層層逼近－尋找疊蓋的最佳效益

國立花蓮高級中學 宮承宏
指導老師 林哲宇

Abstract

My research mainly in discussing the use of a small equilateral triangle covering large equilateral triangle, and the minimum value of the small equilateral triangle side length. Process found the best cover under certain restrictions, but after the removal of conditions, but better coverage. We try to calculate the side length of the minimum, some recursive relationship is also found in the calculation. Example from the beginning to the face of any number of equilateral triangle coverage do systematic collation, and summarize the calculated given the number of small equilateral triangle to cover a large equilateral triangle, equilateral triangle side length of the minimum and appropriate coverage.

中文摘要

我的研究主要在討論利用小正三角形覆蓋大正三角形的方法，以及此時小正三角形的邊長問題。而過程中也發現了在某些限制條件下的蓋法，但去除條件後卻又有更好的覆蓋方法。我嘗試著去歸納通式，並在計算中發現了一些遞迴的關係。從一開始的舉例到後面對任意個數正三角形的覆蓋方法做系統性的整理，並歸納計算出給定小正三角形個數去覆蓋大正三角形時，使用適當的覆蓋方法可使小三角形的邊長較小，發揮較大的效益。

1 簡介

這個作品的由來是源自於一個題目的延伸，這個題目是在討論在可重疊的情況下，為何兩個邊長小於 1 的正三角形無法完全蓋住邊長為 1 的正三角形?原因很簡單，因為邊長小於 1 的正三角形最多只能蓋住大正三角形其中 1 個頂點，由鴿籠原理可得証。於是問題從此延伸，如果用大於等於三塊的小三角形去覆蓋的話會如何？在本文中探討當給定 n 個邊長小於 1 的小三角形去覆蓋邊長為 1 的大三角形時(大三角形與小三角形為相似形)的最佳蓋法以及其中每塊小三角形所需的邊長最小值。然而三角形的覆蓋若要考慮一般旋轉角度問題，將變得十分複雜，因此本文中只針對平行或是旋轉 $180°$ 的情形作討論。
為了方便說明，在此先定義 case n。

定義. 若三角形的某邊最多可併排 n 個小三角形，則我們統稱此情形為 case n。亦即小三角形邊長小於等於 $\dfrac{1}{n}$，大於 $\dfrac{1}{n+1}$。

在一開始的舉例過程中，我發現小三角形個數為 4, 9, 16 ... n^2, 時可恰好覆蓋大三角形而不重疊，因此從這裡著手，利用小三角形平移且不造成重疊的方法覆蓋，由於平移後會形成一條類似走道的剩餘空間，所以定義此種方法為「走道蓋法」，並以此繼續討論。之後又發現在 case n 為偶數的情況下存在更佳的覆蓋方法，可使用一種較為對稱的方法做覆蓋，即為本文中定義的「凸出蓋法」，可使小三角形邊長值更小(更有效益)，接著便混合使用兩種覆蓋方法，計算出在使用此種覆蓋方法下，小三角形的邊長最小值。

1.1 研究目的

只考慮使用平行或是旋轉 $180°$ 的小三角形覆蓋且可重疊的條件下，找出在邊長為 1 的正三角形中，使用固定個數個小三角形去覆蓋大三角形時存在的較佳之覆蓋方法，以及使用此方法下小三角形的邊長最小值。

1.2 三角形覆蓋幾何相關定義

1. 大 △：欲被覆蓋且邊長為 1 的正三角形。
2. 小 △：欲用來覆蓋大 △ 且邊長小於 1 的正三角形。
3. 邊長最小值 x：使用最佳蓋法覆蓋時，小 △ 所需之最小邊長。
4. 最佳蓋法：只考慮平行或是旋轉 180 度的三角形覆蓋情形下，使用固定個數個小 △，使小 △ 邊長較小的覆蓋方法。
5. 完全覆蓋：利用小 △ 在可重疊的情況下完全覆蓋住大 △ 的情形。

2 研究內容

定義. 對於正整數 n, $l(m)$ 為使用 m 個小 △ 蓋滿大 △ 所需之最小邊長。

性質.

(1) 對於所有正整數 m, $l(m+1) \leq l(m)$。

(2) $l(n^2) = \frac{1}{n}$。

(3) 若 $(n+1)^2 > m > n^2$, 則 $l(m) \leq \frac{1}{n}$。

證明.

(1) m 個邊長為 $l(m)$ 之小 △ 可以蓋滿，所以 $(m+1)$ 個邊長為 $l(m)$ 之 △ 亦可以蓋滿，所以 $l(m+1) \leq l(m)$。

(2) 顯然 n^2 個邊長為 $\frac{1}{n}$ 的小 △，恰可蓋滿大 △。若取 n^2 個邊長小於 $\frac{1}{n}$ 的小 △，則總面積小於大 △ 之面積，不可能蓋滿。

(3) 由(1)、(2)可得 $l(m) \leq l(n^2) = \frac{1}{n}$。 □

2.1 舉例(分別使用總數為 3、4、5、6 個小 △ 做覆蓋之情形)

