n 倍角整數邊三角形與圓內接四邊形之探討

國立宜蘭高級中學 郭家愷
指導老師 戴武郎

Abstract

A triangle ABC is called a triangle with double angle, if $\angle B = 2\angle A$. Similarly, a cyclic quadrilateral $ABCD$ is called a cyclic quadrilateral with double angle if $\angle B = 2\angle A$. In this research, we give an algorithm that generates triangles with double angles and cyclic quadrilateral with double angles whose sides are integers. Moreover, we generalize the algorithm to quadrilateral with n^{th} Times Angles.

中文摘要

在一般三角形中，如果滿足其一角為另一角兩倍，我們稱之為 2 倍角三角形。我們研究由此類型之三角形出發，探討其整數邊長製造機與 Heron 製造機，並以兩種方向發展：首先，我們試以倍角三角形之幾何關係，將 2 倍角三角形結論推廣到 n 倍角三角形；另外，我們定義在圓內接四邊形中，若相鄰的兩角，其中一角為另一角兩倍，則為 2 倍角圓內接四邊形，我們同樣探討其整數邊長製造機，Heron 製造機，也將其結論推廣到 n 倍角圓內接四邊形。而此篇文章目的在於推廣倍角三角形，並在倍角圓內接四邊形中繼續延伸。

1 簡介

1.1 研究動機

直角三角形能藉由畢氏定理而得到整數邊的邊長製造機。在 2 倍角三角形中，我們可以發現 2 倍角三角形擁有與畢氏定理對應的 2 倍角充要條件 $a^2 + ac = b^2$。然而對 2 倍角三角形製造機已有完整的討論，因此我們嘗試將 2 倍角三角形推廣為 2 倍角圓內接四邊形，並發現 $ab + b^2 + cd = d^2$ 類似的形式，2 倍角圓內接四邊形得邊長製造機是否存在？與 2 倍角三角形之間的關係為何？這引發我們的興趣，於是進行此研究。

1.2 研究目的

一、 研發 2 倍角整數邊三角形製造機與 2 倍角 Heron 三角形製造機。

二、 研發 n 倍角整數邊三角形製造機與 n 倍角 Heron 三角形製造機。

三、 研發 2 倍角整數邊圓內接四邊形製造機與 2 倍角 Heron 圓內接四邊形製造機。

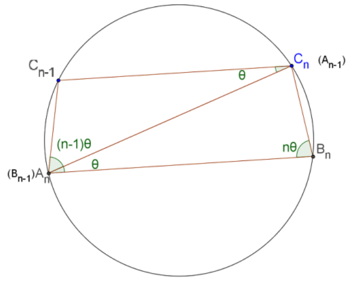
四、 研發 n 倍角整數邊圓內接四邊形製造機與 n 倍角 Heron 圓內接四邊形製造機。

1.3 研究結果

以下為我們主要的研究結果：
定理 1. 令 $\triangle ABC$ 為一 2 倍角三角形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則充要條件為 $a^2 + ac = b^2$。
定理 2. 令 $\triangle ABC$ 為一 2 倍角三角形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則 a, b, c 為整數且 $(a,b,c) = 1$，充要條件為存在唯一 $m, n \in \mathbb{N}, n > m, (m,n) = 1$ 使得

$$\begin{cases} a = n^2; \\ b = mn + n^2; \\ c = m^2 + 2mn. \end{cases}$$

定理 3. 內接於同一圓的三角形序列 $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$, ..., $\triangle A_nB_nC_n$, ..., 在 $\triangle A_nB_nC_n$中，如下圖。設 $\angle A_n$, $\angle B_n$, $\angle C_n$ 的對邊為 a_n, b_n, c_n，且 $\angle A_n = \theta$, $\angle B_n = n\theta$。則 $a_n = a_{n-1}$, $b_n = c_{n-1}$, $c_n = \dfrac{c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{b_{n-1}}(n \geq 3)$ 關係式恆成立。



