

Möbius band 的神秘與奇趣-特殊面上的完全多部圖

臺北市立第一女子高級中學 陳心如
指導老師 王嘉慶

Abstract

This study is mainly about the complete graph (K_m) and complete bipartite graph ($K_{n,n}$) on special surfaces.

K_4 and $K_{2,2}$ can be drawn on a plane, but we must use the special surfaces of “ α heads and β tails” for those over K_5 and $K_{3,3}$. These special surfaces can decrease the value of Euler characteristics (χ), and we used that particular property to finish the drawing of those above K_5 and $K_{3,3}$.

Due to the ability of Möbius band in completing K_5 , K_6 , and $K_{3,3}$, we studied the structure of it, and defined it to be a surface with one tail. The Euler characteristic of a plane is 1, and that of a Möbius band is 0. Therefore, we started to think about the possible structure of other special surfaces, which led us to develop different special surfaces of “ α heads and β tails” to complete the drawing of K_m , $K_{n,n}$ and complete multipartite graphs ($K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$).

中文摘要

此研究主要是討論特殊面上的完全圖 (K_m) 和完全二部圖 ($K_{n,n}$)，另外，也提及其部分推廣：完全多部圖 ($K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$)。在一般平面上能夠繪出平面 K_4 及平面 $K_{2,2}$ ，但對於任兩線均不相交的 K_5 及 $K_{3,3}$ 以上的圖形則須利用 α 正 β 反。這些特殊面能使歐拉示性數 (χ) 之值降低，我們即是利用此一性質來完成 K_5 及 $K_{3,3}$ 以上之曲面圖。由於 Möbius 環可以完成正常平面上所無法完成的 K_5 、 K_6 及 $K_{3,3}$ ，我們便拆解其結構，定義它為一個擁有一條反向邊的面。由歐拉示性數看出，一般平面的 χ 為 2，而莫比斯環則是 1。由此我們開始思考其他特殊面應該出現的結構，因而發展出各種不同的 α 正 β 反，藉以完成其他 K_m 、 $K_{n,n}$ 與完全多部圖 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 的繪製。

1 簡介

1.1 研究動機

相信「七橋問題」、「四色問題」、「莫比斯環」等都是耳熟能詳的拓樸問題，也由於這些有趣的問題，使我們對拓樸學深感興趣，便開始尋找與之相關的書籍。在一本名為「數學的神秘與奇趣（凡異出版社）」的書中，找到一篇與拓樸學相關的文章，說明平面上的完全圖只能繪至平面 K_4 （如圖 1），而提及莫比斯環可以解決更大的 K_m ，因而促使我們延伸這項題目，開始探究其中的關係。

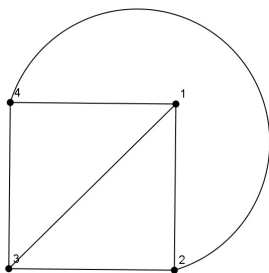


圖 1

1.2 研究目的

以在莫比斯環上（即在只有一條反向邊的面上）繪製曲面圖為起始，研究其上之 K_m 與 $K_{n,n}$ 的圖形中， m 與 n 之最大值與一般平面的不同。再將莫比斯環推展成一由 α 條正向邊與 β 條反向邊所構成的曲面（簡稱「 α 正 β 反」），研究這類特殊面歐拉示性數的不同，以探討其上之 K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ ， m 、 n 、 n_1 、 n_2 、 n_3 等數之最大值和跨界邊數目的關係。

2 研究內容

在本研究中，所有平面或曲面上的圖形，皆只討論連通圖（connected graph）的情形。另外，以下將以符號 v 、 e 、 f 、 A 分別代表圖 G 的點數、線數、面數（封閉區域）、區域數（非封閉區域）。

2.1 名詞定義

- (a) 莫比斯環(Möbius band)：莫比斯環為一只有一面與一邊的環狀結構。而在其上繪圖時，會發現線從上緣的一點連出沿著莫比斯環繞一圈，會繞到背面的下緣（如圖 2，實線代表正面所看到的線，虛線代表另一側所看到的線）。

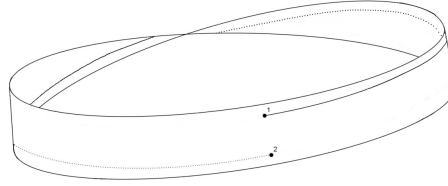


圖 2

- (b) 平面圖(planar graph)：若一圖 G 能繪製在平面上使其任兩線均不相交，則此圖形稱為平面圖。
- (c) 曲面圖：在此研究中，我們將能繪製在某特殊曲面上使其任兩線均不相交的圖形稱為曲面圖。
- (d) 完全圖(K_m ，complete graph)：指一面上有 m 個點，其中任兩點間皆有連線所形成的圖形。本研究中之 K_m 多為曲面 K_m 之簡稱。
- (e) 完全二部圖($K_{n,n}$ ，complete bipartite graph)：指一面上 A 、 B 兩組各有 n 個點，其中 A 組中的每一個點與 B 組中的每一個點須相互連接、同一組的 n 個點間均不相連所形成的圖形。本研究中之 $K_{n,n}$ 多為曲面 $K_{n,n}$ 之簡稱。
- (f) 完全多部圖($K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ ，complete multipartite graph)：一面上所有點分為 n_1 點一組、 n_2 點一組、 n_3 點一組 $\dots$ 等，異組點皆相連、同組點皆不相連的圖形。本研究中之 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 多為曲面 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 之簡稱。
- (g) 跨界邊：一條跨界邊有兩個部分，而兩個部分互在彼此的對面，圖形中的線從其中一部分穿出可由對面的另一部分穿入（如小精靈(Pac-Man)、Doodle Jump等電玩遊戲的左右可以穿入穿出）。如圖 3，左右粗黑的兩個邊即為一條跨界邊，而圖中的 P 、 Q 兩點則可以透過跨界邊相連。（為區分跨界邊和圖論中的“edge”，我們用『邊』指跨界邊，而用『線』指圖形中的edge）