2.1.1 三個小 △ 覆蓋

若要用三個邊長小於 1 的 △ 覆蓋，需覆蓋大 △ 三個頂點，先覆蓋住一個頂點，可能之方法有以下幾種：

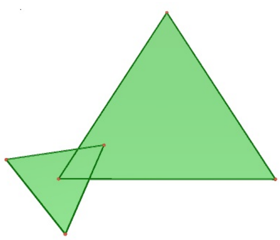


圖 1

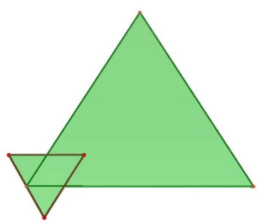


圖 2

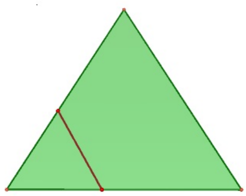


圖 3

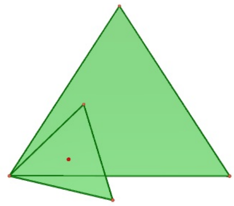
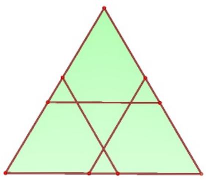


圖 4

由於本文只考慮平行或是旋轉 180 度的三角形覆蓋情形，因此將 (圖 1)、(圖 4)之情形排除，而(圖 3)角貼角之覆蓋面積最大，最有效益，因此採用(圖 3)之方法作為最佳蓋法進行覆蓋。



小 △ 放大後 ⇒

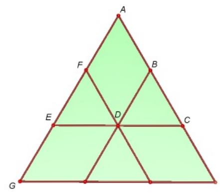


圖 5

圖 6

易推得(圖 6)之 $\triangle DEF$、$\triangle BCD$ 為正三角形而 $ABDF$ 為平行四邊形， 設 $\overline{BC} = \overline{EF} = x, \overline{AC} = y$。

則 $\overline{AB} = \overline{DF} = \overline{EF} = x - y = y$，又 $\overline{GF} + \overline{AE} - \overline{EF} = 1 = \frac{3}{2}x$，得 $x = \frac{2}{3}$。

故可知 $l(3)$ 為 $\frac{2}{3}$。

驗證 $l(3)$ 為 $\frac{2}{3}$：

若 $l(3)$ 不為 $\frac{2}{3}$，即存在邊長為 $x' < \frac{2}{3}$，亦可完全覆蓋大 △。

依照(圖 3)之蓋法覆蓋住大 △ 的三個頂點後，無法覆蓋住 D 點，因此 $l(3) = \frac{2}{3}$。

2.1.2 四個小 △ 覆蓋

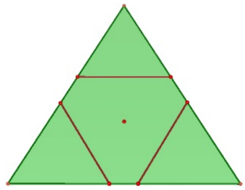
由性質(2)，$l(2)$ 為 $\frac{1}{2}$。

2.1.3 五個小 △ 覆蓋

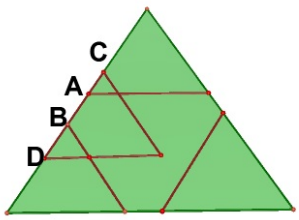
大 $\triangle ACE$ 中 B, D, F 分別為 $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{AE}$ 的中點使得 $ABCDEF$ 六點中，任意二點距離大於等於 $\frac{1}{2}$，由性質 3 知 $l(5) \le l(4) = \frac{1}{2}$，但是將每一個小 △ 邊長縮小至小於 $\frac{1}{2}$ 後，發現剩餘圖形無法以一個小 △ 覆蓋，因此可得 $l(5) \ge \frac{1}{2}$，加上性質 3 即可得 $l(5) = \frac{1}{2}$。

2.1.4 六個小 △ 覆蓋

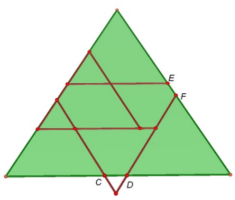
依 (2.1.1) 圖 3 的覆蓋方式，可先分別放三個小 △ 在大 △ 的三個角落。



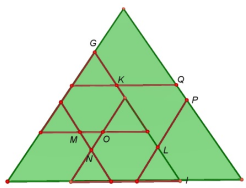
1° 覆蓋剩餘第一塊小 △：
因為需至少覆蓋 $\overline{AB}$，在不考慮一般旋轉之條件下，最佳蓋法如下：



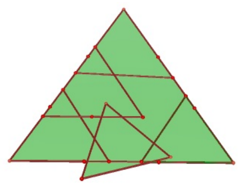
2° 蓋剩餘第 2 塊小 △：
因為剩下 2 個小 △ 需至少覆蓋 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$，所以蓋法有以下幾種：



A 方法



B 方法



C 方法

其中 C 方法不在我們的討論範圍內，加以排除。

設小 △ 邊長為 X
若使用 B 之蓋法，剩餘一個小 △ 需覆蓋梯形 $KLPQ$ 且 $\triangle MNO$ 面積需縮小為 0。 對 $\triangle GHI$ 而言，因為 $\triangle MNO$ 面積需縮小為 0，由三個小 △ 排列的結論可知 $\overline{GI} = \dfrac{3}{2}x$。

$$\overline{KL} = \overline{IG} - 2\left[x - \left(1 - \overline{IG}\right)\right] = \frac{3}{2}x - 2\left(x - 1 + \frac{3}{2}x\right) = 2 - \frac{7}{2}x$$

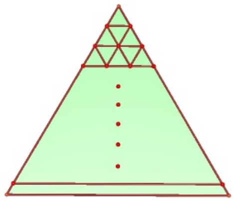
$$\Rightarrow \ \overline{KL} = 2 - \frac{7}{2}x \le x \ \Rightarrow \ x \ge \frac{4}{9}\text{，}x \text{ 最小值為 } \frac{4}{9}\text{。}$$

若使用 A 之蓋法，

$$\frac{1-x}{2} + \overline{CD} \le x \ \Rightarrow \ \frac{1-x}{2} + 1 - 2x \le x \ \Rightarrow \ \frac{4}{9} \le x\text{，}x \text{ 最小值為 } \frac{3}{7}\text{。}$$

