^{k-1}-\omega^{k+1}}{1-\omega}. \end{aligned}$$

所以 n 個對稱點的重心座標為

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega^{2k-1}p + \frac{\omega^{k-1}-\omega^{k+1}}{1-\omega}\right) &= \frac{1}{n}\left(p\sum_{k=1}^{n}\omega^{2k-1} + \frac{1}{1-\omega}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\omega^{k+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(p\frac{\omega(1-\omega^n)}{1-\omega^2} + \frac{1}{1-\omega}(0-0)\right) = 0. \end{aligned}$$

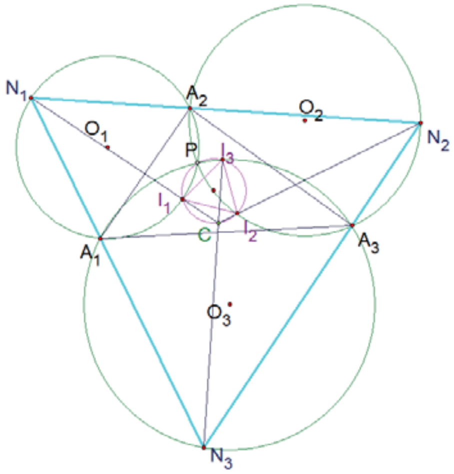
得證. □

2.4.3 過 n 點之正 n 邊形, 廣義費馬點, 拿破崙多邊形之綜合性質

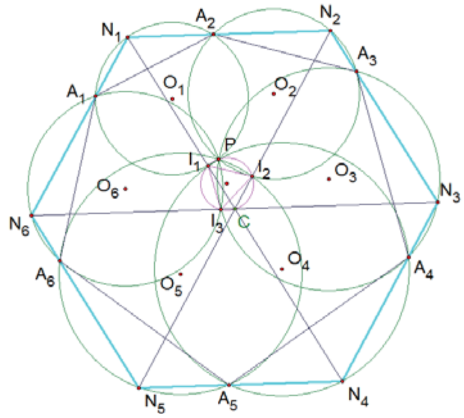
性質 11. 令過 $A_1A_2\ldots A_n$ 之正 n 邊形的各頂點為 N_i, 外心為 C , 和 $A_1A_2\ldots A_n$ 之內拿破崙多邊形為 $I_1I_2\ldots I_n$, 費馬點為 P, 則

(1) N_i, I_i, C 共線;

(2) $P, C, I_1I_2\ldots I_k$ 共圓 O ($n = 4$ 時, $\overline{I_1I_2}$ 為直徑).



▲ 圖 $(22a)$



▲ 圖 $(22b)$

證明. 1. N_i, C, I_i 共線. $\because \overset{\frown}{A_iI_i} = \overset{\frown}{I_iA_{i+1}}$ $\therefore$ $\angle A_iN_iI_i = \angle A_{i+1}N_iI_i$
$\Rightarrow \overrightarrow{N_iI_i}$ 為 $\angle A_iN_iA_{i+1}$ 之角平分線 $\Rightarrow C$ 在 $\overrightarrow{N_iI_i}$ 上, 得證.