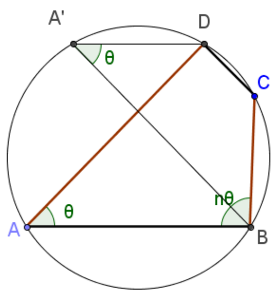
定理 4. 令 $\square ABCD$ 為一 2 倍角圓內接四邊形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則充分條件為 $ab + b^2 + cd = d^2$。

定理 5. 令 $\square ABCD$ 為一 2 倍角圓內接四邊形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則 a, b, c, d 為整數之充分條件為存在 $p, q, m, n \in \mathbb{N}$, $p < q$, $2m > n$ 使得

$$\frac{a}{qn - pm} = \frac{b}{pm} = \frac{c}{qm - pn} = \frac{d}{qm}.$$

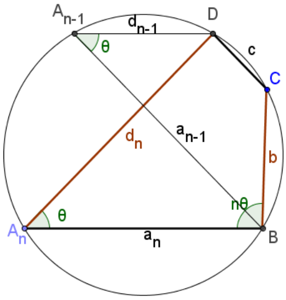
定理 6. 如圖示，若 $\angle ABC = n\angle A$, $\angle A'BC = (n-1)\angle A'$, 其中 $n \geq 3$，則

$$\overline{A'D}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{BC}\cdot\overline{CD}\right) + \overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{CD}\cdot\overline{AD}\right) + \overline{AD}\left(\overline{BC}^2 - \overline{AD}^2\right) = 0$$



定理 7. 考慮內接於同一圓的四邊形形序列 $\square A_2BCD$, $\square A_3BCD$, ..., $\square A_nBCD$, ..., 在 $\square A_nBCD$ 中, 設 $a_n = \overline{A_nB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d_n = \overline{DA_n}$, 且 $\angle A_n = \theta$, $\angle A_nBC = n\theta$。令 $\square A_nBCD$ 為上述內接於同一圓的四邊形形序列，則

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}\left(a_{n-1}^2 - c^2\right) - b\left(a_{n-1}b + cd_{n-1}\right)}{a_{n-1}d_{n-1} + bc}, n \geq 3 \\ d_n = a_{n-1} \end{cases}$$



2 研究內容

2.1 名詞定義

1. n 倍角三角形：滿足其中一內角為另一內角 n 倍之三角形。
2. n 倍角整數邊三角形：三邊長皆為正整數之 n 倍角三角形。
3. n 倍角 Heron 三角形：三邊長及面積皆為正整數之 n 倍角三角形。
4. n 倍角圓內接四邊形：滿足其中兩相鄰內角,一角為另一角 n 倍之圓內接四邊形。
5. n 倍角整數邊圓內接四邊形：四邊長皆為正整數之 n 倍角圓內接四邊形。
6. n 倍角 Heron 圓內接四邊形：四邊長及面積皆為正整數之 n 倍角圓內接四邊形。

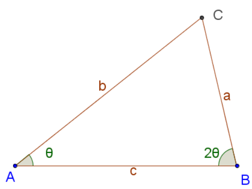
2.2 n 倍角整數邊三角形

2.2.1 2 倍角整數邊三角形

在以下的討論，$\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊分別為 a, b, c, 其外接圓半徑為 R。

定理 1. 令 $\triangle ABC$ 為一 2 倍角三角形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則充要條件為 $a^2 + ac = b^2$。

證明. 先證明此為充分條件，如圖示，



$$
\begin{aligned}
\text{根據正弦定理可知 } a &= 2R \cdot \sin\theta, \\
b &= 2R \cdot \sin 2\theta = 4R \cdot \sin\theta\cos\theta, \\
c &= 2R \cdot \sin(180^\circ - 3\theta) = 2R \cdot \sin 3\theta = 2R \cdot (3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \\
\text{則} \qquad \frac{b}{2a} &= \frac{4R \cdot \sin\theta\cos\theta}{4R \cdot \sin\theta} = \cos\theta \\
\frac{a+c}{2b} &= \frac{2R \cdot \sin\theta + 2R \cdot (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)}{8R \cdot \sin\theta\cos\theta} = \frac{8R \cdot \sin\theta - 8R \cdot \sin^3\theta}{8R \cdot \sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{8R \cdot \sin\theta(1 - \sin^2\theta)}{8R \cdot \sin\theta\cos\theta} = \cos\theta
\end{aligned}
$$