而我們又將跨界邊分為以下兩種：

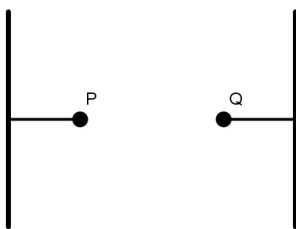


圖 3

- i. 正向跨界邊(head)：若 A 和 B 為一條正向跨界邊的兩部分，則點 P 可連線通過此邊與點 R 相連，而點 Q 可連線通過此邊與點 S 相連。 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QS}$ 兩線的相對位置如圖 4。

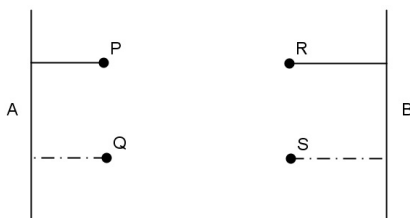


圖 4

註：正向跨界邊可簡稱為正向邊，並以一對平行線段表示。

- ii. 反向跨界邊(tail)：若 A 和 B 為一條反向跨界邊的兩部分，則點 P 可連線通過此邊與點 R 相連，而點 Q 可連線通過此邊與點 S 相連。 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QS}$ 兩線的相對位置如圖 5。

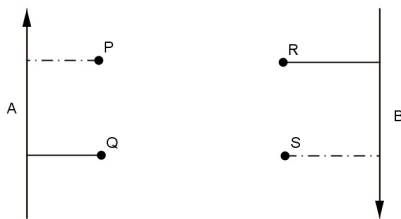


圖 5

註：反向跨界邊可簡稱為反向邊，並以一對平行反向箭號表示。

- (h) α 正 β 反：我們稱由 α 條正向邊與 β 條反向邊所構成的特殊面為 α 正 β 反，可在其上繪製圖形。其中，莫比斯環即可用零正一反表示（如圖 6），而正常平面為零正零反，圓柱面則為一正零反（如圖 7）。
- (i) 連通圖(connected graph)：若圖 G 的各點均能夠找到至少一條路徑到達圖中的任何其他點，則圖 G 稱為一個連通圖。本研究所探討之圖形均屬此類。
- (j) 歐拉式：在一般研究中，歐拉公式為 $v - e + f$ 。然而對於本研究，在 α 正 β 反上非封閉區域之用處等同一面（封閉區域），因此我們定義一圖 G 在特殊面上之 v 、 e 、 f 、 A 所形成的 $v - e + f + A$ 為歐拉式。

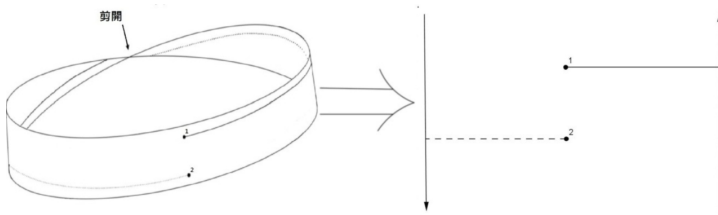


圖 6

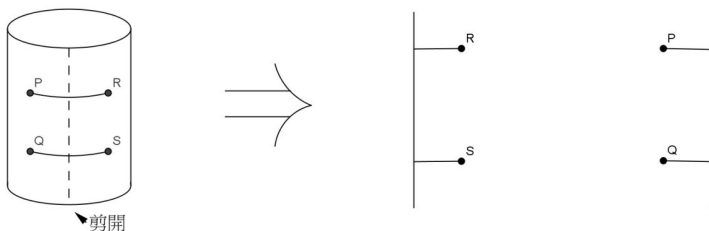


圖 7

- (k) 歐拉示性數(Euler characteristic)：在 α 正 β 反上，一圖 G 之 v 、 e 、 f 、 A 會符合 $2 \geq v - e + f + A \geq \chi$ ，我們稱此式為歐拉不等式，而 χ 為 $v - e + f + A$ 的最小值，稱為歐拉示性數。
- (l) 著色數(chromatic number)：在一特殊面上，圖 G 之所有相連點均不同色的情況下，所需之最少顏色數即為該特殊面之著色數。

2.2 歐拉式

引理 1. 在平面上一圖 G ，其 v 、 e 、 f 、 A （其中 $v \neq 0$ ）必符合此關係式： $v - e + f + A = 2$ ，即為「歐拉公式」。

證明. 在此僅探討連通圖，以減少歐拉公式中的變數，並更符合本研究所需。

當 $v = 1$ 時， $e = 0$ 、 $f = 0$ 、 $A = 1$ ， $v - e + f + A = 2$ ；

設 $v = n$ 時， $v - e + f + A = 2$ ；

則 $v = n + 1$ 時，新增之點必至少有一線連接原圖，才可保持圖形連通，

而 v 、 e 的增加數相互抵消，此後每增加一線，則必增加一面，

e 、 f 的增加數相互抵消，

但 A 之值不便（為最外圈之非封閉區域）， $v - e + f + A = 2$ 仍然成立，

故由數學歸納法得證，在平面上的一圖 G ，

其 v 、 e 、 f 、 A （其中 $v \neq 0$ ）必符合此關係式： $v - e + f + A = 2$ 。 □

對於此研究中所討論的特殊面，除零正零反與等價於平面之一正零反外，其它曲面的 $v - e + f + A$ 之值均非定值，我們設法求出其最小值，也就是歐拉示性數，以利圖形的繪製。