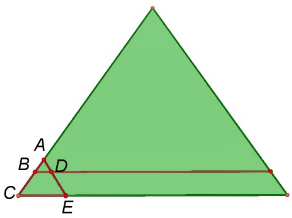
所以較佳之蓋法為 A，$l(3) = \dfrac{3}{7}$。

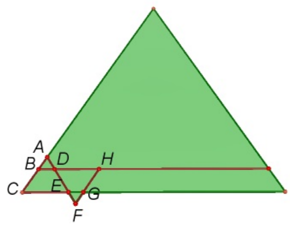
2.2 使用 n^2+1 到 n^2+n 個小 △ 覆蓋的邊長最小值



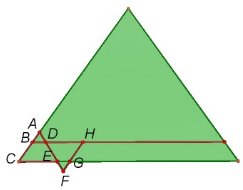
經由上圖的觀察，顯然 n^2+1個小 △ 的邊長最小值是無法小於 $\frac{1}{n}$ 的，這點由使用五個小 △ 覆蓋的情形不存在我們所預期的邊長最小值就可知。將原本排滿 n^2 個小 △ 的大 △ 中所有小 △ 縮小並全部往上平行推擠到頂端後會剩下一個梯型區塊，而底邊長為 1，由於縮小後的小 △ 邊長小於 $\frac{1}{n}$，所以小於 n 個小 △ 不可能蓋得住圖中下方的梯型區塊。因為大 △ 邊長為 1 而小 △ 邊長小於 $\frac{1}{n}$，故 n 個小 △ 蓋不住 n^2 個小 △ 推移如上圖中沒有被蓋住的大 △ 的底邊，也可得知一結論：根據此種平移(圖 11)，對於 $n^2 \le m \le n^2+n$，則 $l(m)=\frac{1}{n}$。

由(2.2.1)可知貼角為最佳之蓋法，採用此種方法且小 △ 彼此皆不相鄰之蓋法如下：





證明 n^2+n+1 個邊長小於 $\frac{1}{n}$ 的小 △ 可覆蓋住大 △：



假設總數為 $n^2+q\ (0\le q<2n+1)$，小 △ 邊長 x，$\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$，其中 $\overline{DG}=nx$。只須證明一個小 △ 可覆蓋 $FGHC$，即 $\overline{FG}<\overline{DE}$，則 $n\times\overline{DE}=\overline{DG}-\overline{FG}\Rightarrow\overline{DE}=\frac{nx}{n+1}$，又 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$，所以 $\overline{DE}<\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)<x$，即使用 n^2+n+1 個小 △ 時，存在 $\overline{DE}=\frac{nx}{n+1}$ 使 $\overline{FG}<\overline{DE}$，$n^2+n+1$ 個邊長小於 $\frac{1}{n}$ 的小 △ 可覆蓋住大 △。

2.3 n^2+q 個小 △ 之覆蓋

接下來我們進一步討論總數介於 n^2 和 $(n+1)^2$ 之間的情形以及此時小 △ 邊長 x 的最小值。假設總數為 $n^2+q,\ \{q|0\le q<2n+1\}$ 個小 △。同 (2.3) 的覆蓋方式，q 個小 △ 覆蓋

梯形 $ABFE$ 時，剩餘圖形會依 q 的奇偶性質而有所不同，而會形成以下二種圖形:(圖 7)、(圖 8)，故以下將其分開來討論:

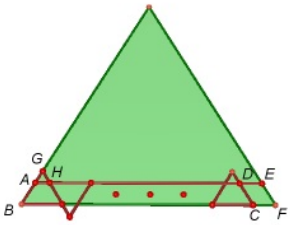


圖 7

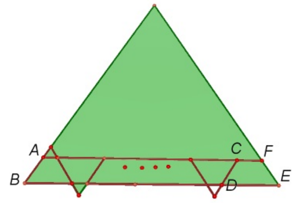


圖 8

2.3.1 q 為偶數

此時形成之圖形如(圖 7)，計算如下：
由於 q 個小 △ 需覆蓋梯形 $ABFE$，所以 $(q-1)$ 個小 △ 需覆蓋梯形 $ABCD$，

$$\overline{AD}=\frac{q}{2}\overline{AH}+\left(\frac{q}{2}-1\right)x\ \Rightarrow\ \overline{AD}=\frac{q}{2}\left[x-(1-nx)\right]+\left(\frac{q}{2}-1\right)x，$$

又 $\overline{AE}=nx$，所以

$$\overline{DE}=\overline{CF}=\overline{AE}-\overline{AD}=nx-\left\{\frac{q}{2}\left[x-(1-nx)\right]+\left(\frac{q}{2}-1\right)x\right\}=(n+1)x-\frac{q}{2}[(n+2)x-1]$$

因為 $\overline{CD}=1-nx$，從 $\overline{CD}+\overline{CF}\leq x$ 可得 $\dfrac{q+2}{nq+2q}\leq x$。

2.3.2 q 為奇數

此時形成之圖形如(圖 8)，計算如下：

$$\overline{AC}=\overline{BD}=[(n+2)x-1]\times\frac{(q-1)}{2}，\overline{DE}=1-\overline{BD}，由\ \overline{DE}\leq x\ 可得\ \frac{q+1}{nq-n}\leq x。$$

2.4 走道的變換

2.4.1 定義走道：

大 △ 內排除掉 n^2 個小 △ 不重疊的覆蓋範圍後，剩餘圖形我們稱之為走道。
例. 如圖 9 中之走道$ABCDEFGH$，走道圖形可隨小 △ 移動所改變，但小 △ 需彼此相鄰，而此種覆蓋方法我們稱為走道蓋法。

