

蜜蜂路徑—找回失落的數字

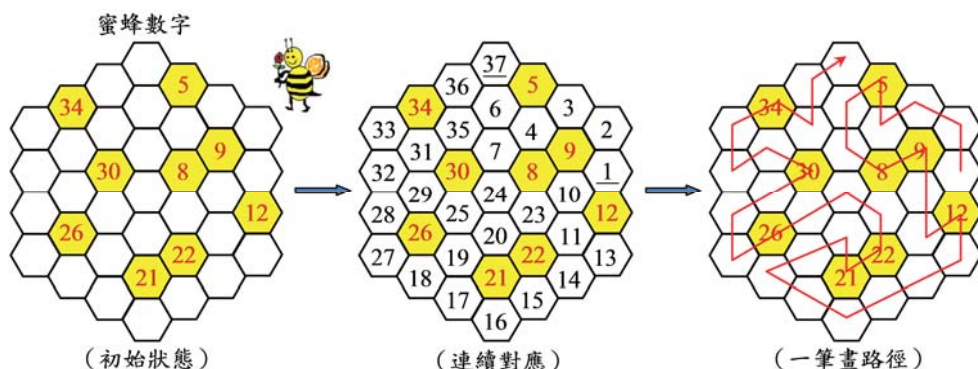
臺北市立第一女子高級中學 朱雅琪
指導老師 楊宗穎

中文摘要

給定 S 為 $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ 的一個子集合, 並預先將 S 中的數字填入一個 n 階方陣. 若能將剩餘自然數 $\{1, 2, 3, \dots, n^2\} - S$ 全部填入此方陣中未被 S 所佔據的格子, 滿足“相鄰的數字需填入方陣中相鄰的格子”且“填入數字的方法是唯一的”, 則稱 S 為 n 階方陣的一個“確定集”. 本作品探討確定集 S 所需的“最少元素個數”以及“填入 n 階方陣中的策略”, 使得若刪除 S 中任何一個元素, 則剩餘自然數填入方陣的方法皆不唯一. 我們定義“連續對應函數”, 並觀察低維度的特例, 找出最小確定集的條件並推廣到一般情形. 同時也觀察填入路線, 與路線轉折次數所造成的影響, 並得出一些有趣的數學性質.

1 研究動機

我們偶然在 2013 年 7 月 7 日(星期日)的聯合報上看到一個特別的遊戲—蜜蜂數字. 它有些類似數獨, 但在細節上又不太一樣. 同樣是遊戲設計者先在部分格子中給定特定數字, 然後由玩家將剩餘數字填入剩下的格子內, 不過蜜蜂數字填數字的規則是:「從 1 開始, 以相鄰且不間斷的方式將數字填入格子內」(因為這個正六邊形鑲嵌圖共有 37 個格子, 故要填入的數字為 1 到 37). 在嘗試了這個遊戲後, 我們好奇: 它事先給定的數字, 真的能造成唯一的解答嗎? 而在這樣的圖形內, 最少要事先給玩家幾個數字才可能使解答唯一?



轉換此問題, 我們將原本正鑲嵌圖中的正六邊形改成正方形來研究, 也就是以方陣來討論這個遊戲. 遊戲規則是: 在 $n \times n$ 的方陣中, 部分特定的格子已經被編號(已填入數字), 玩家從 1 開始, 將數字 $1, 2, \dots, n^2$ 以相鄰且不間斷的方式填入格子中. 我們關心的是在設計遊戲時“事先可給定哪些數字?”以及“該擺放在哪些位置?”

在傳統的數獨遊戲中, 目前已知至少要給定 17 個數才能保證有唯一解, 然而在有唯一解的前提下, 是否存 16 個初始數的數獨題目呢? 2012 年 1 月 1 日, 都柏林大學的 Gary McGuire 利用計算機已證明出“不存在 16 個初始數的數獨題目”, 意即, 在數獨遊戲中, 最少需給定 17 數才能有唯一解. 所以在我們的研究問題當中, 我們同樣關心至少需事先在 n 階方陣中需填入多少個數字, 使其餘數字填入的方法唯一.

2 研究目的

對於一個 $n \times n$ 方陣, 設計一個 $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ 的子集合 S , 並將 S 中的數字預先安排在方陣中特殊的位置, 滿足下列兩個條件:

條件(1): 能將其餘數字 $\{1, 2, 3, \dots, n^2\} - S$ 也填入同一個被 S 佔據部分位置的方陣中時, 相鄰的自然數可被安排在方陣中相鄰的位置, 且填入方法唯一.

條件(2): 若在此方陣中刪除 S 中任意一個數字, 皆會造成其餘數字填入的方法不唯一.

對於這個特殊的子集合 S , 我們欲說明存在一種策略, 能將 S 中的數字預先填入 n 階方陣的特殊位置, 並且能滿足上述兩個條件.

3 研究設備及器材

方格紙, 筆, 電腦, 繪圖程式(powerpoint、word), mathtype.

4 研究過程或方法

4.1 基本概念與名詞解釋

對於一個 $n \times n$ 的階方陣, 共有 n^2 個位置 $\{a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$, 其中 a_{ij} 代表此方陣中第 i 列第 j 行的位置. 此外, 若方陣中任兩位置 $a_{i_1 j_1}$ 與 $a_{i_2 j_2}$ 滿足 $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1$, 則稱為相鄰, 以“ $a_{i_1 j_1} \sim a_{i_2 j_2}$ ”表示. 若方陣中 n^2 個位置與自然數 $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ 形成一對一的對應, 使得相鄰的自然數對應到方陣中相鄰的位置, 我們稱此對應的方式為“**連續對應**”. 換句話說, 所謂連續對應是一對一函數 $f: \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n^2\}$, 滿足『對所有 $|f(a_{i_1 j_1}) - f(a_{i_2 j_2})| = 1$, 均有“ $a_{i_1 j_1} \sim a_{i_2 j_2}$ ”』.

考慮 1×1 的方陣, 則函數 $f(a_{11}) = 1$ 即為一個連續對應函數.

考慮 2×2 的方陣, 若定義函數 $f: \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ 為 $f(a_{11}) = 1$, $f(a_{21}) = 2$, $f(a_{22}) = 3$, $f(a_{12}) = 4$, 則此函數即為一個連續對應函數. 方便起見, 可用下圖表示:

1
1 4 2 3

對於一個 n 階方陣, 當然存在有許多不同的連續對應函數, 例如:

1 4 2 3	1 2 4 3	3 2 4 1
------------	------------	------------

此三個圖表皆可視為 2 階方陣的連續對應函數, 而

1	4
3	2

則不是 2 階方陣的連續對應函數.

對於 n 階方陣, 隨著自然數 n 的變大, 連續對應函數的數量將隨之增加. 如欲使 n 階方陣的連續對應函數唯一, 則可事先給定若干位置上的函數值來限制其連續對應函數的數量.

我們的問題是研究一個 n 階方陣, 其中若干的位置上已填有某些 $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ 的自然數, 則是否能將剩下的自然數全部填入此方陣, 滿足相鄰的數字需填入方陣中相鄰的位置, 且填入數字的方法必須是唯一的.

以 3 階方陣為例:

例1:若給定 $f(a_{22}) = 1$, $f(a_{23}) = 4$, $f(a_{31}) = 7$, 如(圖一), 則填入數字的方法唯一, 如(圖二).

	1	4
7		

(圖一)



連續對應唯一

9	2	3
8	1	4
7	6	5

(圖二)

例2:若給定 $f(a_{12}) = 1$, $f(a_{23}) = 4$, $f(a_{31}) = 7$, 如(圖三), 則不存在連續對應函數.

	1	
		4
7		

(圖三)

為了方便後續的論述, 令子集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n^2\}$. 若 S 滿足條件(1), 則稱 S 為 n 階方陣的“**確定集**”. 當 S 滿足條件(2), 則稱 為“**極小確定集**”.

	1	4
7		

(圖一)

1	4	

(圖四)

例3:由例 1(圖一)可知集合 $S = \{1, 4, 7\}$ 為 3 階陣列的一個確定集, 然而我們刪去 S 中任一個數字, 皆造成此陣列會有兩個以上的連續對應函數, 故 $S = \{1, 4, 7\}$ 即為 3 階陣列的一個極小確定集.

例4: $f(a_{11}) = 1, f(a_{12}) = 4$, 如(圖四)也是一個 3 階方陣的極小確定集.

由例3、例4可以知道: n 階方陣可以有不同元素個數之極小確定集.