計算歐拉示性數的方法，是以用到所有的跨界邊為原則。以零正一反為例，在其上繪製一點並由此點連出一線穿過跨界邊連回，形成一個迴圈(loop)，因所畫出的線無法將曲面切割，所以不似平面能分隔成兩個區域（如圖 8 中， A 、 B 兩個區域藉由左右一條反向邊相接，因此為同一個區域），在繪製第二條線時，方可切割出第二個區域。因此可知在繪圖時一旦使用莫比斯環，歐拉示性數便為 1（即較平面少一個區域）。

以相同方法，可以推知各種 α 正 β 反的歐拉示性數，即皆以特殊面之中央一點為中心，繪製 $\alpha + \beta$ 條線，穿過四周所有跨界邊形成 $\alpha + \beta$ 個迴圈，可得 v 、 e 、 f 、 A 之數目，再算出此時 $v - e + f + A$ 的值，就是此特殊面的歐拉示性數。

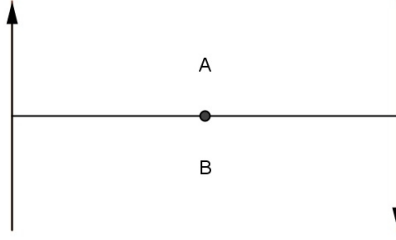


圖 8

證明. 此畫法可製造最小值。

當以中央一點向周圍各條跨界邊畫出 $\alpha + \beta$ 條線並連回原點時，令 $v - e + f + A = k$ ；而繼續在此圖上加畫點數或線數，

僅有可能降低 k 值（因為加一點就至少加一線，而加一線就可能使 k 降低），

因此，我們只討論在這種情況下加線的情形：

若加一條線，則會多出一面，兩者相互抵銷，而 A 之值不變。

因此新圖形 $v - e + f + A$ 之值仍與原圖相同，為 k ，

故畫法可製造出 $v - e + f + A$ 之最小值 χ ，即為原圖所計算出的 k 。

□

以二正二反為例（如圖 9），先在曲面的中央畫一點，接著由中央一點畫出四條線 e_1, e_2, e_3, e_4 ，分別連到四條跨界邊的其中一部分，接著將四條線從四條跨界邊的另一部分穿回連到中心的點，依此畫法計算可得出該面上 χ 之值。此例中，即 $v = 1, e = 4, f = 0, A = 2 \Rightarrow \chi = v - e + f + A = -1$ 。

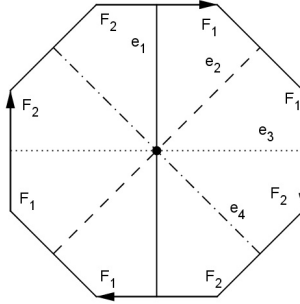


圖 9

定理 1. 在 α 正 β 反上，

1. 當 $\beta = 0$ 時，

(1) 若 α 為奇數，則有 $2 \geq v - e + f + A \geq 3 - \alpha$ ，即 $\chi = 3 - \alpha$ ；

(2) 若 α 為偶數，則有 $2 \geq v - e + f + A \geq 2 - \alpha$ ，即 $\chi = 2 - \alpha$ ；

2. 當 $\beta \neq 0$ 時，則有 $2 \geq v - e + f + A \geq 1 - \alpha$ ，即 $\chi = 1 - \alpha$ 。

證明.

1. 當 $\beta = 0$ 時，令 $a_1 \sim a_n$ 與 $a'_1 \sim a'_n$ 為 n 條跨界邊，

並以 $a_k L$ 代表以中心為出發點，連接至 a_k 部分的線之左半區域；

$a_k R$ 代表以中心為出發點，連接至 a_k 部分的線之右半區域。

(1) 若 α 為奇數，

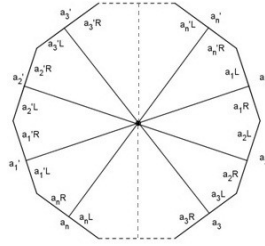


圖 10

區域一： $a_1L = a_1'R = a_2L = a_2R = \cdots = a_nL = a_n'R = a_1L = \cdots$

區域二： $a_1'L = a_1R = a_2L = a_2'R = \cdots = a_n'L = a_nR = a_1'L = \cdots$

故 $v = 1, e = \alpha, f = 0, A = 2$

$\Rightarrow v - e + f + A \geq 3 - \alpha$ ，即 $\chi = 3 - \alpha$ ，得證。

(2) 若 α 為偶數，

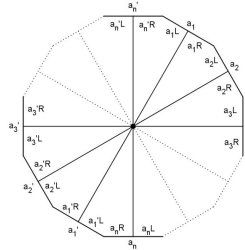


圖 11

區域： $a_1L = a_1'R = a_2L = a_2R = a_3L = a_3'R = \cdots = a_nL = a_n'R = a_1L = \cdots$
 $a_1R = a_2L = a_2'R = a_3L = a_3'R = \cdots = a_nL = a_n'R = a_1L = \cdots$