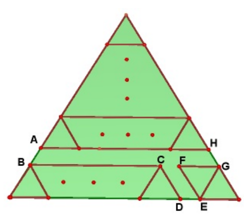


圖 9

已知走道可隨小 △ 移動所改變，將(圖 10)之部分小 △ 移動後可得(圖 11)

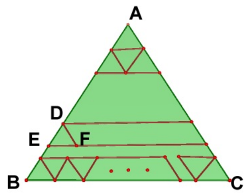


圖 10

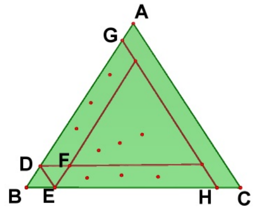
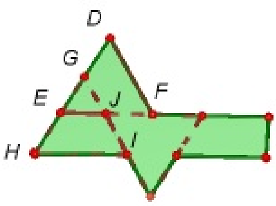


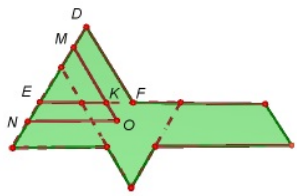
圖 11

2.4.2 驗證走道蓋法在小 △ 覆蓋不超出大 △ 的條件下為最佳蓋法

證明. 設大 △ 可用走道蓋法使 n^2+l 個邊長為 x 的小 △ 能完全覆蓋。在小 △ 個數固定不變的條件下，假設走道蓋法不為最佳，存在其他蓋法能使小 △ 邊長最小值 $x' \le x$。
已知小 △ 覆蓋不超出大 △，所以若要使走道改變，則必須移動小 △。
與走道相鄰之小 △ 移動：
已知 A 圖內之走道可被完全覆蓋，且最佳覆蓋方式如圖 A
則當小 $\triangle DEF$ 沿 $\overline{DH}$ 平移至 $\triangle MNO$ 時，新的走道是否亦可覆蓋？



A



B

因為 $\overline{EK}$ 無法蓋住 $\overline{EF}$，所以 n^2+l 個邊長為 x 的小 △ 無法完成覆蓋，所以 $x' \ge x$ 而得到矛盾。
由以上可知走道蓋法在小 △ 覆蓋不超出大 △ 的條件下為最佳蓋法。 □

2.4.3 走道 Z 型變換

接著我們來説明當走道有部份上下平移:從(圖 12)平移變成(圖 13)所示情形(我們將此類型變換稱為 Z 型變換)

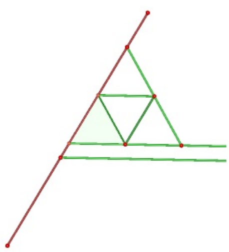


圖 12

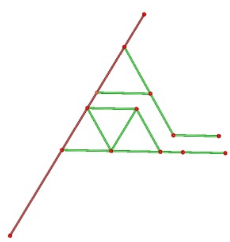


圖 13

蓋法如下：

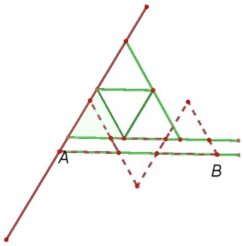


圖 14

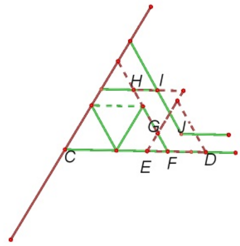


圖 15

由於二者皆可完全覆蓋，且覆蓋完後對於剩餘未做 Z 型變換的走道蓋法皆相同，所以如果 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 則得出之小 △ 邊長最小值也會相同。

(圖 14) $\overline{AB}=2x+[(n+1)x-1]=(n+3)x-1$，(圖15) $\overline{FH}=x+(1-nx)=\overline{GH}+\overline{GF}$，

又因 $\overline{GH}=x$ 且 $\triangle EFG$ 為正 △，故 $\overline{GF}=\overline{EF}=(1-nx)$。
可得 $\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{ED}-\overline{EF}=3x-(1-nx)=(3+n)x-1=\overline{AB}$，$A$, B 蓋法等價。

(圖 15)中發現最右邊覆蓋的小 △ 也有一個類似於(圖 16) $\overline{EF}$ 線段的重疊部分 $\overline{MN}$。

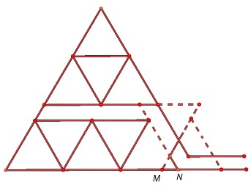


圖 16

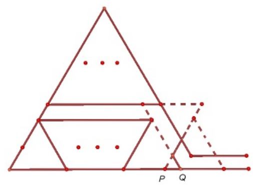


圖 17

經由計算也可得 $\overline{MN}=(1-nx)$。
接著我們發現不論如何做 1 次的 Z 型變換，最後所要考慮的皆是如(圖 17)中的 $\overline{PQ}$ 線段，經由計算亦可得 $\overline{PQ}$, $\overline{MN}$ 均為 $(1-nx)$，也就是說 Z 型變換跟原本直線走道所需用來蓋的小 △ 數目相同，則邊長亦相同。
由於走道蓋法中走道的改變皆可經由一次或多次的 Z 型變換而來，因此由 Z 型變換之結論可知，使用走道蓋法不論走道如何改變，小 △ 邊長皆相等。其中，在某些 case n 的情形，走道會使小 △ 覆蓋超出大 △，因找到了反例(承 2.1.4)，所以可知並非所有的情況，走道蓋法算出的小 △ 邊長皆為最小值。走道蓋法只有在小三角形覆蓋不超過大三角形的條件下為最佳蓋法。