令 $R_n = \{|S| : S \text{ 為 } n \text{ 階陣列的極小確定集}\}$, 並稱呼 R_n 的最小值為“最小確定數”, 以 $M(n)$ 表示, 即: $M(n) = \min\{|S| : S \text{ 為 } n \text{ 階陣列的極小確定集}\}$.

若 S 為極小確定集且滿足 $|S| = M(n)$, 則 S 稱為 n 階方陣的“最小確定集”.

對於一個 n 階方陣 A_n , 若自然數 $k < n$, 則稱 $\{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq k\}$ 所形成的方陣為 A_n 的“ k 階子方陣”, 並記為“ A_k ”.

令 $f : \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ 為 n 階方陣的一個連續對應數, 且 $1 \leq p < q \leq n^2$, 則定義 $f^{-1}[p, q] = (f^{-1}(p), f^{-1}(p+1), \dots, f^{-1}(q))$ 代表 f 在 n 階方陣中, 從位置 $f^{-1}(p)$ 到 $f^{-1}(q)$, 依自然數序列 $p, p+1, p+2, \dots, q$ 所形成之連續路徑. 以(圖五)為例,

$$\begin{aligned} f^{-1}[3, 9] &= (f^{-1}(3), f^{-1}(4), f^{-1}(5), f^{-1}(6), f^{-1}(7), f^{-1}(8), f^{-1}(9)) \\ &= (a_{22}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{32}, a_{31}) \end{aligned}$$

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

(圖五)

4.2 重要引理

引理 1.

1. 空集合 ϕ 為 1 階方陣的一個最小確定集, 意即最小確定數 $M(1) = 0$.
2. 集合 $\{1, 4\}$ 為 2 階方陣的一個最小確定集, 意即最小確定數 $M(2) = 2$.

證明.

1. 1 階方陣只有一格, 所以不需安排任何數字, 即可確定要填入 1, 且為連續對應函數. 故可知 ϕ 為 1 階方陣的一個極小確定集, 且同時為最小確定集, 因而最小確定數 $M(1) = 0$.
2. 在 2 階方陣中, 若將集合 $\{1, 4\}$ 的 1, 4 分別安排在 a_{11}, a_{12} , 如(圖六), 則可以知道此 2 階方陣所對應出的連續對應函數是唯一的, 如(圖七).

且當任意刪除(圖六)其中一個數字, 會發現皆可定義出兩個連續對應函數, 故可以確定集合 $\{1, 4\}$ 為 2 階方陣的一個極小確定集. 接著逐一檢驗, 可發現元素個數少於 2 的集合: $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ 皆不是 2 階方陣的極小確定集, 因此集合 $\{1, 4\}$ 為 2 階方陣的一個最小確定集, 而最小確定數 $M(2) = 2$. □

1	4

(圖六)



1	4
2	3

(圖七)

連續對應唯一

引理 2. 集合 $\{1, 4\}$ 為 3 階方陣的最小確定集, 意即 $M(3) = 2$.

證明. 首先, 將集合 $\{1, 4\}$ 安排在 a_{11}, a_{12} 的位置, 如(圖八), 並依藍色箭頭方向依序將 $\{1, \dots, 3^2\} - \{1, 4\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的數字填入剩餘的格子, 由於數字 2 必填在 a_{21} 字 3 必填在 a_{22} , 可知其連續對應函數是唯一的, 如(圖十).

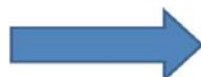
1	4	

(圖八)



1	4	
2	3	

(圖九)



1	4	5
2	3	6
9	8	7

(圖十)

接著任意刪除(圖八)其中一個數字, 會發現皆可定義出兩個連續對應函數, 故可以確定集合 $\{1, 4\}$ 為 3 階方陣的一個極小確定集. 最後, 依次檢驗元素個數少於 2 的集合: $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}$, 發現這些集合皆不是 3 階方陣的極小確定集, 因此可以確定不存在元素個數少於 2 的極小確定集. 而最小確定數 $M(3) = 2$. $\square$

引理 3. 3 階方陣中, 最小確定集只有八種類型.

證明. 從引理 2 的結論可以知道, $M(3) = 2$ 所以最小確定集個數必定為 2. 以下, 我們將找出所有最小確定集的可能和其擺放方式.

在 3 階方陣中, 任選 2 個數字安排在方陣中, 共有 $C_2^9 = 36$ 種不同的選法.

然而, 當用這兩個數給出一條連續路徑時, 我們可將 9 換為 1, 而 8 將換為 2, 依此類推此路徑會與原先走之路徑相同, 但順序相反, 故可知給定 1, 2 相當於分別給定 8, 9, 我們稱此為“數字的對稱性”.

故根據數字的對稱性, 接下來僅需討論方框內的 20 種可能即可.

所有可能:

$\{1, 2\} \leftrightarrow \{8, 9\}$
$\{1, 3\} \leftrightarrow \{7, 9\}$
$\{1, 4\} \leftrightarrow \{6, 9\}$
$\{1, 5\} \leftrightarrow \{5, 9\}$
$\{1, 6\} \leftrightarrow \{4, 9\}$
$\{1, 7\} \leftrightarrow \{3, 9\}$
$\{1, 8\} \leftrightarrow \{2, 9\}$
$\{1, 9\}$

$\{2, 3\} \leftrightarrow \{7, 8\}$
$\{2, 4\} \leftrightarrow \{6, 8\}$
$\{2, 5\} \leftrightarrow \{5, 8\}$
$\{2, 6\} \leftrightarrow \{4, 8\}$
$\{2, 7\} \leftrightarrow \{3, 8\}$
$\{2, 8\}$

$\{3, 4\} \leftrightarrow \{6, 7\}$
$\{3, 5\} \leftrightarrow \{5, 7\}$
$\{3, 6\} \leftrightarrow \{4, 7\}$
$\{3, 7\}$

$\{4, 5\} \leftrightarrow \{5, 6\}$
$\{4, 6\}$

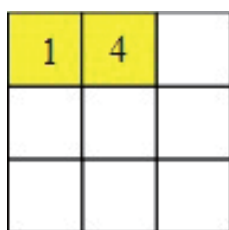
首先, 根據數字的奇偶性可以知道: 在 3 階方陣中, 有 5 個奇數, 4 個偶數, 所以奇數必

定放在(圖十一)中的黑色格子, 而偶數就放在白色格子.

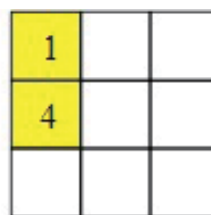


(圖十一)

而依據方格圖形對稱性, (圖十二)及(圖十三)所代表的意義是相同的.

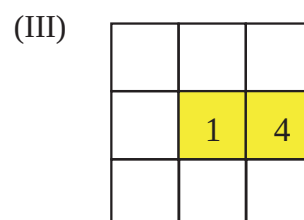
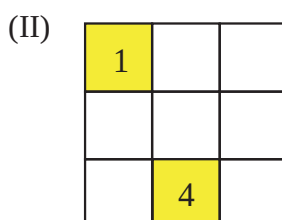
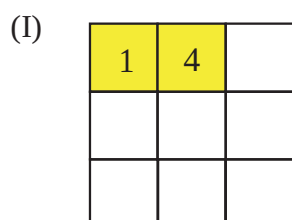


(圖十二)



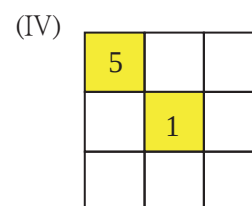
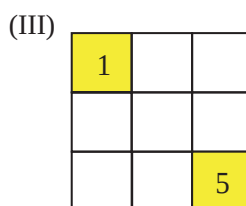
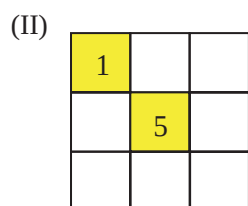
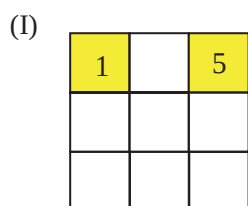
(圖十三)

1. 以 $\{1, 4\}$ 為例, 由於對稱性, 1 擺在 3 階方陣 4 個角落任一位置所代表情形都是一樣的, 所以讓 1 擺在左上角, 此時 4 共有下面(I)(II)二種擺法. 而最後一種擺法(III)是 1 擺在中間而 4 放在外圍的情形:



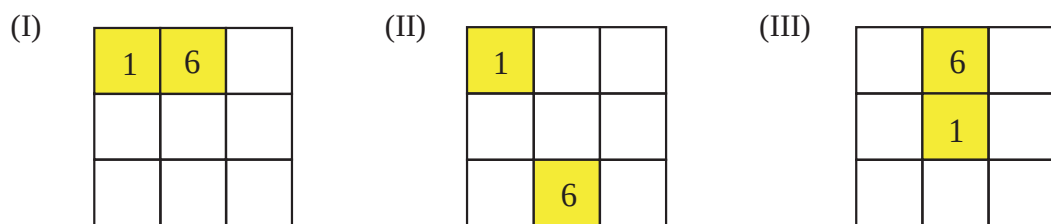
但(II), (III)皆無法確定出唯一路線, 而(I)可以. 所以 $\{1, 4\}$ 為 3 階方陣的最小確定集且擺法必定為(I).