所以 $\dfrac{b}{2a}=\dfrac{a+c}{2b}$，即 $a^2+ac=b^2$。

再證明此為必要條件，由 $a^2+ac=b^2$，得 $c=\dfrac{b^2-a^2}{a}$

$$
\text{則}\quad \begin{aligned}
&\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2b^2+(b^2-a^2)^2-a^4}{2ab(b^2-a^2)}=\frac{b^4-a^2b^2}{2ab(b^2-a^2)}=\frac{b}{2a}=\frac{\sin B}{2\sin A}\\
&2\sin A\cos A=\sin 2A=\sin B
\end{aligned}
$$

所以 $\angle B=2\angle A$。 □

利用定理 1，我們得到以下 2 倍角整數邊三角形製造機。

定理 2. 令 $\triangle ABC$ 為一 2 倍角三角形，其中 $\angle B=2\angle A$。則 $a,\ b,\ c$ 為整數且 $(a,b,c)=1$，充要條件為存在唯一 $m,\ n\in\mathbb{N},\ n>m,\ (m,n)=1$ 使得

$$
\begin{cases}
a=n^2\\
b=mn+n^2\\
c=m^2+2mn
\end{cases}
$$

證明. 先證明此為充分條件，由 $a^2+ac=b^2$，可得 $\dfrac{c}{b+a}=\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{m}{n}$，其中 $(m,n)=1$，

$$
\text{則}\quad \begin{cases}
ma+mb-nc=0\\
(m+n)a-nb=0
\end{cases}
$$

$$
a:b:c=\begin{vmatrix} m & -n\\ -n & 0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -n & m\\ 0 & m+n\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} m & m\\ m+n & -n\end{vmatrix}=n^2:mn+n^2:m^2+2mn
$$

因為 $(m,n)=1$，則 $(n^2,mn+n^2,m^2+2mn)=1$
所以 $a=n^2,\ b=mn+n^2,\ c=m^2+2mn$
又因為必須滿足 $\cos\theta=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{n^2+mn}{2n^2}<1$，所以 $m<n$。
現在假設 $a=n^2=n_1^2,\ b=mn+n^2=m_1n_1+n_1^2,\ c=m^2+2mn=m_1^2+2m_1n_1$
則由 a 得知 $n=n_1$，代入 b 中，得 $m=m_1$。
所以可知 $a,\ b,\ c$ 與 $m,\ n$ 之間一對一對應。
再證明此為必要條件，若 $a=n^2,\ b=mn+n^2,\ c=m^2+2mn$，其中 $n>m,\ (m,n)=1$

$$
\text{因為}\quad \begin{aligned}
&a+b-c=(n^2)+(mn+n^2)-(m^2+2mn)=2n^2-m^2-mn=(n^2-m^2)+(n^2-mn)>0\\
&a+c-b=(n^2)+(m^2+2mn)-(mn+n^2)=m^2+mn>0
\end{aligned}
$$

所以 $a,\ b,\ c$ 為三角形三邊。又 $a^2+ac=(n^2)^2+(n^2)(m^2+2mn)=m^2n^2+2mn^3+n^4=(mn+n^2)^2=b^2$，故由定理 1 可知 $\angle B=2\angle A$。
另一方面，設存在一質數 p 使得 $p|a,\ p|b,\ p|c$
由 $p|a=n^2$，則 $p|n$。另外由 $p|a$ 且 $p|b$，則 $p|m^2$，則 $p|m$，與 $(m,n)=1$ 矛盾，
因此 $(a,b,c)=1$。 □