故 $v = 1, e = \alpha, f = 0, A = 1$

$\Rightarrow v - e + f + A \geq 2 - \alpha$ ，即 $\chi = 2 - \alpha$ ，得證。

2. 當 $\beta \neq 0$ 時，令 a_1, a_1' 與 a_n, a_n' 為中心點與反向邊的連線，

$a_2 \sim a_{n-1}$ 與 $a_2' \sim a_{n-1}'$ 為中心點與正向邊的連線， $a_i a_j$ 為兩線所夾的區域。

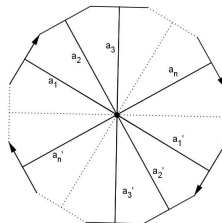


圖 12

n 為奇數：

$$a_1a_2 = a'_2a'_3 = a_3a_4 = \cdots = a'_{n-1}a'_n = a_{n-1}a_n = \cdots = a'_3a'_4 = a_2a_3 = a'_1a'_2 = a_1a_2$$

n 為偶數：

$$a_1a_2 = a'_2a'_3 = a_3a_4 = \cdots = a_{n-1}a_n = a'_{n-1}a'_n = \cdots = a'_3a'_4 = a_2a_3 = a'_1a'_2 = a_1a_2$$

可知兩條最相近的反向邊能夾出一個區域，因此在 α 正 β 反上， β 條最相近的反向邊共可夾出 β 個區域。

故 $v = 1, e = \alpha + \beta, f = 0, A = \beta$

$\Rightarrow v - e + f + \beta \geq 1 - \alpha$ ，即 $\chi = 1 - \alpha$ ，得證。

（當 β 為 1 時，易知其 $v = 1, e = \alpha + 1, f = 0, A = 1$ ，故 $v - e + f + A = 1 - \alpha$ 亦成立）

註： α 正 β 反的歐拉示性數並不會因正向邊和反向邊的排列而有所不同。

□

定理 2. 欲在歐拉示性數為 χ 的面上繪製曲面 K_m ，須符合不等式 $\chi \leq \frac{7}{6}m - \frac{1}{6}m^2 (m \geq 3)$ ，若不符合此不等式，則在該面上曲面 K_m 無法完成。也可將之整理為： $m \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil$ （ $[\cdot]$ 為高斯符號）

證明. 欲繪製 K_m ，則 $v = m, e = \frac{m(m-1)}{2}$

$$\because v - e + f + A \geq \chi$$

$$\therefore f + A \geq \chi - m + \frac{m(m-1)}{2}$$

又因兩點之間至多只有一條連線，所以構成一個區域至少三條線，

$$\text{故得 } \frac{(f+A) \times 3}{2} \leq e$$

$$\frac{3}{2}(\chi - m + \frac{1}{2}m(m-1)) \leq \frac{m(m-1)}{2}$$

$$\Rightarrow 3\chi - \frac{9}{2}m + \frac{3}{2}m^2 \leq m^2 - m$$

$$\Rightarrow \chi \leq \frac{7}{6}m - \frac{1}{6}m^2。$$

註：此不等式欲成立須符合 $m \geq 3$ ，因為其先決條件為一個面（或區域）至少由三條線構成。當 $m = 1$ 時， $e = 0, f = 0, A = 1$ ； $m = 2$ 時， $e = 1, f = 0, A = 1$ ，皆不符合此一條件，故代入不等式不合。 □

定理 3. 欲在歐拉示性數為 χ 的面上繪製曲面 $K_{n,n}$ ，須符合不等式 $\chi \leq 2n - \frac{1}{2}n^2 (n \geq 2)$ ，若不符合此不等式，則在該面上曲面 $K_{n,n}$ 無法完成。也可將之整理為： $n \leq \left\lceil 2 + \sqrt{4 - 2\chi} \right\rceil$ （ $[\cdot]$ 為高斯符號）。

證明. 欲繪製曲面 $K_{n,n}$ ，則 $v = 2n, e = n^2$

$$\because v - e + f + A \geq \chi$$

$$\therefore f + A \geq \chi - 2n + n^2$$

又因兩點之間至多只有一條連線且同一組的點不能相連，所以構成一個區域至少四條線，故得 $\frac{(f+A)4}{2} = 2(f+A) \leq e$

$$\Rightarrow 2\chi - 4n + 2n^2 \leq n^2$$

$$\Rightarrow \chi \leq 2n - \frac{1}{2}n^2。$$

註：此不等式欲成立須符合 $n \geq 2$ ，因為其先決條件為一個面（或區域）至少由四條線構成。當 $n = 1$ 時， $e = 1, f = 0, A = 1$ ，不符合此一條件，故代入不等式不合。 □

2.3 著色數

(a) 著色數與歐拉示性數

- i. 在一著色數為 n 之特殊面上，不論歐拉示性數為何，其所能完成的最大 K_m 為 K_n

證明. 由於 K_n 為 n 點均相連的圖形，因此需要著色數為 n 以上之特殊面方可完成，故著色數為 n 之特殊面上所能完成的最大完全圖為 K_n 。□

- ii. 目前所知著色數幾乎無法以人力證明 (Skiena 1990)，須利用電腦方能達成，故我們只能藉由歐拉示性數與前述定理之輔助，完成尚未被證明著色數之特殊面上所能完成之最大圖。

(b) 已知著色數 (資料來源：參考文獻[3] p.235)

特殊面	著色數
零正零反 (一般平面)	4 (四色問題)
一正零反	4
零正一反	6
二正零反	7
一正一反	6

表 1

2.4 α 正 β 反上的 K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$

(a) 特例：零正二反與 α 正零反 (其中 α 為奇數)

- i. 零正二反：當兩條反向邊相鄰時，可合成一條反向邊 (如圖 13)，因此零正二反等於零正一反，我們不予討論，且在之後的特殊面中，對於兩條反向邊相鄰的情況都不作探討。

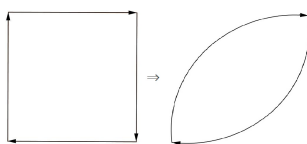


圖 13

- ii. α 正零反 (其中 α 為奇數)：由定理 1 可知， α 正零反 (其中 α 為奇數) 的歐拉示性數與 $(\alpha - 1)$ 正零反相同。但我們發現，此兩種特殊面不僅是歐拉示性數相同，而是完全一樣。以下將做證明： α 正零反 (其中 α 為奇數) 等於 $(\alpha - 1)$ 正零反。