2.5 凸出蓋法

2.5.1 定義：

凸出蓋法以大 $\triangle ABC$ 的三個角為起點往內逼近做小 △，且皆無浪費面積(彼此不重疊)，直到三邊皆無法繼續以此方式做小 △ $(1-2mx<x\{m\in\mathbb{N}\})$。如(圖 18)，假設總數為 n^2+q $(0\le q<2n+1)$，其中 $\triangle BHI$, $\triangle GAL$, $\triangle KJC$ 皆為 m^2 個小 △ 以最佳蓋法(彼此不重疊)覆蓋。由 $\overline{GL}$, $\overline{HI}$, $\overline{JK}$ 向外延伸交於三點 D, E, F 可知 $\triangle DEF$ 為可蓋住 $GHIJKL$ 的最小 △，我們在凸出蓋法中定義其為中 △。凸出蓋法所需覆蓋之範圍為中 △ $+\,3m^2$，由以上可知凸出蓋法需是對稱的(中 △ 需覆蓋三邊中點)，且 $n=2m$。
以下討論當 n 為偶數時均使用凸出蓋法進行覆蓋。

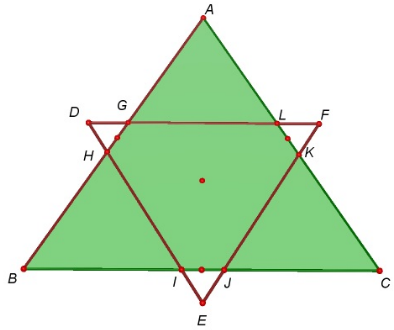


圖 18

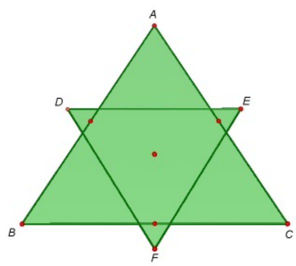
2.5.2 定義層數：

因為 case n 為偶數時使用凸出蓋法進行覆蓋，因此將 case n 表示為 $2^i(2k-1)$ 的形式，以便於使用凸出蓋法。不斷的使用凸出蓋法直到中 △ 的 case n 為奇數為止，其中凸出蓋法有可能不只使用一次，因而會產生許多的中 △，為了方便描述，定義每使用一次凸出蓋法形成一個中 △，稱為一層。定義使用第一次凸出蓋法形成的中三角形為第一層，依此類推，由外往內增加層數。每一層由外往內為 case n_0，n_1，$n_2 \cdots$。

2.5.3 走道係數：

由於之前的走道公式是以大 △ (邊長為 1 的正三角形)推得，無法適用於中 △，而利用相似形的概念即可推得中 △ 使用走道蓋法之公式。假設總數為 n^2+q、最底層 $\overline{DE}$ 之邊長為 $a'y$、使用走道蓋法覆蓋大 △(邊長為 1)，可得之小 △ 邊長最小值為 x、使用走道蓋法覆蓋中 △(邊長小於 1) 時，可得之小 △ 邊長為 y。則由比例性質可得：

$$1 : a'y = x : y \;\Rightarrow\; a' = \frac{1}{x}.$$



套入 2.4.1 與 2.4.2 的走道公式可得：

$$q \text{ 為偶數時：} a' = \frac{nq+2q}{q+2} \qquad q \text{ 為奇數時：} a' = \frac{nq+2q-n}{q+1}\text{。}$$

2.5.4 使用總數 $n^2+q=S$ 個小 △ 覆蓋大 △ 時 $(0<q<2n+1)$ 的演算法

可使用以下演算法運算小 △ 的邊長值。

1°. 給定總數為 S，若 S 的 case n 為奇數則使用走道蓋法，若為偶數則使用凸出蓋法並進行第二步。

2°. 令 N^2 為小於 $\frac{s}{4}$ 的最大平方數。則剩餘欲覆蓋中 △ 的小 △ 個數為 $S-3N^2=K$，再

將 K 代回第一步的 S。不斷重複進行此兩步驟，算至 K 為奇數時，使用走道蓋法覆蓋中 $\triangle$ 後停止，再將計算之邊長依相似形的概念 (2.6.4) 套入走道公式進行計算，即可求出小 $\triangle$ 邊長。

2.6 小三角形邊長最小值一般式

2.6.1 變形

定義. 假設總數為 $n_0^2+q_0$，以凸出蓋法覆蓋，若在第 j 層時，$2n_j+1\le q_0\le 4n_j$，即 $n_j^2+2n_j+1\le$ 中三角形個數 $\le n_j^2+4n_j$，此時中三角形為 *case* n_{j+1}。另定義 M 為發生變形的次數，j 為發生變形之層數。這種中斷以 *2* 的冪次延續的凸出蓋法，稱為變形。

假設第 j 層發生變形，$2n_j+1\le q_0\le 4n_j$，則剩餘中三角形個數為

$$n_0^2+q_0-3n_1^2-3n_2^2-\cdots-3n_j^2=n_j^2+q_0.$$

又 $2n_j+1\le q_0\le 4n_j$

$$\Rightarrow\ n_j^2+2n_j+1\le n_0^2+q_0-3n_1^2-3n_2^2-\cdots-3n_j^2\le n_j^2+4n_j,$$

其中 $n_0=2n_1=2^2n_2=\cdots=2^nn_n$.

$$\Rightarrow\ n_j^2+2n_j+1\le n_0^2+q_0-3n_0^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]\le n_j^2+4n_j.$$

經整理後可得 $2^{1-j}n_0+1\le q_0\le 2^{2-j}n_0$ 一關係式，代入已知 n_0、q_0 即可得 j。

經過觀察後發現，下一次變形的產生與否，與變形發生的層數有關，將 case n 表示為 $2^i(2k-1)$，則最多共可分 i 層，且最底層之 case n 為 $(2k-1)$ 是奇數。