2. 再來看到 $\{1, 5\}$, 讓 1 擺在左上角, 此時 5 共有下面(I)(II)(III)三種擺法. 而最後一種擺法(IV)是 1 擺在中間 5 放在 4 個角落其一:



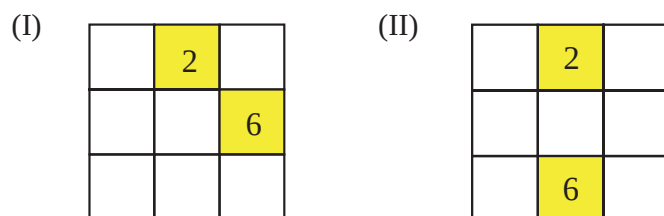
在這(I)(II)(III)(IV)四種, 只有(I)可以確定出一條唯一路線, 所以 $\{1, 5\}$ 為 3 階方陣的最小確定集且擺法必為(I).

3. 接著, 同樣根據對稱性, $\{1, 6\}$ 所有可能的擺法有以下(I)(II)(III)三種:



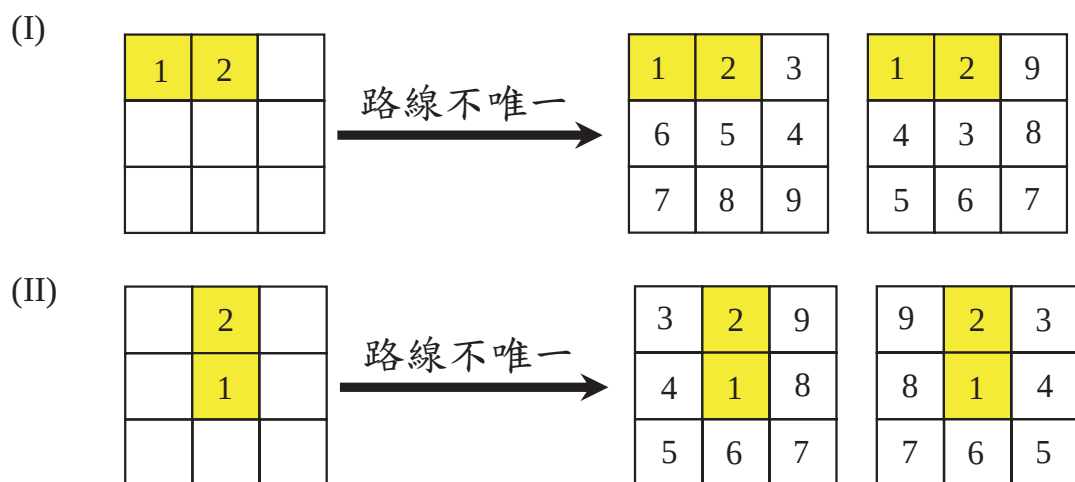
這三種擺法中, 只有(I)可以確定出一條唯一路線, 所以 $\{1, 6\}$ 為 3 階方陣的最小確定集且擺法必定為(I).

4. 再考慮 $\{2, 6\}$, 根據對稱性, 2 擺在外圍非角落的任一個位置所代表的情形都是一樣的, 所以將 2 擺在 a_{12} , 此時 6 可在 2 的斜對角或對面, 故 $\{2, 6\}$ 的擺法只有(I), (II)兩種:



其中只有(I)可以確定出唯一路線, 所以 $\{2, 6\}$ 為 3 階方陣的最小確定集, 且擺法必為(I).

5. 最後, 討論 $\{1, 2\}$ 在 3 階方陣中的擺放情形. 根據圖形的對稱性且已知 1, 2 在方陣內必須相鄰, 故 $\{1, 2\}$ 的擺法只有(I), (II)兩種:



而不論是哪種擺法皆無法對應出唯一的路徑, 故 $\{1, 2\}$ 非 3 階方陣的最小確定集.

對於前面方框內的其他 15 個集合, 都可用相同的方式檢驗是否為最小確定集, 且最後將可以發現這 15 個集合與 $\{1, 2\}$ 皆不是 3 階方陣的最小確定集.

由上述討論可知, 對於 3 階方陣, 最小確定集僅有 $\{1, 4\}(\{6, 9\})$, $\{1, 5\}(\{5, 9\})$, $\{1, 6\}(\{4, 9\})$, $\{2, 6\}(\{4, 8\})$ 等八種情形. 其中, () 內代表因數字對稱性而獲得的最小確定集. □

引理 4. 集合 $\{1, 4, 16\}$ 為 4 階方陣的極小確定集.

證明. 首先, 將集合 $\{1, 4, 16\}$ 中的 1, 4, 16 分別安排在 a_{11}, a_{12}, a_{14} , 如(圖十四), 則 2 和 3 只能填在 a_{21} 及 a_{22} , 如(圖十五), 如此 5 的位置, 6 的位置都唯一確定了, 又由於 16 的位置給定, 15 和 14 的位置也唯一確定, 此時 7 的位置確定, 13 的位置也會被確定, 最後依次被確定的數是 12, 11, 8, 9 和 10 的位置. 故可知其連續對應函數是唯一的, 如(圖十六).

1	4		16

(圖十四)



1	4		16
2	3		

(圖十五)



1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

(圖十六)

其次, 任意刪除(圖十四)其中一個數字, 會發現都可以定義出兩個連續對應函數: 比如刪去 1, 可將 1 改放在 a_{22} , 就有另一種連續對應函數; 刪去 4, 可將 4 改放在 a_{41} , 就有另一種連續對應函數; 刪去 16, 可將 16 改放在 a_{23} , 形成另一種連續對應函數. 故可知集合 $\{1, 4, 16\}$ 為 4 階方陣的一個極小確定集. $\square$

參考引理 4 給定數字的方式, 我們想知道在較大方陣中依類似的方式給定數字, 它們是否為極小確定集. 其中一個關鍵的步驟為: 「確認其對應的連續對應的唯一性」. 針對此過程, 以下將以引理 5 來說明.

引理 5. (1) 令 $n \geq 4$ 為偶數, 在給定如(圖十七) $1^2, 2^2, 4^2, 6^2, 8^2, \dots, n^2$ 的位置, 則 $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 n^2 之間, 除了 9 以外的任何數.

(2) 令 $n \geq 5$ 為奇數, 在給定如(圖十八) $1^2, 2^2, 4^2, 6^2, 8^2, \dots, (n-1)^2$ 的位置, 則 $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 n^2 之間, 除了 9 以外的任何數.

1	4		16		36		n^2

(圖十七)

1	4		16		36		$(n-1)^2$

(圖十八)

證明.

(1) 這個證明因為用圖形顯示比較清楚, 所以我們先以 $n = 8$ 來觀察 n 為偶數的情形.

1	4		16		36		64

(圖十九)

1	4		16		36		64
2	3						

(圖二十)

針對(圖十九), 很明顯的可以發現 2 與 3 必分別填入 a_{21} 與 a_{22} , 如(圖二十), 以下將討論 $f(a_{31})$ 的可能性.

首先, 考慮 $4 < f(a_{31}) < 16$ 的情形. 因為從 $f^{-1}(4)$ 以數字遞增的方式連續走到 a_{31} 最少需 5 個格子, 而 $4 + 5 = 9$, 可得此時 $f(a_{31})$ 下界為 9; 又因從 $f^{-1}(16)$ 以數字遞減的方式連續走到 a_{31} 至少需 5 個格子, 而 $16 - 5 = 11$, 可得此時 $f(a_{31})$ 上界為 11. 由於已知 $f(a_{31})$ 必為奇數, 所以 $f(a_{31})$ 若要填入 5 到 15 之間的數, 只有 9, 11 兩種可能.

如果 $f(a_{31}) = 9$, 可以確定路線 $f^{-1}[9, 16]$ 如(圖二十一).