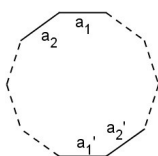


圖 14

令 $a_1 \sim a_n$ 與 $a'_1 \sim a'_n$ (其中 n 為奇數) 分別為 n 條正向邊的兩個部份。試圖將其中一條跨界邊上的線移至其相鄰的跨界邊上, 以代替原本的路徑。這裡以 $a_1(a'_1)$ 為例說明。

將原本穿過 a_1 的線移至 a_2 (靠近 a_1 的那側, 姑且稱之為面對 a_2 時 a_2 的右側), 而這些線將從 a'_2 的左側穿出, 可再穿入 a'_3 的右側... 重複此步驟, 可知這些線能從任意跨界邊 a_k, a'_k ($1 \leq k \leq n$) 的右側穿入、左側穿出, 即可由 a_n 的左側穿出, 使其線之相對位置與原始在 a'_1 上時相同, 這時 $a_1(a'_1)$ 上將沒有線穿過, 故可以將它刪除, 使兩者效果完全一樣。

α 正零反 (其中 α 為奇數) 等於 $(\alpha - 1)$ 正零反得證。

同時, 當 $\alpha = 1$ (即一正零反) 時, 亦符合以上結論, 在此證明:

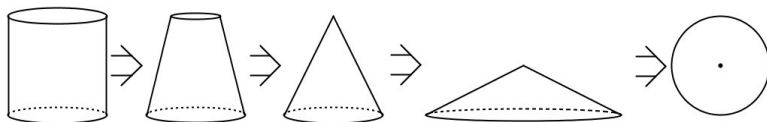


圖 15

如圖 15 左為一圓柱面 (即一正零反), 經過變形而不拆解即可成為一平面 (即零正零反), 故一正零反亦等於零正零反。因此「 α 正零反 (其中 α 為奇數) 等於 $(\alpha - 1)$ 正零反」確實適用於所有情形。

(b) $K_m, K_{n,n}$ 與 $K_{m,n,p,q,\dots}$ (以下僅列出目前所完成的圖形)

i. K_m :

(1) 零正零反 ($\chi = 2 - 0 = 2$): 至多可完成平面 K_4 (如圖 1)。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 2;

再將 χ 之值代入定理 2 之 $m_{max} = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor$,

得 $m_{max} = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1}}{2} \right\rfloor = 4$,

故在此面上最多可完成平面 K_4 。

另外, 根據圖 1 可知平面 K_4 確實存在於零正零反上。□

(2) 一正零反 ($\chi = 3 - 1 = 2$): 至多可完成 K_4 。

證明. 同(1)零正零反之證明。□

(3) 零正一反 ($\chi = 1 - 0 = 1$): 至多可完成 K_6 (如圖 16、圖 17)。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 1;

再將 χ 之值代入定理 2 之 $m_{max} = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor$,

得 $m_{max} = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{25}}{2} \right\rfloor = 6$,

故在此面上最多可完成 K_6 。

另外, 根據圖 18 可知 K_6 確實存在於零正一反上。□

(4) 一正一反 ($\chi = 1 - 1 = 0$): 根據表 1, 一正一反至多可完成 K_6 。

說明. 根據定理 2, K_7 有機會存在。

由定理 1 可知其 χ 為 0;

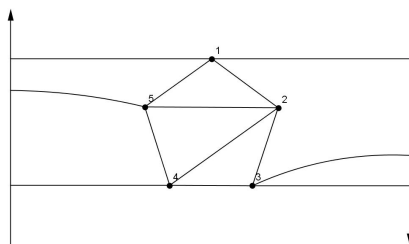


圖 16

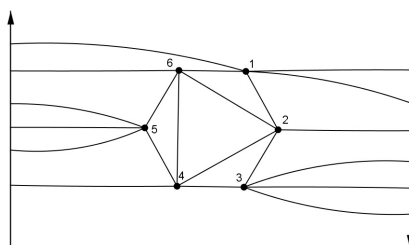


圖 17

再將 $\chi = 0$ 、 $m = 7$ 代入定理 2 的不等式 $\chi \leq \frac{7}{6}m - \frac{1}{6}m^2$ ，得 $0 \leq 0$ ；

然而表 1 中，一正一反之著色數為 6，並已完成證明。故在此面上最多可完成 K_6 ，故猜想其可能不存在於此特殊面上。

(5) 二正零反 ($\chi = 2 - 2 = 0$)：可以完成 K_7 （如圖 18）。

證明. 由於二正零反和一正一反的 χ 值相同，故依據(4)一正一反上的說明可知在此面上最多可完成 K_7 ，並由圖 18 證實其確實存在。

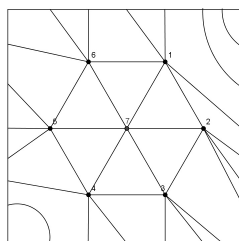


圖 18

另外，二正零反上 K_7 亦有如圖 19 之繪法。

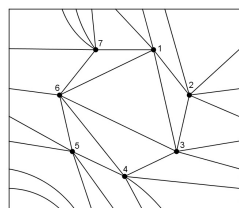


圖 19

□

(6) 二正一反 ($\chi = 1 - 2 = -1$) : 此曲面對於完成 K_m 並無實質作用。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 -1 ;

再將 χ 之值代入定理 2 之 $m_{max} = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil$,

得 $m_{max} = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{73}}{2} \right\rceil = 7$,