Case 1. 若變形發生在 j 層且 $j\ne i$ 時，則因為變形前的 case$[n_j=2^{i-j}(2k-1)]$ 為偶數，所以變形後的 case n_j 為偶數+1 是奇數，因此無法繼續使用走道蓋法，亦沒有下一次變形。

Case 2. 若變形發生在 $j=i$ 時，則中三角形為 case$[n_j=2^{i-i}(2k-1)=2k-1]$，變形後的 case n_j 為奇數+1 為偶數，則可以繼續使用凸出蓋法，且有可能產生下一次的變形。

2.6.2 $\{i\}$、$\{p\}$ 序列

為了方便計算，大三角形 case$[n=2^i(2k-1)]$，將其簡化為 $2^i(2k-1)=2^i\times p$ (p 為奇數部分)。由 (2.2) 可知只要每次變形皆發生於最底層 ($j=i$) 時，有發生多次變形的情形，以下以可變形 n 次之情形做討論。

令 case$[n_0=2^{i_0}p_0]$，則第一次變形後的 case$[j_1=i_0]$ 為 p_0+1，因為 case$[p_0+1]$ 為偶數，於是將之表示為 $2^{i_1}p_1$，則第二次變形後的 case$[j_2=i_1]$ 為 p_1+1，可將其表示為 $2^{i_2}p_2$。依此類推，令 $p_0+1=2^{i_1}p_1$、$p_1+1=2^{i_2}p_2\cdots p_{M-1}+1=2^{i_M}p_M$ 且 $p_{M-2}>p_{M-1}=p_M=1$，形成 $\{i\}$、$\{p\}$ 序列。

2.6.3 $\{q\}$ 序列

承 (3.2) 第一次變形後，此時中三角形剩餘的小三角形個數為 $n_j^2+q_0=p_0^2+q_0$，而中三角形為 case$[(p_0+1)=2^{i_1}p_1]$，於是將剩餘總個數表示為 $p_0^2+q_0=(p_0+1)^2+q_0$，$q_0\in\{2p_0+1\le q_0\le 4p_0\}$。由 $q_1=q_0-2p_0-1$，可得 q_1 範圍 $0\le q_1\le 2p_0-1$，依此類推產生一 q 序列。可再由 q_0 和 p 序列推得 q_M 之範圍：

$$q_M=q_0-2(p_0+1)-2(p_1+1)-\cdots-2(p_M+1)=q_0-2^{i_1+1}p_1-2^{i_2+1}p_2-\cdots-2^{i_M+1}p_M.$$

又 $2p_0+1\le q_0\le 4p_0$，得 q_M 之範圍：$0\le q_M\le 4p_0-2^{i_1+1}p_1-2^{i_2+1}p_2-\cdots-2^{i_M+1}p_M$。注意到 $\{i\}$、$\{p\}$、$\{q\}$ 序列皆為已知，可由 n_0、q_0 推得。

2.6.4 由 n_0、q_0 計算出變形次數 M、最後一次變形之層數 j_M

(1.) 第 M 次變形時 j_M 之關係式
在算 M 次之前，先來討論第 2 次變形之情形。
由於每一層之計算方法皆相同，改變的只有 case n。
case$[n_0 = 2^{i_0}p_0]$，而每一次變形後的 case n 皆表示為 2^ip 的形式，所以將 (1) 之關係式改寫為 $2^{i_0-j_1+1} \times p_0 + 1 \leq q_0 \leq 2^{i_0-j_1+2} \times p_0$。
則第二次變形之計算只需將 case$[n_0 = 2^{i_0}p_0]$ 改為 case$[p_1 + 1]$ 為 $2^{i_1}p_1$ 即可。
得到：$2^{i_1-j_2+1} \times p_1 + 1 \leq q_1 \leq 2^{i_1-j_2+2} \times p_1$ 一關係式。
可進一步推得 j_M 之關係式：

$$2^{i_{M-1}-j_M+1} \times p_{M-1} + 1 \leq q_{M-1} \leq 2^{i_{M-1}-j_M+2} \times p_{M-1}.$$

(2.) 總個數為 $n_0^2 + q_0$，利用其可形成之 i、p、q 序列判別變形次數
由 (2.2) 可知，要有機會產生第 2 次變形，必須 $j_1 = i_0$，又由 (2.6.1) 可知要有機會產生第 M 次變形，必須 $j_{n-1} = i_{n-2}$，其中 j 取決於 q，即第 $M-1$ 次變形時，q_{M-2} 的範圍 $2^{i_{M-2}-j_{M-1}+1} \times p_{M-2} + 1 \leq q_{M-2} \leq 2^{i_{M-2}-j_{M-1}+2} \times p_{M-2}$ 需滿足 $j_{M-1} = i_{M-2}$， 即 q_{n-2} 需滿足 $2^1 \times p_{M-2} + 1 \leq q_{M-2} \leq 2^2 \times p_{M-2}$。

所以若至少有 M 次變形，則必須滿足 $j_1 = i_0$、$j_2 = i_2$、$\cdots$、$j_M = i_{M-1}$。
此時 q_1、q_2、$\cdots$、q_{M-1} 滿足 $2^1 \times p_1 + 1 \leq q_1 \leq 2^2 \times p_1$、$2^1 \times p_2 + 1 \leq q_2 \leq 2^2 \times p_2$、$\cdots$、$2^1 \times p_{M-1} + 1 \leq q_{M-1} \leq 2^2 \times p_{M-1}$。反之，若 $q_{M-1} \in \{2^1 \times p_{M-1} + 1 \leq q_{M-1} \leq 2^2 \times p_{M-1}\}$，但 $q_M \notin \{2^1 \times p_M + 1 \leq q_M \leq 2^2 \times p_M\}$，則至少有 M 次變形。