如果 $f(a_{31}) = 11$, 則 $f^{-1}[11, 16]$ 有(圖二十二), (圖二十三), (圖二十四)三種可能. 這三個圖形中, $f^{-1}[11, 16]$ 皆和方陣的左緣和上緣圍出一個封閉區域, 而以(圖二十四)所圍的區域最大. 由於數字必須連續對應到方格, 封閉區域內的數無法跨過 $f^{-1}[11, 16]$ 填到封閉區域之外. 而最大封閉區域(圖二十四)僅圍出 12 格, 不足以填入 1 到 16 之間的所有數, 故 $f(a_{31}) \neq 11$.

1	4	5	16		36		64
2	3	6	15				
9	8	7	14				
10	11	12	13				

(圖二十一)

1	4	15	16		36		64
2	3		14				
11	12	13					

(圖二十二)

1	4		16		36		64
2	3	14	15				
11	12	13					

(圖二十三)

1	4		16		36		64
2	3		15				
11	12	13	14				

(圖二十四)

綜合上述討論, 若 $f(a_{31})$ 落在 4 到 16 之間, 則僅可以填入 9.

用同樣的方式討論 $f(a_{31})$ 是否可以填入 16 到 36 之間的數, 即 $16 < f(a_{31}) < 36$ 的情形.

因為從 $f^{-1}(16)$ 以數字遞增的方式連續走到 a_{31} 最少需 5 個格子, 而 $16 + 5 = 21$, 可得此時 $f(a_{31})$ 下界為 21; 又因從 $f^{-1}(36)$ 以數字遞減的方式連續走到 a_{31} 至少需 7 個格子, 而 $36 - 7 = 29$, 可得此時 $f(a_{31})$ 上界為 29. 由於已知 $f(a_{31})$ 必為奇數, 所以 $f(a_{31})$ 只有 21, 23, 25, 27, 29 五種可能.

- 如果 $f(a_{31}) = 21$, 如(圖二十五), $f^{-1}[16, 21]$ 和左上角圍出一個長方形區域, 共 $3 \times 4 = 12$ 格, 不足以填入 1 到 21 之間的數.
- 如果 $f(a_{31}) = 23$, (圖二十六)顯示 $f^{-1}[16, 23]$ 繞出和左上角圍成正方形的封閉區域時, 其所含的格數最多, 共 $4 \times 4 = 16$ 格, 不足以填入 1 到 23, 共 23 個數.

- iii. 如果 $f(a_{31}) = 25$, 如(圖二十七), 考慮 $f^{-1}[25, 36]$ 和左上角圍成區域, 愈接近正方形所圍出格子數越多, 因此路線從 a_{31} 先往下拉, 最多可以圍出 $5 \times 6 = 30$ 格, 不足以填入 1 到 36, 共 36 個數.
- iv. 如果 $f(a_{31}) = 27$, 如(圖二十八), $f^{-1}[27, 36]$ 所能圍成最多格的封閉區域格數為 $4 \times 6 = 24$ 不足以填入 1 到 36, 共 36 個數.
- v. 如果 $f(a_{31}) = 29$, 如(圖二十九), $f^{-1}[29, 36]$ 所能繞的最遠的路圍成一個 $3 \times 6 = 18$ 格的封閉區域不足以填入 1 到 36, 共 36 個數.

1	4		16		36	64
2	3		17			
21	20	19	18			

(圖二十五)

1	4		16		36	64
2	3		17			
23			18			
22	21	20	19			

(圖二十六)

1	4		16		36	64
2	3				35	
25					34	
26					33	
27	28	29	30	31	32	

(圖二十七)

1	4		16		36	64
2	3				35	
27					34	
28	29	30	31	32	33	

(圖二十八)

1	4		16		36	64
2	3				35	
29	30	31	32	33	34	

(圖二十九)

綜合上述討論, $f(a_{31})$ 不能填入 16 到 36 之間的數.

最後, 考慮 $f(a_{31})$ 是否可以填入 36 到 64 之間的數. 首先算出 $f(a_{31})$ 在 36 到 64 之間最小和最大可能的數. 因為從 $f^{-1}(36)$ 以數字遞增的方式連續走到 a_{31} 最少需 7 個格子, 而 $36 + 7 = 43$, 可得此時 $f(a_{31})$ 下界為 43; 又因從 $f^{-1}(64)$ 以數字遞減的方式連續走到 a_{31} 至少需 9 個格子, 而 $64 - 9 = 55$, 可得此時 $f(a_{31})$ 上界為 55. 由於已知 $f(a_{31})$ 必為奇數, 所以 $f(a_{31})$ 只有 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55 七種可能.

- i. 如果 $f(a_{31}) = 43$, 如(圖三十), $f^{-1}[36, 43]$ 和左上角圍出一個長方形區域, 共 $3 \times 6 = 18$ 格, 不足以填入 1 到 43 之間的數.
- ii. 如果 $f(a_{31}) = 45$, 如(圖三十一), $f^{-1}[36, 45]$ 和左上角圍成區域愈接近正方形所圍出格子數越多, 因此路線從 a_{16} 先往下拉, 最多可以圍出 $4 \times 6 = 24$ 格, 不足以填入 1 到 45 之間的數.
- iii. 當 $f(a_{31}) = 47, 49, \dots, 55$, $f^{-1}[36, \bullet]$ 可以圍起的封閉區域隨著 $\bullet$ 變大而快速增加. 因此我們換成觀察 $f^{-1}[\bullet, 64]$.
- iv. 如果 $f(a_{31}) = 47$, 如(圖三十二), $f^{-1}[47, 64]$ 和左上角最多可以圍出 $7 \times 8 = 56$ 格, 不足以填入 1 到 64 之間的數.
- v. 如果 $f(a_{31}) = 49$, 49 比 47 大且與 64 更接近, $f^{-1}[49, 64]$ 路徑較短, 所能圍出的方格數更少, 如(圖三十三), 最多圍出 $6 \times 8 = 48$ 格.

依此類推,

$f(a_{31}) = 51$, 最多圍出 $5 \times 8 = 40$ 格

$f(a_{31}) = 53$, 最多圍出 $4 \times 8 = 32$ 格

$f(a_{31}) = 55$, 最多圍出 $3 \times 8 = 24$ 格

可見: 格子數隨著 $f(a_{31})$ 的值變大而變少, 但要填入的數卻不變(均要填入 1 到 64), 必定無法將方陣填滿.

1	4		16		36		64
2	3				37		
43	42	41	40	39	38		

(圖三十)

1	4		16		36		64
2	3				37		
45					38		
44	43	42	41	40	39		

(圖三十一)

1	4		16		36		64
2	3						63
47							52
48							51
49							50
50							59
51	52	53	54	55	56	57	58

(圖三十二)

1	4		16		36		64
2	3						63
49							62
50							61
51							60
52	53	54	55	56	57	58	59

(圖三十三)

綜合上述討論, $f(a_{31})$ 不能填入 36 到 64 之間的數.

總結以上三種情形: $4 < f(a_{31}) < 16$ 及 $16 < f(a_{31}) < 36$ 及 $36 < f(a_{31}) < 64$, 可知在(圖二十一)中, $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 64 之間, 除了 9 以外的任何數.

上述的情形其實是一個一般性的做法, 不限定在 $n = 8$. 因此, 對於一般偶數 n , 我們可以歸納出以下敘述: 令 $n \geq 4$ 為偶數, 在給定如(圖十七) $1^2, 2^2, 4^2, 6^2, \dots, n^2$ 的位置, 則 $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 n^2 之間除了 9 以外的任何數, 其證明概述如下:

- i. 由(圖十九)的討論, $f(a_{31})$ 在 4 到 16 之間僅可以填入 9, 因此, 對於任意大於或等於 6 的偶數 n , 我們僅需證明 $(n-2)^2$ 到 n^2 均不能是 $f(a_{31})$ 所可以填入的值.
- ii. 算出從 $a_{1,n-2}$ 到 a_{31} 最短路徑的格子數, 求出 $f(a_{31})$ 之下界. 算出從 $a_{1,n}$ 到 a_{31} 最短路徑的格子數, 求出 $f(a_{31})$ 之上界.
- iii. 從下界算起, 前 2 個奇數與 $(n-2)^2$ 做成封閉區域, 可發現不足填入所需之數; 從第 3 個奇數開始與 n^2 做成封閉區域, 則可發現不足 1 到 n^2 .

由此三個步驟可得: 若 $n \geq 4$ 為偶數, 在給定如(圖十七) $1^2, 2^2, 4^2, 6^2, \dots, n^2$ 的位置, 則 $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 n^2 之間除了 9 以外的任何數.

(2) 針對 n 為奇數的情形, 以下同樣先以 $n = 5$ 的例子作初步說明, 如(圖三十四).

1	4		16	

(圖三十四)

針對(圖三十四), 很明顯的可以發現 2 與 3 必分別填入 a_{21} 與 a_{22} , 如(圖三十四), 以下將討論 $f(a_{31})$ 的可能性.