故此面與二正零反相同，最多可完成 K_7 ;

而由於在二正零反上只使用兩條正向邊，因此在二正一反上只需使用其正向邊，並不需反向邊，則此圖形便與二正零反時相同，故此曲面對於完成 K_m 並無實質作用。 $\square$

(7) 三正一反 ($\chi = 1 - 3 = -2$) : 可以完成 K_8 (如圖 20)

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 -2 ;

再將 χ 之值代入定理 2 之 $m_{max} = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil$,

得 $m_{max} = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{97}}{2} \right\rceil = 8$,

故在此面上最多可完成 K_8 。

另外，根據圖 20 可知 K_8 確實存在於三正一反上。

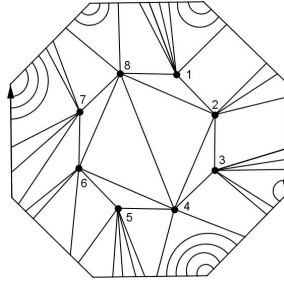


圖 20

$\square$

(8) 四正零反 ($\chi = 2 - 4 = -2$) : 可以完成 K_8 (如圖 21) 。

證明. 由於四正零反和三正一反的 χ 值相同，故依據(7)三正一反上的證明可知在此面上最多可完成 K_8 ，並由圖 21 證實其確實存在。 $\square$

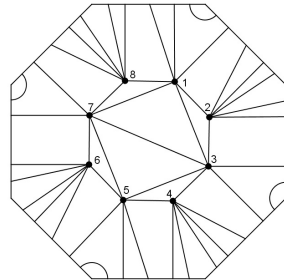


圖 21

ii. $K_{n,n}$:

(1) 零正零反 ($\chi = 2 - 0 = 2$) : 至多可完成平面 $K_{2,2}$ (如圖 22)。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 2 ;

再將 χ 之值代入定理 3 之 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{4 - 2\chi} \right\rfloor$,

得 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{0} \right\rfloor = 2$, 故在此面上最多可完成平面 $K_{2,2}$ 。

另外, 根據圖 22 可知平面 $K_{2,2}$ 確實存在於零正零反上。 □

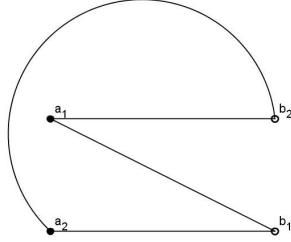


圖 22

(2) 一正零反 ($\chi = 3 - 1 = 2$) : 至多可完成 $K_{2,2}$ 。

證明. 同(1)零正零反之證明。 □

(3) 零正一反 ($\chi = 1 - 0 = 1$) : 至多可完成 $K_{3,3}$ (如圖 23)。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 1 ;

再將 χ 之值代入定理 3 之 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{4 - 2\chi} \right\rfloor$,

得 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{2} \right\rfloor = 3$, 故在此面上最多可完成 $K_{3,3}$ 。

另外, 根據圖 23 可知 $K_{3,3}$ 確實存在於三正一反上。 □

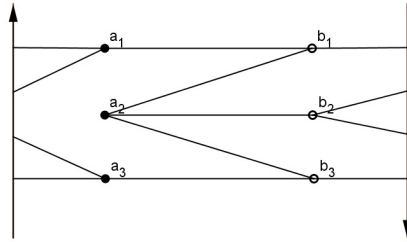


圖 23

(4) 一正一反 ($\chi = 1 - 1 = 0$) : 根據定理 3, $K_{4,4}$ 有機會存在。

說明. 由定理 1 可知其 χ 為 0 ;

再將 $\chi = 0$ 、 $n = 4$ 代入定理 3 的不等式 $\chi \leq 2n - \frac{1}{2}n^2$, 得 $0 \leq 0$;

然而實際繪製時, 並無法在其上畫出 $K_{4,4}$, 故猜想其可能不存在於此特殊面上。

註: 以圖 24 作說明, 因為 $\chi \leq 2n - \frac{1}{2}n^2$ 得 $0 \leq 0$, 所以理論上並不會有任一面為非四邊形。但實際繪製時, 點 a_1 與點 b_2 之連線無法繪出, 故存

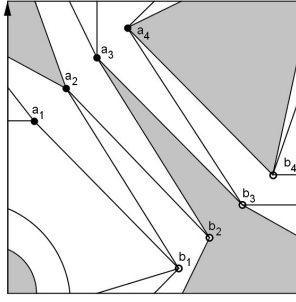


圖 24

在一未分割成兩四邊形之六邊形（即淺灰色區域），且此區域由點 a_2 、點 b_3 、點 a_3 、點 b_2 、點 a_4 、點 b_4 構成，並無法完成點 a_1 與點 b_2 之連接。

- (5) 二正零反 ($\chi = 2 - 2 = 0$)：可以完成 $K_{4,4}$ （如圖 25）。

證明. 由於二正零反和一正一反的 χ 值相同，依據(4)一正一反上的說明可知在此面上最多可完成 $K_{4,4}$ ，並由圖 25 證實其確實存在。 $\square$

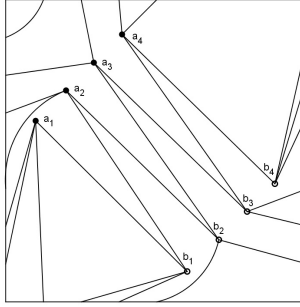


圖 25

- (6) 二正一反 ($\chi = 1 - 2 = -1$)：此曲面對於完成 $K_{n,n}$ 並無實質作用。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 -1；

再將 χ 之值代入定理 3 之 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{4 - 2\chi} \right\rfloor$ ，