將已知 i、p、q 序列代入檢驗，直到 $j_{M+1} \neq i_M$，即 $q_M \notin \{2^1 \times p_M + 1 \leq q_M \leq 2^2 \times p_M\}$ 時停止。由以上之方法即可較簡便的計算出變形次數為 M 或 $M+1$ 次。
接下來再利用 $2^{i_M-j_{M+1}+1} \times p_M + 1 \leq q_M \leq 2^{i_M-j_{M+1}+2} \times p_M$ 之關係式計算出 j_{M+1}。

(i) 若 $0 \leq j_{M+1} < 1$，j_{M+1} 不存在，共有 M 次變形。
(i) 若 $1 \leq j_{M+1} < i_{M+1}$，j_{M+1} 存在，共有 $M+1$ 次變形且最後一次變形發生在 j_{M+1} 層。

2.6.5 變形邊長之推法

(1.) 定義：
M：總共可變形之次數
a'：走道係數(使用走道蓋法覆蓋的三角形邊長)
$b_{m,R}$：最底層往外推第 $m-1$ 次變形時(最底層不算)向外第 R 層的中三角形邊長。
$a_{m,R}$：第 R 層中三角形旁之三塊三角形的 case n。
(2.) 舉例：總共變形三次之算法
(i) b **之關係**

$$b_{1,1}:\ 2(b_{1,1} - 2a_{1,1}) + a_{1,1} = a' \ \Rightarrow\ b_{1,1} = \frac{a' - a_{1,1}}{2} + 2a_{1,1}$$

$$b_{1,2}:\ 2(b_{1,2} - 2a_{1,2}) + a_{1,2} = a' \ \Rightarrow\ b_{1,2} = \frac{a' - a_{1,2}}{2} + 2a_{1,2}$$

$$\vdots$$

$$b_{1,i_3}:\ b_{1,i_3} = \frac{a' - a_{1,i_3-1}}{2} + 2a_{1,i_3-1}$$

亦可知 $b_{2,1} = \dfrac{b_{1,i_3} + 3a_{2,1}}{2}$、$b_{2,2} = \dfrac{b_{2,1} + 3a_{2,2}}{2}$ $\cdots$ 可得 $b_{3,i_0} = \dfrac{b_{3,i_0} + 3a_{3,i_0}}{2}$。
(ii) a **之關係**

$$\frac{(a_{2,1}+1)^2}{4} = (a_{1,i_3})^2 \ \Rightarrow\ a_{2,1} = 2a_{1,i_3} - 1\text{，同理，}a_{3,1} = 2a_{2,i_1} - 1\text{。}$$

(iii) 計算

$1 = b_{3,i_0}$，由 (1) 可知，

$$b_{3,i_0} = \frac{b_{3,i_0-1} + 3a_{3,i_0}}{2} = \frac{b_{3,i_0-2} + 3(a_{3,i_0-1} + 2a_{3,i_0})}{2^2} = \cdots = \frac{b_{2,i_1} + 3(a_{3,1} + 2a_{3,2} + \cdots + 2^{i_0-1}a_{3,i_0})}{2^{i_0}}.$$

為了簡化式子，令 $a_{3,1} + 2a_{3,2} + \cdots + 2^{i_0-1}a_{3,i_0} = A_1$

則原式

$$= \frac{b_{2,i_1} + A_1}{2^{i_0}} = \frac{b_{2,i_1-1} + 3(2A_1 + a_{2,i_1})}{2^{i_0+1}} = \cdots = \frac{b_{2,1} + 3(a_{2,2} + 2a_{2,3} + \cdots + 2^{i_1-2}a_{2,i_1} + 2^{i_1-1}A_1)}{2^{i_0+i_1-1}}$$

$$= \frac{b_{2,i_2} + 3(a_{2,1} + 2a_{2,2} + \cdots + 2^{i_1-2}a_{2,i_1} + 2^{i_1}A_1)}{2^{i_0+i_1}},$$

令 $a_{2,1} + 2a_{2,2} + \cdots + 2^{i_1-2}a_{2,i_1} = A_2$

則原式 $= \dfrac{b_{2,i_2} + 3(A_2 + 2^{i_1}A_1)}{2^{i_0+i_1}}$，同理可得

$$\frac{b_{2,i_2} + 3(A_3 + 2^{i_1}A_1)}{2^{i_0+i_1}} = \frac{b_{1,1} + 3(a_{1,2} + 2a_{1,3} + \cdots + 2^{i_2-2}a_{1,i_2} + 2^{i_2-1}A_2 + 2^{i_1+i_2-1}A_1)}{2^{i_0+i_1+i_2-1}}$$

$$= \frac{a' + 3(a_{1,1} + 2a_{1,2} + \cdots + 2^{i_2}a_{1,i_2} + 2^{i_2}A_2 + 2^{i_1+i_2}A_1)}{2^{i_0+i_1+i_2}}.$$

2.6.6 推 M 次變形時的邊長公式

(1.) 第 M 次變形發生在第 j 層且 $0 < j_M < i_{M-1}$ 的情形

由 3 次變形時的計算可得 M 次變形時，

$$b_{M,i_0} = \frac{2^{i_0+i_1+\cdots+i_M-1}}{a' + 3(2^{i_1+i_2+\cdots+i_M-1}A_1 + 2^{i_2+\cdots+i_M-1}A_2 + \cdots + 2^{i_M-1}A_{M-1} + A_M)},$$