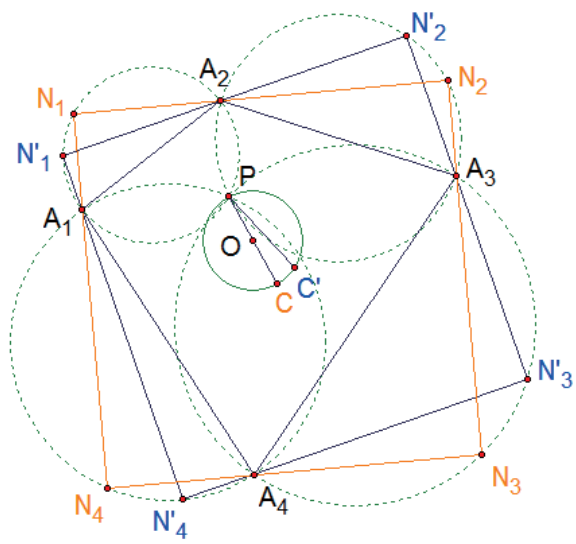
2. C 在 $I_1I_2 \ldots I_n$ 之外接圓上.
已知 $\angle N_1CN_2 = \dfrac{2\pi}{n}$, 且 C 在 $\overrightarrow{N_iI_i}$ 上 $\Rightarrow \angle I_1CI_2 = \angle N_1CN_2 = \dfrac{2\pi}{n}$.
又 $\because \overset{\frown}{J_1J_2} = \dfrac{4\pi}{n} = 2\angle I_1CI_2 \therefore C$ 在 $I_1I_2 \ldots I_n$ 的外接圓上, 得證.

3. P 在圓 O 上.
由內拿破崙多邊形的證明可得 $\overline{OP} = \overline{OI_1} = \overline{OI_2} = \cdots = \overline{OI_n}$, 得證. □

性質 12. 令過已知 n 點之正多邊形 $N_1N_2 \ldots N_n$, $N_1'N_2' \ldots N_n'$ 的外心為 C, C', 其中 $N_1N_2 \ldots N_n$ 為最大正 n 邊形, 則

(1) $\overline{CP}$ 為圓 O 直徑;

(2) $N_1'N_2' \ldots N_n' = N_1N_2 \ldots N_n \times \cos^2 \angle CPC'$.



▲ 圖 (23)

證明. 1. $\overline{CP}$ 為圓 O 直徑.

考慮更强的命題: $\angle POC' = \angle PO_iN_i'$.

如圖 $(24a)$, 以正方形 $\angle PO_3N_3'$ 為例, 連 $\overline{PI_1}, \overline{I_1C'N_3'}$.

在圓 O 中, $\angle POC' = 2\angle PI_1C'$.

在圓 O_3 中, $\angle PO_3N_3 = 2\angle PI_1N_3'$.

故得 $\angle POC = \angle PO_3N_3$.

以此類推, 可得 $\angle POC' = \angle PO_iN_i'$;

其中由性質 5 可知 P, O, C 共線為最大正 n 邊形的特例, 得證.

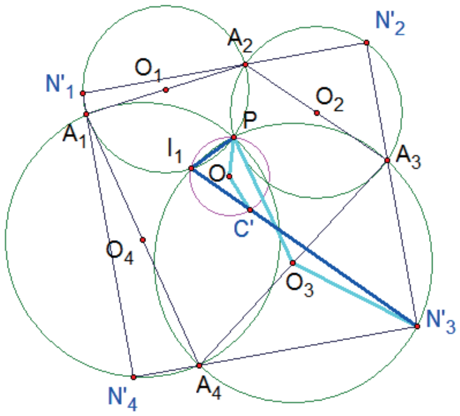
2. $N_1'N_2'\ldots N_n' = N_1N_2\ldots N_n \times \cos^2\angle CPC'$ 以性質 10 連 $\overline{CI_2N_2}, \overline{C'I_2N_2'}$

$\Rightarrow \angle N_1A_2N_1' = \angle N_2A_2N_2' = \angle N_2I_2N_2' = \angle C'I_2C = \angle C'PC$

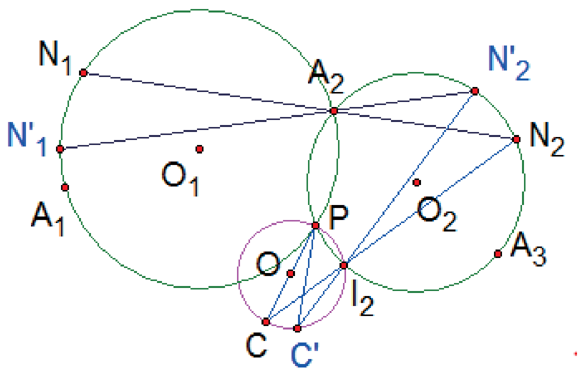
$\Rightarrow \angle N_1A_2N_1' = \angle C'PC \ldots$ ①

再由定理 2 之證明可得 $\overline{N_1'N_2'} = \overline{N_1N_2} \times \cos\angle N_1A_2N_1' \ldots$ ②

由 ①② 即可得證原題.