首先, 考慮 $f(a_{31})$ 填入 4 到 16 之間的數之可能性. 由前面(圖十九)的討論, 已知 $f(a_{31})$ 在 4 到 16 之間僅可以填入 9. 所以, 接下來考慮 $16 < f(a_{31}) \leq 25$ 的情形. 因為從 $f^{-1}(16)$ 以數字遞增的方式連續走到 a_{31} 最少需 5 個格子, 而 $16 + 5 = 21$, 可得此時 $f(a_{31})$ 下界為 21; 又因總格數只有 25 格, 故此時 $f(a_{31})$ 上界為 25. 由於已知 $f(a_{31})$ 必為奇數, 所以 $f(a_{31})$ 只有 21, 23, 25 三種可能.

- i. 如果 $f(a_{31}) = 21$, $f^{-1}[16, 21]$ 最多圍出 $3 \times 4 = 12$ 格, 如(圖三十五), 不足以放入 1 到 21 的數.
- ii. 如果 $f(a_{31}) = 23$, $f^{-1}[16, 23]$ 和左上角圍成區域愈接近正方形所圍出格子數越多, 因此路線從 a_{14} 先往下拉, 最多可以圍出 $4 \times 4 = 16$ 格, 如(圖三十六), 不足以放入 1 到 23 的數.
- iii. 如果 $f(a_{31}) = 25$, $f^{-1}[16, 25]$ 最多可圍出 $5 \times 4 = 20$ 格, 如(圖三十七), 不足以放入 1 到 25 的數.

1	4		16	
2	3		17	
21	20	19	18	

(圖三十五)

1	4		16	
2	3		17	
23			18	
22	21	20	19	

(圖三十六)

1	4		16	
2	3		17	
25			18	
24			19	
23	22	21	20	

(圖三十七)

總結上述討論, 可知在(圖三十四)中, $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 25 之間除了 9 以外的任何數. 而由討論過程可以發現:即使將方陣擴大(即奇數 n 變大), 也無法解決 $f(a_{31})$ 無法填入 21, 23, 25 的問題. 故對於一般情形, 我們可得:若 $n \geq 5$ 為奇數, 在給定如(圖十八) $1^2, 2^2, 4^2, 6^2, \dots, (n-1)^2$ 的位置, 則 $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 n^2 之間除了 9 以外的任何數. $\square$

4.3 主要定理

引理 4 的結論, 可以被推廣成下面的一般情形:

定理 1. 對於任意自然數 n , 考慮 n 階方陣, 自然數集合

$$S_n = \begin{cases} \phi, & \text{if } n \text{ is } 1; \\ \{1, 4, \dots, (2k)^2, \dots, n^2\}, & \text{if } n \text{ is even}; \\ \{1, 4, \dots, (2k)^2, \dots, (n-1)^2\}, & \text{if } n \neq 1 \text{ is odd.} \end{cases}$$

必為 n 階方陣的一個極小確定集.

證明. 當 $n = 1$ 時, $S_1 = \phi$ 為 1 階方陣的極小確定集是顯然的.

欲說明 S_n 為 n 階方陣的一個確定集, 須建構一對一的函數 $f: \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n^2\}$, 使其成為連續對應函數. 並證明其唯一.

針對自然數 $n \geq 2$, 首先定義一個特殊的函數 $f_n: \{a_{11}\} \cup \{a_{1(2k)} | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \rightarrow S_n$, 函數定義為

$$f_n(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 1 \\ j^2 & \text{if } i = 1, j = 2k, 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}$$

當 $n = 4, 5, 6$, 函數 f_n 以圖表來呈現分別如(圖三十八)所示:

1	4		16	

1	4		16	

1	4		16		36

(圖三十八)

此外, 函數 f_n 可唯一擴充為連續對應函數, 就 f_2, f_3, f_4, f_5 可參考(圖三十九)的擴充方式.

1	4
2	3

1	4	5
2	3	6
9	8	7

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

1	4	5	16	17
2	3	6	15	18
9	8	7	14	19
10	11	12	13	20
25	24	23	22	21

(圖三十九)

由這樣的擴充方式, 我們可以發現:每擴充一階方陣, 就是再走一個 L 形, 且從一個完全平方數的下一個數走到下一個完全平方數, 就是完成一個 L 形. 針對同一個 L 形中任一個 a_{ij} , 只要找出 $m = \max\{i, j\}$, 並得知 m^2 的位置後, 再確認 m 的奇偶性, 依下列規則減去適當的數, 即可得 a_{ij} . 其規則為:

- (1) 若 m 為奇數, 可知 m^2 在第 m 列第一行上, 則
 - (a) j 由 1 開始, 每增加 1, 需將 m^2 減去 1, 即 $m^2 - (j - 1)$, 直到 j 增加至 m 為止.
 - (b) i 由 m 開始, 每減少 1, 需再將 $m^2 - (j - 1)$ 減去 1, 即 $m^2 - (j - 1) - (m - i)$, 直到 i 減至 1.
- (2) 若 m 為偶數, 可知 m^2 在第一列第 m 行上, 則
 - (a) i 由 1 開始, 每增加 1, 需將 m^2 減去 1, 即 $m^2 - (i - 1)$, 直到 i 增加至 m 為止.
 - (b) j 由 m 開始, 每減少 1, 需再將 $m^2 - (i - 1)$ 減去 1, 即 $m^2 - (i - 1) - (m - j)$, 直到 j 減至 1.

根據此規則, 可歸納出擴充方式所代表的連續對應函數 $f_{n,c} : \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n^2\}$ 之一般式如下:

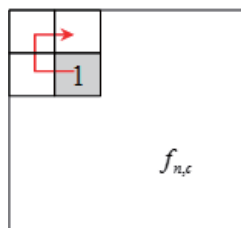
$$f_{n,c}(a_{ij}) = \begin{cases} m^2 - m + (i - j) + 1, & \text{if } m = \max\{i, j\} \text{ is odd;} \\ m^2 - m - (i - j) + 1, & \text{if } m = \max\{i, j\} \text{ is even.} \end{cases}$$

事實上, 集合 S_n 及其對應函數 f_n 是一個極小確定集. 也就是若集合 S_n 已經依 f_n 的方式安排在 n 階方陣中, 此時, 若刪去已被排定中任意一個數字, 皆會定義出兩種不同的連續對應函數. 總共可以分以下六種情形討論:

- (1) 將 1 從 a_{11} 移去, 改填入 a_{22} 的位置, 此時定義

$$f(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2, j = 2; \\ 2 & \text{if } i = 2, j = 1; \\ 3 & \text{if } i = 1, j = 1; \\ f_{n,c}(a_{i,j}) & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

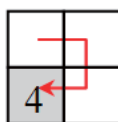
則 f 和 $f_{n,c}$ 是兩個不同的 n 階連續對應函數, 如(圖四十).



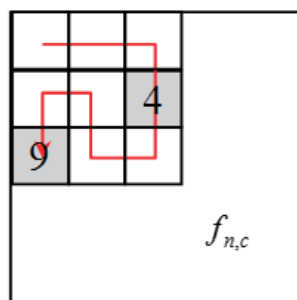
(2) 當 $n = 2$, 將 4 從 a_{12} 移到 a_{21} , 則因對稱關係,

$$f(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1, j = 1; \\ 2 & \text{if } i = 1, j = 2; \\ 3 & \text{if } i = 2, j = 2; \\ 4 & \text{if } i = 2, j = 1. \end{cases}$$

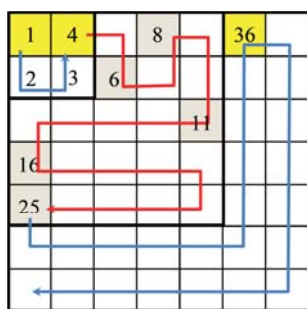
和 f_{2c} 是兩個不同的 2 階連續對應函數, 如(圖四十一).



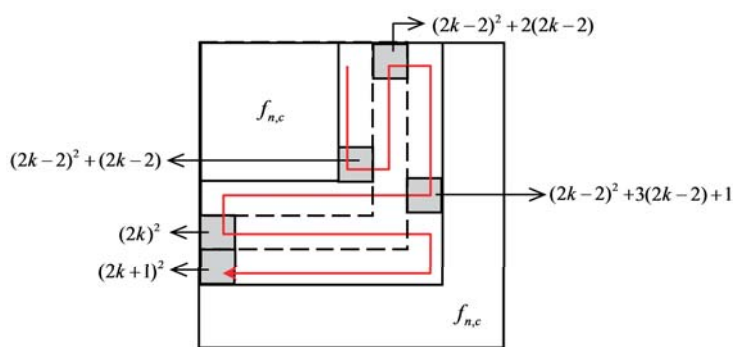
(3) 當 $n \geq 3$, 將 4 從 a_{12} 移除, 此時可以改將 4 填入 a_{23} , 其餘 1 到 9 的數字, 可依(圖四十五)填入, 而 10 之後的數皆依 $f_{n,c}$ 的方式不變, 那麼就會得到一個不同的連續對應函數, 如(圖四十二).