其中 $A_1 = a_{M,1} + 2a_{M,2} + \cdots + 2^{i-1}a_{M,i}$

又 $a_{M,2} = 2a_{M,1}$、$a_{M,3} = 2a_{M,2} = 2^2a_{M,1}$、$\cdots$、$a_{M,i_0} = 2^{i_0-1}a_{M,1}$

所以 $A_1 = a_{M,1} + 2^2a_{M,1} + \cdots + 2^{2(i_0-1)}a_{M,1} = a_{M,1} \times \left(\dfrac{2^{2i_0} - 1}{3}\right)$

同理 $A_2 = a_{M-1,1} \times \left(\dfrac{2^{2i_1} - 1}{3}\right)$、$\cdots$、$A_M = a_{1,1} \times \left(\dfrac{2^{2i_{M-1}} - 1}{3}\right)$。

將轉換後的 A_1、A_2、$\cdots$、A_M 重新代回 b_{M,i_0} 之計算中，經過整理後，可得到一般式。

一般式：$\dfrac{s}{v}$，其中

$$s = 2^{i_0+i_1+\cdots+i_{M-1}}$$
$$v = a' + \left[2^{2(i_0+i_1+\cdots+i_{M-1})} - 1\right](a' - 1) + \left(2^{i_1+i_2+\cdots+i_{M-1}} + 2^{i_2+i_3+\cdots+i_{M-1}} + \cdots + 2^{i_{M-1}}\right)$$
$$- \left[2^{2(i_0+i_1+\cdots+i_{M-2})+i_{M-1}} + 2^{(i_0+i_1+\cdots+i_{M-3})+i_{M-2}+i_{M-1}} + 2^{2i_0+i_1+\cdots+i_{M-1}}\right]$$

即小三角形邊長之計算公式，將已知 i、p、q 序列及 a' 代入即可求出小三角形邊長。

(2.) 第 M 次變形發生在第 j 層且 $j_M = i_{M-1}$ 的情形

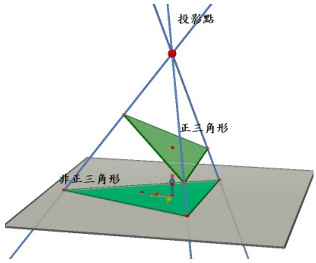
與 (1.) 做比較可知此種情形因為最後一次變形不發生在最底層，所以應假設 m 而非 $m-1$，若要用原來之假設 $m-1$，則在計算上應多出一層，應為 $b_{M+1,i_0} = 1$。然而計算方法相同，只需在 (1) 之計算中多加入一層 b_{M+1} 做計算即可。

依據 (1.) 之方法計算可得；一般式：$\dfrac{t}{z}$，其中 $t = 2^{i_0+i_1+\cdots+i_M}$

$$z = a' + \left[2^{2(i_0+i_1+\cdots+i_M)} - 1\right](a' - 1) + (2^{i_1+i_2+\cdots+i_M} + 2^{i_2+i_3+\cdots+i_M} + \cdots + 2^{i_M})$$
$$- \left[2^{2(i_0+i_1+\cdots+i_{M-1})+i_M} + 2^{2(i_0+i_1+\cdots+i_{M-1})+i_{M-1}+i_M} + 2^{(i_0+i_1+\cdots+i_{M-2})+i_{M-2}+i_{M-1}+i_M} + 2^{2i_0+i_1+\cdots+i_M}\right]$$

2.7 相似三角形之覆蓋

由正三角形之覆蓋，利用投影的效果，即可產生任意相似形之覆蓋情形。
如圖：



3 研究結果

1. 使用總數為 n^2+q 個的小 △，利用走道蓋法覆蓋大 △ 時的邊長最小值 $(0 \le q < 2n+1)$
   使用走道蓋法覆蓋所得之邊長最小值依其奇偶性質分類：
   (3.1.1) q 為奇數時，$\dfrac{q+1}{nq+2q-n} \le x$。
   (3.1.2) q 為偶數時，$\dfrac{q+2}{nq+2q} \le x$ ($q=0$ 時，$\dfrac{1}{n} \le x$)。
2. 使用總數 $n^2+q=S$ $(0<q<2n+1)$ 個小 △ 覆蓋大 △ 時，運算小 △ 邊長之演算法(cf. 2.5.4)。
3. 給定總數為 $n_0^2+q_0$ 的小三角形個數，在凸出蓋法中，求出其變形次數 M 以及第 M 次變形的層數 j_M。(2.6.4)
4. 給定任意個數小 △ 覆蓋的邊長一般式(cf. 2.6.6)。
5. 相似三角形的覆蓋
   由投影法證明非正三角形的覆蓋與正三角形同(大 △ 與小 △ 需為相似形)(cf. 2.7)。

4 結論

(在只使用平行或是旋轉 180° 之小三角形做覆蓋的條件下)

1. 在小 △ 覆蓋不超出大 △ 的範圍時，走道蓋法為最佳蓋法。
2. 演算法和一般式為較有效益之覆蓋方式。
3. 任意三角形皆可使用凸出與走道覆蓋方法(大 △ 與小 △ 為相似形)
4. 期望未來能解決立體圖形的最佳覆蓋問題

參考文獻

[1] 初中數學競賽教程, 九章出版社.

[2] 典雅的幾何, 天下文化.

[3] Triangles of extremal area or perimeter in a finite planar point set. `http://edocs.fu-berlin.de/docs/servlets/MCRFileNodeServlet/FUDOCS_derivate_000000000771/2000_06.pdf?hosts=local`