此外我們可以發現，如果將過程中比值取為

$$
\frac{a}{b}=\frac{b}{a+c}=\frac{m}{n}\text{，則 } a=m^2,\ b=mn,\ c=m^2-n^2
$$

$$
\frac{a}{b+a}=\frac{b-a}{c}=\frac{m}{n}\text{，則 } a=m^2,\ b=mn-m^2,\ c=n^2-2mn
$$

因此 2 倍角整數邊三角形製造機並不唯一，不過彼此能透過代數變換轉換。

2.2.2 2 倍角 n 三角形製造機

底下我們再來討論倍角三角形的面積

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}bc\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}(mn+n^2)(m^2+2mn)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m+n}{2n}\right)^2}\\ &= \frac{m(m+n)(m+2n)}{4}\cdot\sqrt{-m^2-2mn+3n^2}\end{aligned}$$

因為 $-m^2-2mn+3n^2=(2n)^2-(m+n)^2$

令 $D=\sqrt{F^2-E^2}$，其中 $E=m+n,\ F=2n$，則 $D^2+E^2=F^2$

此外，設 2 不同時整除 D 與 E，則 $(D^2+E^2)\pmod 4\equiv 1$ or 2，與 $D^2+E^2=F^2=4n^2$ 矛盾，於是可知 D 與 E 同為偶數。

$$\begin{aligned}\text{因此 } \triangle ABC \text{ 的面積} &= \frac{m(m+n)(m+2n)}{4}\cdot\sqrt{-m^2-2mn+3n^2}\\ &= \frac{m(m+2n)}{4}\cdot D\cdot E = k\text{，其中 } k\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

推論 1. 當 $D,\ E,\ F$ 為畢氏三元數時，因為斜邊 F 為偶數，則 $E(=m+n)$ 亦為偶數，那麼由 $(m,n)=\left(\frac{2E-F}{2},\frac{F}{2}\right)$ 代入製造機，得到的三角形即為 *2* 倍角 *Heron* 三角形.

2.2.3 2 倍角三角形頂點的軌跡

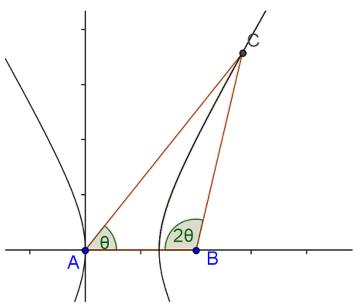
底下我們來討論 2 倍角三角形頂點 C 的軌跡。

推論 2. 若 $A(0,0),\ B(c,0),\ C(x,y)$ 為 *2* 倍角三角形 $\triangle ABC$ 的頂點，則 $3x^2-2cx-y^2=0$。即 C 點的軌跡為雙曲線。

證明. 由 $a=sqrt(x-c)^2+y^2,\ b=\sqrt{x^2+y^2}$, 代入 $a^2+ac=b^2$

得 $3x^2-2cx-y^2=0$，則 $3\left(x-\frac{c}{3}\right)^2-y^2=\frac{c^2}{3}$

為一中心點為 $\left(\frac{c}{3},0\right)$ 之雙曲線. □



底下，我們對當 $c=1$ 時，$C(x,y)$ 所對應之 2 倍角有理邊三角形進行討論。

推論 3. 若 $\triangle ABC$ 的頂點座標為 $A(0,0),\ B(1,0),\ C(x,y)$，則 $\triangle ABC$ 為有理邊*2* 倍角有理邊三角形 $(\angle B=2\angle A)$ 的充要條件為 $x=\dfrac{2m^2}{4m^2-n^2}$，其中 $(m,n)=1$。