▲ 圖 $(24a)$



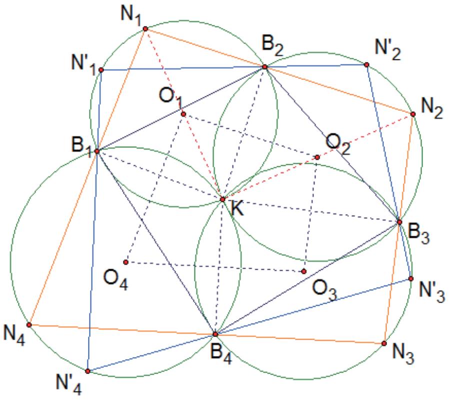
▲ 圖 $(24b)$

□

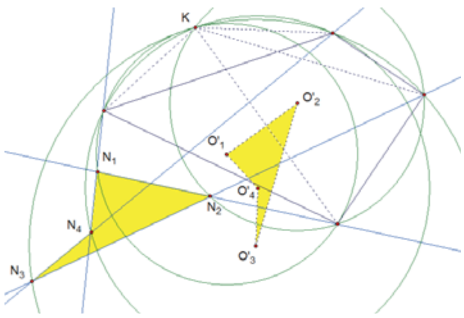
2.5 外拿破崙多邊形一般性猜測

猜測. 給定任意 n 邊形 $B_1B_2\ldots B_n$ 和任意一點 K, 作 $\overline{KB_i}$ 中垂線, 令 $\overline{KB_i}, \overline{KB_{i+1}}$ 之中垂線交於 O_i' , 則猜測 n 邊形 $O_1'O_2'\ldots O_n'$ 為 n 邊形 $B_1B_2\ldots B_n$ 關於 K 點的外拿破崙 n 邊形.

說明. 分別以 O_i' 為圓心, $\overline{O_i'P}$ 為半徑畫圓, 並在圓 O_1' 上取一點 N_1 , 同定理 1 方式作出 n 邊形 $N_1N_2\ldots N_n$, 會發現到 $N_1N_2\ldots N_n \sim O_1'O_2'\ldots O_n'$;且可推知: 當過 n 點之 n 邊形為正 n 邊形時, $O_1'O_2'\ldots O_n'$ 即為外拿破崙 n 邊形的情況, 此也與定理 6 的證明符合. 故也就合理猜測 $O_1'O_2'\ldots O_n'$ 即為外拿破崙多邊形的一般性. 另外, $B_1B_2\ldots B_n$ 也可考慮為任意一點 K 以 $O_1'O_2'\ldots O_n'$ 每邊做對稱連線所得的圖形.



▲ 圖 $(25a)$



▲ 圖 $(25b)$

應用. 可以直接作出任意多邊形的相似形, 並再用 $\angle N_1B_2K$ 的大小即可控制其邊長比例.

3 未來展望

1. 證明拿破崙定理是否只存在於稱引多邊形中.
2. 將研究內容往三維空間發展: “任意不共面四點, 是否存在一正 n 面體使之每點皆在正 n 面體的一面上”, 或“將費馬點, 拿破崙定理推廣到三維空間”等.

參考文獻

[1] 黃家禮(95), 幾何明珠, 九章出版社.

[2] H.S.M. 考克瑟特, S.L. 格雷策, 幾何學的新探索, 凡異出版社.

[3] 全國科展第 51 屆高中數學組, 你泥中有我, 我泥中有你.