(4) 若移除的數非 1, 4 及 S_n 中最大的數, 同樣可以得到一個不同的連續對應函數. 這裡先以 7 階方陣移除 16 為例, 可以得到一個新的連續對應函數, 如(圖四十三). 此情形即: 當 $n \geq 6$ 且 $4 \leq 2k \leq n-2$, 將 $(2k)^2$ 從 $a_{1(2k)}$ 移除, 填入 $a_{(2k)1}$ 中, 此時可以改將 $(2k-2)^2+2(2k-2)$ 填入 $a_{1(2k)}$, 並將 $(2k-2)^2+(2k-2)$, $(2k-2)^2+3(2k-2)+1$ 及 $(2k+1)^2$ 分別填入 $a_{(2k-2)(2k-1)}$, $a_{(2k-1)(2k+1)}$, $a_{(2k+1)1}$, 其餘 $(2k-2)^2+1$ 到 $(2k+1)^2$ 依(圖四十三)的方式填入, 而 1 到 $(2k-2)^2$ 及 $(2k+1)^2+1$ 之後的數皆依 $f_{n,c}$ 的方式填入不變, 那麼就會得到一個不同的連續對應函數, 如(圖四十四).

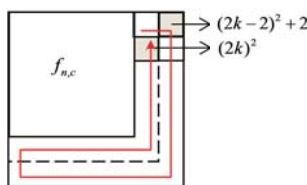


(圖四十三)

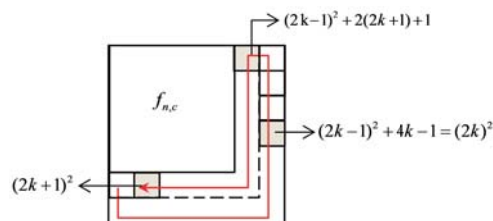


(圖四十四)

- (5) 當 $n \geq 6$ 為偶數且 $2k = n$ 時, 將 $(2k)^2$ 從 $a_{1(2k)}$ 移除, 填入 $a_{2(2k-1)}$, 同時可以改將 $(2k-2)^2 + 2$ 填入 $a_{1(2k)}$, 其餘 $(2k-2)^2 + 1$ 到 $(2k)^2 - 1$ 依(圖四十五)方式填入, 而 1 到 $(2k-2)^2$ 的數皆依 $f_{n,c}$ 的方式填入不變, 那麼就會得到一個不同的連續對應函數, 如(圖四十五).
- (6) 當 $n \geq 6$ 為奇數且 $2k-1 = n$ 時, 將 $(2k)^2$ 從 $a_{1(2k)}$ 移除, 填入 a_{4n} , 同時可以改將 $(2k-1)^2 + 2(2k+1) + 1$ 填入 $a_{1(2k)}$, 並將 $(2k+1)^2$ 填入 $a_{(2k)2}$, 其餘 $(2k-1)^2 + 1$ 到 $(2k+1)^2 - 1$ 依(圖四十五)方式填入, 而 1 到 $(2k-1)^2$ 的數皆依 $f_{n,c}$ 的方式填入不變, 那麼就會得到一個不同的連續對應函數, 如(圖四十六).



(圖四十五)

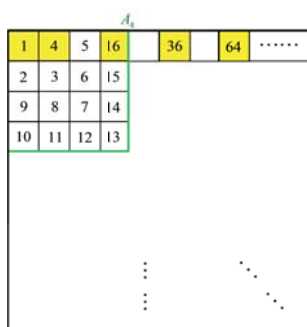


(圖四十六)

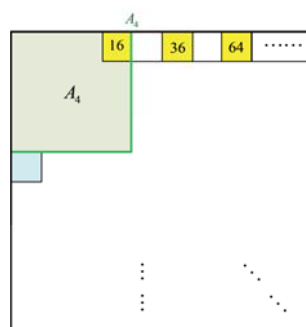
由以上六種情形可知: 若自集合 S_n 中任意刪除一個元素, 皆可擴充出兩個以上不同的 n 階連續對應函數.

截至目前為止, 針對定理 1 我們還尚未證明“由函數 f_n 所擴充的連續對應函數必為 $f_{n,c}$ ”. 但由引理 5 的討論已得知: 若 $n \geq 4$, 針對函數 f_n , $f(a_{31})$ 不可能被填入 4 到 n^2 之間除了 9 以外的任何數. 然而一旦確定 9 填在 a_{31} , 則 $f^{-1}[9, 16]$ 也可唯一確定, 如(圖四十七).

換句話說, 當 $n \geq 4$ 時, 對於函數 f_n , 我們可以一一確定 1 到 16 的位置必與 $f_{n,c}$ 相同, 即表示在 A_4 子方陣中, 所有函數值均與 $f_{n,c}$ 相同. 接著, 以與引理 5 相同的方式, 我們可以更進一步的討論 $f(a_{51})$ 的值, 如(圖四十八).



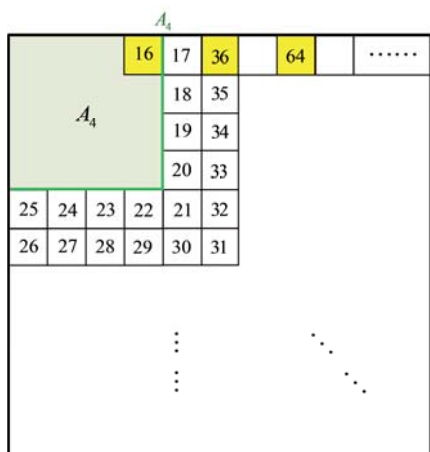
(圖四十七)



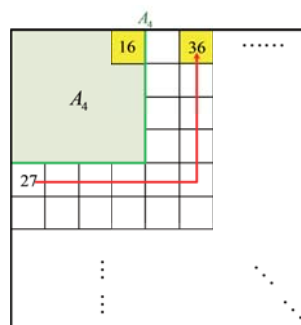
(圖四十八)

首先, 若 $16 < f(a_{51}) < 36$, 以與引理 5 相同的方式可得下界為 25, 上界為 27, 所以 $f(a_{31})$ 只有 25, 27 兩種可能.

- i. 如果 $f(a_{51}) = 25$, 可以確定路線 $f^{-1}[16, 36]$ (圖四十九).
- ii. 如果 $f(a_{51}) = 27$, 則 $f^{-1}[27, 36]$ 以(圖五十)所圍出來的封閉區域最大, 共 $5 \times 6 = 30$ 格, 但不足以填入 1 到 36 所有數, 因而 $f(a_{51}) \neq 27$.



(圖四十九)

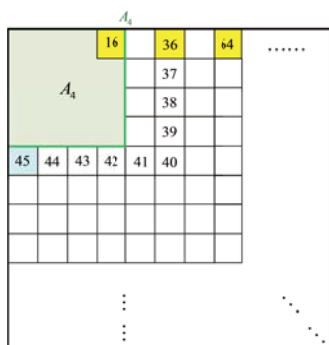


(圖五十)

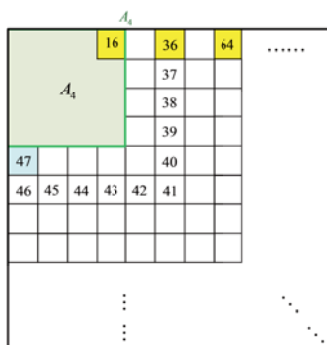
綜合上述討論, $f(a_{31})$ 在 16 到 36 之間僅可以填入 25.

接著, 考慮 $f(a_{51})$ 是否可以填入 36 到 64 之間的數. 與前面相同的方式討論可得下界為 45, 上界為 53, 所以 $f(a_{51})$ 只有 45, 47, 49, 51, 53 五種可能.