得 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{6} \right\rfloor = 4$ ，

故此面與二正零反相同，最多可在其上完成 $K_{4,4}$ ；

而由於在二正零反上只使用兩條正向邊，因此在二正一反上只需使用其正向邊，並不需反向邊，則此圖形便與二正零反時相同，故此曲面對完成 $K_{n,n}$ 並無實質作用。 $\square$

- (7) 三正一反 ($\chi = 1 - 3 = -2$)：此曲面對於完成 $K_{n,n}$ 並無實質作用。

證明. 由定理 1 可知其 χ 為 -2；

再將 χ 之值代入定理 3 之 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{4 - 2\chi} \right\rfloor$ ，

得 $n_{max} = \left\lfloor 2 + \sqrt{8} \right\rfloor = 4$ ，

故此面與二正零反及二正一反相同，最多可在其上完成 $K_{4,4}$ ；

基於和二正一反相同的原因，此曲面對完成 $K_{n,n}$ 並無實質作用。 $\square$

iii. $K_{n_1, n_2, n_3, \dots}$:

- (1) 零正零反：可完成平面 $K_{1,1}$ 、(如圖 26)、平面 $K_{1,1,1,2}$ (如圖 27)、平面 $K_{2,2,2}$ (如圖 28)。

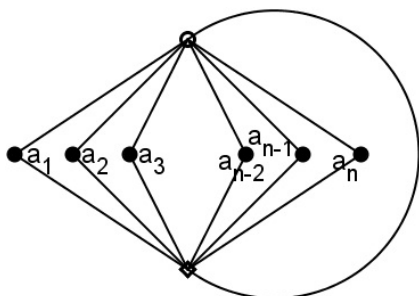


圖 26

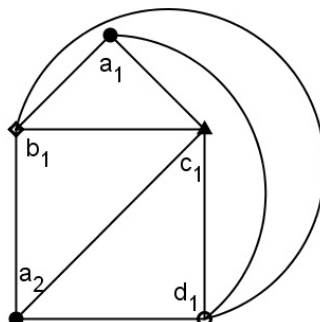


圖 27

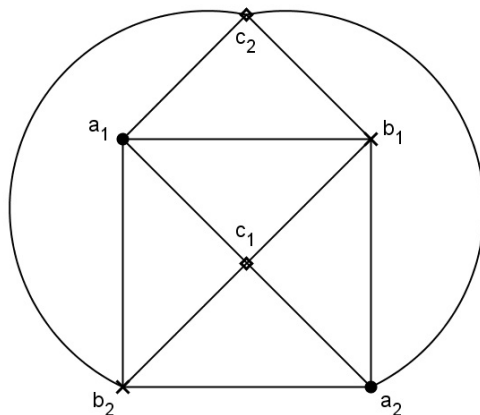


圖 28

- (2) 一正零反：可完成 $K_{1,1,n}$ 、 $K_{1,1,1,2}$ 和 $K_{2,2,2}$ (同零正零反)。
 (3) 二正零反：可完成 $K_{3,3,3}$ (如圖 29)。

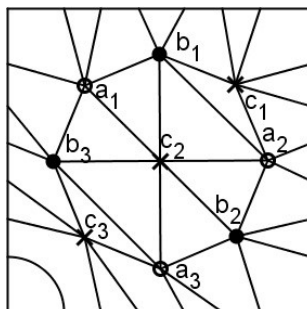


圖 29

(c) 小結

K_m	$K_{n,n}$	χ	所需的特殊面（至少）
$K_1 \sim K_4$	$K_{1,1}$ 、 $K_{2,2}$	2	零正零反
K_5 、 K_6	$K_{3,3}$	1	零正一反
K_7	$K_{4,4}$	0	一正一反（確定無法完成 K_7 ）、 二正零反（目前僅能在此繪出）
		-1	二正一反
K_8		-2	三正一反、四正零反
K_9	$K_{5,5}$	-3	四正一反
		-4	五正一反、六正零反
K_{10}		-5	六正一反
	$K_{6,6}$	-6	七正一反、八正零反
		-7	八正一反
K_{11}		-8	九正一反、十正零反
		-9	十正一反
K_{12}		-10	十一正一反、十二正零反
	$K_{7,7}$	-11	十二正一反
...	...	...	...

3 結論

3.1 研究結果

結果 1. 在 α 正 β 反上，一個擁有 v 個點、 e 條線、 f 個面、 A 個區域的圖 G ，其 v 、 e 、 f 、 A 必符合一不等式：

1. 當 $\beta = 0$ 時，

- (1) 若 α 為奇數，則歐拉不等式為 $2 \geq v - e + f + A \geq 3 - \alpha$ ；
- (2) 若 α 為偶數，則歐拉不等式為 $2 \geq v - e + f + A \geq 2 - \alpha$ ；

2. 當 $\beta \neq 0$ 時，歐拉不等式為 $2 \geq v - e + f + A \geq 1 - \alpha$ 。

結果 2. 欲在歐拉示性數為 χ 的面上繪製 K_m ，須符合不等式 $\chi \leq \frac{7}{6}m - \frac{1}{6}m^2$ ，若符合此不等式，則 K_m 有可能存在於此特殊面，但此非其充分條件；若不符合此不等式，則在該面上 K_m 必無法完成。而將此不等式整理後，可得其 m 必符合 $m \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor$ 。

結果 3. 欲在歐拉示性數為 χ 的面上繪製 $K_{n,n}$ ，須符合不等式 $\chi \leq 2n - \frac{1}{2}n^2$ ，若符合此不等式，則 $K_{n,n}$ 有可能存在於此特殊面，但此非其充分條件；若不符合此不等式，則在該面上 $K_{n,n}$ 必無法完成。而將此不等式整理後，可得其 n 必符合 $n \leq \left\lfloor 2 + \sqrt{4 - 2\chi} \right\rfloor$ 。