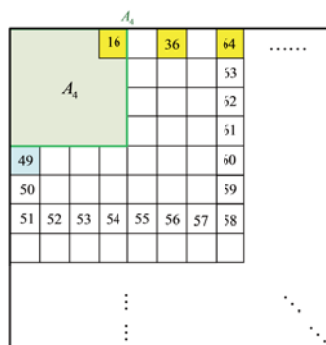
- i. 如果 $f(a_{51}) = 45$, 如(圖五十一), $f^{-1}[36, 45]$ 和左上角圍出一個長方形區域, 共 $5 \times 6 = 30$ 格, 不足以填入 1 到 45 之間的數.
- ii. 如果 $f(a_{51}) = 47$, (圖五十二)顯示 $f^{-1}[36, 47]$ 所能繞的最遠的路和左上角可圍最大方形的封閉區域共 $6 \times 6 = 36$ 格, 不足以填入 1 到 47, 共 47 個數.
- iii. 如果 $f(a_{51}) = 49$, 如(圖五十三), $f^{-1}[49, 64]$ 和左上角圍成區域愈接近正方形所圍出格子數越多, 因此路線從 a_{51} 先往下拉, 最多可以圍出 $7 \times 8 = 56$ 格, 不足以填入 1 到 64, 共 64 個數.
- iv. 如果 $f(a_{51}) = 51$, 51 比 49 大且與 64 更接近, $f^{-1}[51, 64]$ 路徑較短, 所能圍出的方格數更少, 如(圖五十四), 最多圍出 $6 \times 8 = 48$ 格, 也不足以填入 1 到 64, 共 64 個數.
- v. 如果 $f(a_{51}) = 53$, 53 比 51 大且與 64 更接近, $f^{-1}[53, 64]$ 路徑較短, 所能圍出的方格數更少, 如(圖五十五), 最多圍出 $5 \times 8 = 40$ 格, 同樣不足以填入 1 到 64, 共 64 個數.



(圖五十一)



(圖五十二)



(圖五十三)

(圖五十四)

(圖五十五)

綜合上述討論, $f(a_{51})$ 不能填入 36 到 64 之間的數. 至此, 我們可以發現, 引理 5 的討論方式具有一般性, 換句話說, 我們可以藉由相同的討論方式得到:

令 $n \geq 6$, 針對函數 f_n , 若已知在 A_4 子方陣中, 所有函數值均與 $f_{n,c}$ 相同, 則 $f(a_{51})$ 不可能被填入 16 到 n^2 之間除了 25 以外的任何數. 一旦確定 25 的位置, 則 $f^{-1}[25, 36]$ 也可唯一確定, 如(圖五十六).

(圖五十六)

換句話說, 當 $n \geq 6$ 時, 對於函數 f_n , 我們可以一一確定 1 到 36 的位置必與 $f_{n,c}$ 相同, 即表示在 A_6 子方陣中, 所有函數值均與 $f_{n,c}$ 相同. 因此我們可以發現: 對於函數 f_n , 我們可以藉由依序討論 $f(a_{t1})$ 的值(其中 t 為奇數, 且 $3 \leq t < n$), 一步一步將方陣填滿, 且可以確定填滿的方陣必為 $f_{n,c}$. 因此, 由函數 f_n 所擴充的連續對應函數必為 $f_{n,c}$, 且定理 1 成立. $\square$

藉由 f_n 的圖形可以觀察到, 除了第一行外, 都是在偶數行給數字. 針對任意正整數 n , 令 $2k \leq n (k \in \mathbb{N})$, 則可知符合的 k 有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 個, 也就是在 n 階方陣中, 有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 個偶數行, 所以 f_n 中所事先給的數字個數為 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 再加上 a_{11} 的 1, 共 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 個. 換句話說, $|S_n| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, 而藉由定理 1 知道, 集合 S_n 是 n 階方陣的一個極小確定集. 也就是說, 對於最小確定數 $M(n)$, 可以得到以下的結論:

定理 2. 任意自然數 n , n 階方陣的最小確定數 $M(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

然而, 再經由更多試驗的結果, 我們發現當 $n = 4$ 時, $M(4) = 2$ 而非我們原先所猜測的 3, 其反例如下:

若給定 $f(a_{11}) = 1, f(a_{12}) = 6$, 則等價於給定此 4 階方陣(圖五十七), 由此圖表可知此 4 階方陣會對應出唯一的連續對應函數(圖五十八).

1	6		

(圖五十七)



連續對應唯一

1	6	7	8
2	5	10	9
3	4	11	12
16	15	14	13

(圖五十八)

針對此 4 階方陣, 若將 1 刪除, 可以改將 1 填入 a_{22} , 而其餘數字 2 到 16 可依(圖五十九)方式填入; 若將 6 刪除, 可以使用 $f_{n,c}$ 將此 4 階方陣填滿. 所以可知在此 4 階方陣中, 將此 4 階方陣填滿將可定義出兩個連續對應函數, 故可以確定集合 $\{1, 6\}$ 為 4 階方陣的一個極小確定集.

5	6	7	8
4	1	10	9
3	2	11	12
16	15	14	13

(圖五十九)

再檢驗 $\{1, \dots, 4^2\}$ 所有子集中元素個數少於 2 的集合: $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{16\}$ 是否為 4 階方陣的極小確定集. 可得知這些集合皆不是 4 階方陣的極小確定集, 因此可以確定: 在 4 階方陣中, 不存在元素個數少於 2 的極小確定集. 故得知集合 $\{1, 6\}$ 為 4 階方陣的一個最小確定集, 而最小確定數 $M(4) = 2$.

4.4 推展

對於 $2 \times n$ 的矩形, 我們也有一些初步結果.

定理 3. 對於 $2 \times n$ 的矩形 ($n \geq 3$), 其極小確定集元素個數可以是 2, 3, 4.

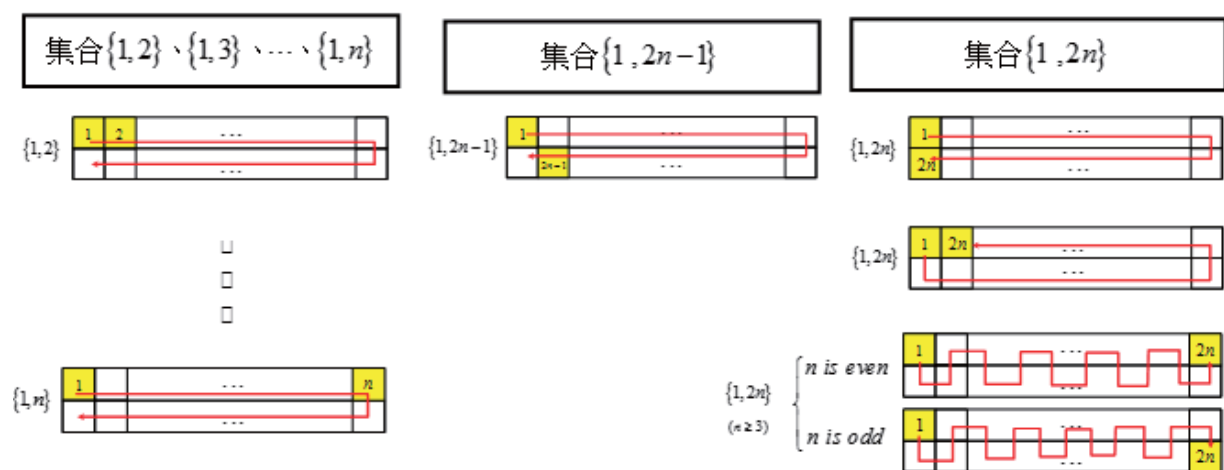
極小確定集元素個數為 2: $\{1, 2\}, \dots, \{1, n\}, \{1, 2n-1\}, \{1, 2n\}$

極小確定集元素個數為 3: $\{2, 3, 2n\}$

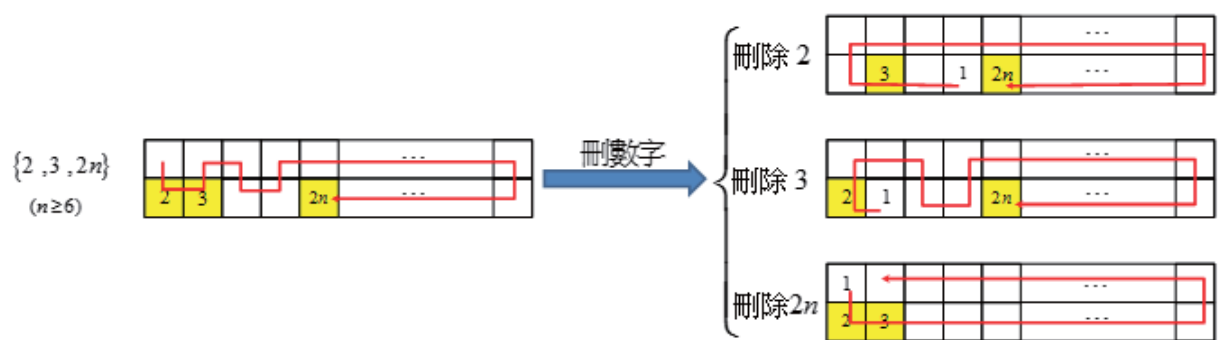
極小確定集元素個數為 4: $\{2, 3, 2n-2, 2n-1\}$

證明. 對於上述每一個極小確定集, 皆都可以找到至少一種擺放方式使其符合極小確定集的定義, 我們以圖表呈現如下. 另外, 當極小確定集元素個數為 3 或 4 時, 檢驗「刪除任一數字後, 將使得連續對應不唯一」的部分較不直觀, 故針對這部分, 以下也將以圖表呈現檢驗的方式.

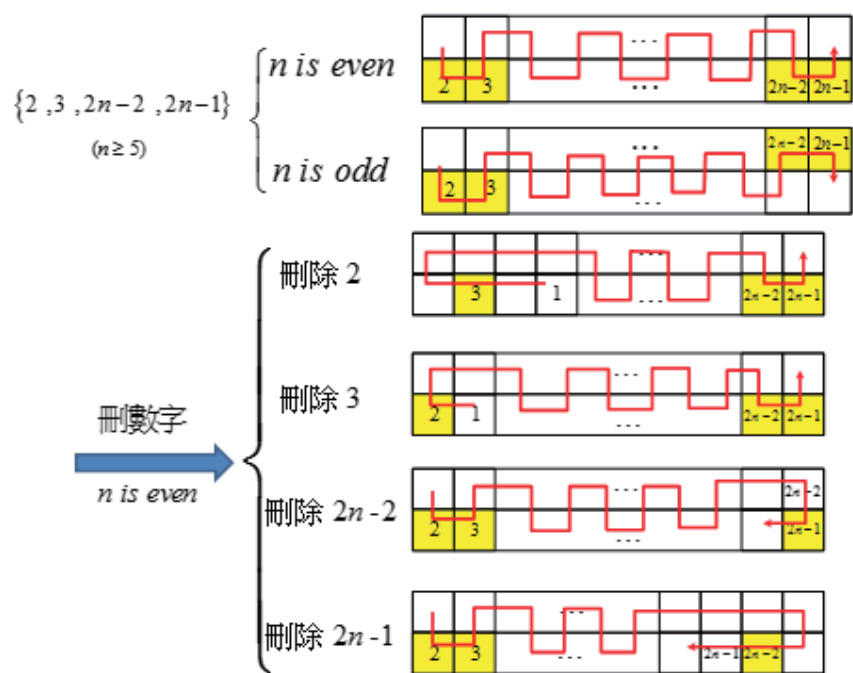
(1) 極小確定集元素個數為 2

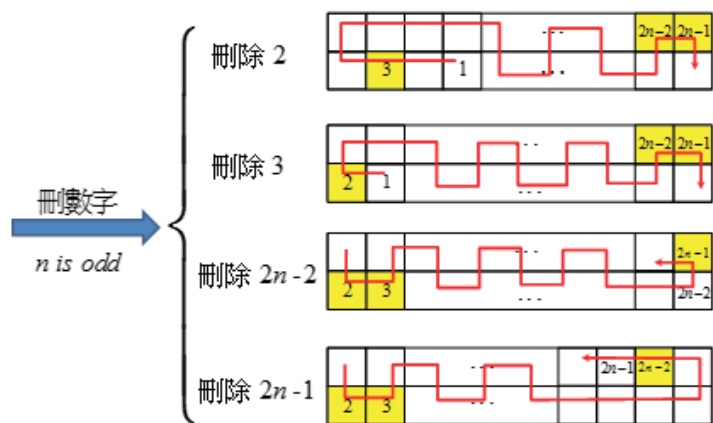


(2) 極小確定集元素個數為 3: $\{2, 3, 2n\}$



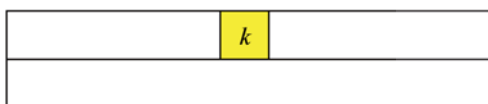
(3) 極小確定集元素個數為 4: $\{2, 3, 2n-2, 2n-1\}$





已知對於 $2 \times n$ 的矩形, 其極小確定集元素個數可以是 2, 3, 4. 以下考慮是否存在元素個數是 1 的極小確定集.

若在 $2 \times n$ 的矩形中選定任一位置給定 $k(1 \leq k \leq 2n)$, 如(圖六十), 必可以找到 2 條不同的連續路徑, 一條為順時針, 將此 $2 \times n$ 的矩形繞一圈, 另一條為逆時針, 將此 $2 \times n$ 的矩形繞一圈, 所以可知(圖六十四)至少可以對應出 2 個不同的連續對應函數.



(圖六十)

故可知不存在元素個數是 1 的極小確定集. 因此, 對於 $2 \times n$ 的矩形, 其極小確定集元素個數最少就是 2, 所以對於 $2 \times n$ 的矩形, 最小確定數為 2. $\square$

5 研究結果

以下用表格來呈現目前對於集合 S_n 所得知的結果:(o:符合 ; x:不符合 ; ?:無法確定)

	數量極小性	對應唯一性	極小確定集	最小確定集
$n = 1$	o	o	o	o
$n = 2$	o	o	o	o
$n = 3$	o	o	o	o
$n = 4$	o	o	o	x
$n = k(k \geq 5)$	o	o	o	?

以下用表格來呈現目前對於 n 階方陣所得知的結果:(o:已找到 ; ?:尚未找到)

	極小確定集	最小確定集	最小確定數
$n = 1$	o	o	0
$n = 2$	o	o	2
$n = 3$	o	o	2
$n = 4$	o	o	2
$n = k(k \geq 5)$	o	?	$\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

6 結論

在本篇作品中，我們將報紙上的一個正六邊形鑲嵌圖簡化成方陣的型式，研究最少要給幾個數字才可以確定出唯一路線。在研究中，最棘手的問題是“表達方式”，因此我們首先建構了一套數學語言將描述性的問題具體以數學模式呈現，定義出一個嚴謹的數學問題，此為本篇作品最重要的貢獻之一。

在解決此問題時，最困難的部分為「數字的安排位置」及「所要安排之數字」。經過觀察及試驗，我們在定理 1 中提出了一種極小確定集的一般型式以及在方陣中給定數字的方式。而在定理 1 的證明中，最需要巧思的部分為路線唯一性的證明。在與老師們討論後，我們確定了完成證明之關鍵格子的位置，而證明手法是利用此關鍵格子與極小確定集中的數字所構成之路線形成的封閉區域格數和所應填入的數字個數作比較，使得關鍵格子所需填入的數字被確定，進而證明路線之唯一性。

隨著定理 1 的確定，我們也針對最小確定數提出一個上界，但我們後來發現此上界非最好的上界，並得出一個非直觀的反例。而最小確定數 $M(n)$ 的研究是本作品接下去可以探討之重要方向。

7 未來展望

我猜想，在文章中所定義的集合 S_n 必為 n 階方陣的最小確定集。同時我也嘗試去思考相關問題可能的發展，並羅列如下：

1. 在方陣中，找到一定的規律可以滿足我們提出的條件，我同樣好奇：
在其餘正鑲嵌圖中，是否也可以找到相似的規律使其滿足我提出的條件？
若欲將終點安排在起點的相鄰位置，則是否也有相似規律滿足我們提出的條件？
2. 對於任意自然數 n ，當 n 階方陣的最小確定數 $M(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 時， n 的可能性為何？
3. 對於任意自然數 n ，若 S 為 n 階方陣的極小確定集，則 $|S|$ 的可能性為何？這值得繼續研究。持續獲得確定數 R_n 完整的資訊(最大值、最小值或範圍)，將是我們繼續研究的目標。進一步探討 R_n 可能的值是否必為連續的自然數。

參考文獻

- [1] 蜜蜂數字. 聯合報, P.16, (2013年7月7日 星期日).
- [2] 許志農. 普通高級中學數學, 第二冊. 龍騰文化(民101).
- [3] 許志農. 普通高級中學數學, 第四冊. 龍騰文化(民101).
- [4] 楊任孝. 普通高級中學數學, 教師手冊第二冊. 全華圖書. (民101).
- [5] 徐力行. 沒有數字的數學. 天下文化.(民92).
- [6] 徐力行. 動物園裡的數學. 天下文化(民100).
- [7] 姜伯駒. 數學大師講數學系列(一筆畫和郵遞路線問題). 智能教育出版社(民93).
- [8] Gary McGuire, Bastian Tugemann, Gilles Civario. There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem. Data Structures and Algorithms(2012). <http://arxiv.org/abs/1201.0749v2>