結果 4. 目前已研究之特殊面與其可完成之 K_m 、 $K_{n,n}$ 如下：

1. 零正零反、一正零反可完成至 K_4 、 $K_{2,2}$ 、 $K_{1,1,n}$ 、 $K_{1,1,1,2}$ 、 $K_{2,2,2,2}$ ；
2. 零正一反可完成至 K_6 、 $K_{3,3}$ ；
3. 二正零反可完成至 K_7 、 $K_{4,4}$ 、 $K_{3,3,3,3}$ ；
4. 三正一反可完成至 K_8 ；
5. 四正零反可完成至 K_8 。

3.2 討論

在此研究中， K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 皆先以手繪完成，再用電腦以 GeoGebra 繪圖。而對於繪製 K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 時所使用的方法，除了以所推導出的歐拉示性數公式輔助外，並無特定的規律與方法，而是以較為「隨機」的方式繪圖，即若非該圖形已確實繪出，我們並無法確定其是否能真正存在於某特定特殊面上。而研究中所繪出之 K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 皆為目前已解決的圖形，我們尚未確認在更多條跨界邊的特殊面上， $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 這類更複雜的圖形之存在與否。但是，經過研究歸納，對於 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 這類更複雜的圖形，我們做了以下兩個猜想：

猜想 1. 在 α 正 β 反上所繪製的 $K_{3,n,n}$ 上界為 $K_{3,3,3}$ 。

說明. 要繪製 $K_{3,n,n}$ 的前提即是 $K_{n,n}$ 可以畫出，且符合條件：圖形中存在三個接觸所有點的面，此時第三組點中的三點才能分別繪製於上述的三面上，以完整連接另外兩組點。而目前尚無法使 $K_{4,4}$ 符合上述條件，因此我們認為 $K_{3,4,4}$ 無法完成。

猜想 2. 在 α 正 β 反上所繪製的 K_m 上界為 K_{10} 。

說明. 由於 $K_{3,4,4}$ 為 K_{11} 的子圖，因此若猜想一成立，即 $K_{3,4,4}$ 無法完成，則 K_{11} 亦無法完成。故上界為 K_{10} 。

同時，目前研究的 K_m 與 $K_{n,n}$ 主要情形如下：

1. K_m ：目前繪製 K_m 時，以定理 2 的公式尋求所需特殊面之歐拉示性數範圍，並以「所有面（或區域）皆為三角形」為原則試圖完成。同時，因為並無特定繪製方法，所以尚未了解在歐拉示性數符合條件的特殊面上，仍無法繪製 K_m 的原因與情形為何。
2. $K_{n,n}$ ：目前繪製 $K_{n,n}$ 時，以定理 3 的公式尋求所需特殊面之歐拉示性數範圍，並以「所有面（或區域）皆為四邊形」為原則試圖完成。同時，因為並無特定繪製方法，所以尚未了解在歐拉示性數符合條件的特殊面上，仍無法繪製 $K_{n,n}$ 的原因與情形為何。

針對較 K_m 與 $K_{n,n}$ 複雜的 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ ，因為它不僅是點與點相連的問題，更牽涉到多組點之間的關係，我們尚無法完整討論。研究 K_m 與 $K_{n,n}$ 時，我們探討能否繪於特殊面上所使用的方法，是根據每個面的形狀（為幾邊形），再計算出所需的線數是否符合歐拉示性數，但 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 中，每面的形狀以及個數與「有幾組點」、「每組有幾個點」相關，而且有無限多種組合的可能，情況複雜許多。

由於以上，我們希望往後能夠尋求更多能夠幫助完成 K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 問題的方法，以確認在特殊面上，特定圖形是否能夠完成。因此，未來可能研究方向如下：

1. 除了以不等式 $\chi \leq \frac{7}{6}m - \frac{1}{6}m^2$ 與 $\chi \leq 2n - \frac{1}{2}n^2$ 確認圖形不存在於特定特殊面上之外，找出其他方法或公式以確定 K_m 、 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 是否能存在於特定特殊面上（例：目前不能確知 $K_{4,4}$ 與 $K_{3,3,3}$ 是否存在於一正一反上，需要其他方式方能確定）。
2. 在 χ 值相同的情況下，判斷各種 α 正 β 反之效果有何不同（因為當 χ 值相同時，特殊面也有多種情形，如： χ 等於 -2 時， α 正 β 反的可能情形有四正零反、三正三反、三正二反和三正一反，共四種）。
3. 瞭解 α 、 β 值相同但正向邊與反向邊排列不同的 α 正 β 反曲面，是否會對 K_m 與 $K_{n,n}$ 與 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ 的繪製有不同的效果。
4. 目前研究階段僅為 K_m 、 $K_{n,n}$ ，以及部分的 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ ，未來可更完整研究 $K_{n_1,n_2,n_3,\dots}$ ，甚至找出其所通用的定理。

若能完整研究以上四點，則更能解決曲面圖之連線問題。

3.3 結論

在此研究中，我們主要利用 α 與 β 之值的不同，找出 α 正 β 反上歐拉式的最小值，再進一步推出完成完全圖 (K_m) 與完全二部圖 ($K_{n,n}$) 繪製時的必要條件，而確知在這些特殊面上確實能夠完成較平面上更大的圖形。

參考文獻

- [1] 凡異編輯部, 數學的神秘與奇趣, 新竹市, 凡異出版社.
- [2] West, D. B., Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 2001.
- [3] Gardener, Martin, The Colossal Book of Mathematics, Norton, 2001.