證明. 先證明其為充分條件，如圖示，不失一般性可設 $C(x,y)$ 在第一象限內

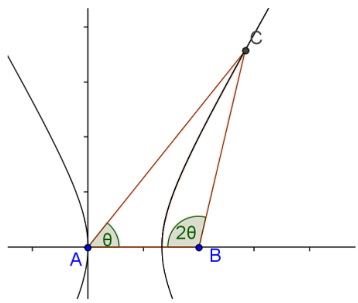
$$\text{則}\qquad \cos A = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3x^2-2x}} = \frac{x}{\sqrt{4x^2-2x}}$$

$$\overline{AC} = \frac{x}{\cos A} = \sqrt{4x^2-2x} = \sqrt{4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(4x-1)^2-1}$$

$$\overline{BC} = \frac{|x-1|}{\cos B} = \frac{|x-1|}{2\cos^2 A-1} = \frac{(2x^2-x)|x-1|}{x-x^2} = |2x-1|$$

令 $\frac{1}{2}\sqrt{(4x-1)^2-1} = k$，則 $(4x-1)^2-1 = 4k^2$，得 $x(4x-2) = k^2$
又 $\overline{AC}, \overline{BC} \in \mathbb{Q}$，等價於 $x, k \in \mathbb{Q}$，等價於 $(4x-1)^2-4k^2 = 1$ 上之有理點

因此令 $\frac{x}{k} = \frac{k}{|4x-2|} = \frac{m}{n}$, $(m,n) = 1$，則 $\begin{cases} nx-mk=0 \\ 4mx-nk=2m \end{cases}$, $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -m \\ 2m & -n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & -m \\ 4m & -n \end{vmatrix}} = \dfrac{2m^2}{4m^2-n^2}$



再證明其為必要條件，若 $x = \dfrac{2m^2}{4m^2-n^2}$，

$$\begin{aligned}
\text{則 } \cos A &= \frac{x}{\sqrt{4x^2-2x}} = \frac{2m^2}{2mn} = \frac{m}{n} \\
\cos B &= \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+3x^2-2x}} = \frac{1-x}{|2x-1|} \\
&= \frac{2m^2-n^2}{4m^2-n^2}\Big/\left|\frac{n^2}{4m^2-n^2}\right| = \frac{2m^2-n^2}{4m^2-n^2}\Big/\frac{n^2}{4m^2-n^2} = \frac{2m^2-n^2}{n^2}
\end{aligned}$$ [1]

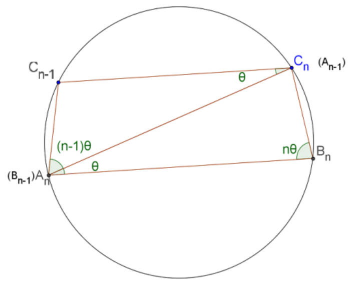
因為 $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{2m^2-n^2}{n^2} = \cos B$，所以 $\angle B = 2\angle A$

則 $\overline{AC} = \dfrac{x}{\cos A} = \dfrac{2mn}{4m^2-n^2}$, $\overline{BC} = \dfrac{1-x}{\cos B} = \dfrac{n^2}{4m^2-n^2}$
因為 $(m,n) = 1$，所以 $\overline{AC}, \overline{BC} \in \mathbb{Q}$，因此 $\triangle ABC$ 為有理 2 倍角有理邊三角形。 □

2.2.4 n 倍角整數邊三角形製造機

現在考慮內接於同一圓的三角形序列 $\triangle A_2B_2C_2, \ldots, \triangle A_nB_nC_n, \ldots$，設 $\angle A_n$, $\angle B_n$, $\angle C_n$ 的對邊分別為 a_n, b_n, c_n，且 $\angle A_n = \theta$, $\angle B_n = n\theta$，如下圖。

[1] 因為 $x = \dfrac{2m^2}{4m^2-n^2} > 0$，所以 $\dfrac{2m^2-n^2}{4m^2-n^2}\Big/\left|\dfrac{n^2}{4m^2-n^2}\right| = \dfrac{2m^2-n^2}{4m^2-n^2}\Big/\dfrac{n^2}{4m^2-n^2}$。



定理 3. 令 $\triangle A_nB_nC_n$ 為上述內接於同一圓的三角形序列，則其三邊長符合下列遞迴關係，對於所有 $n \ge 3$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}; \\ b_n = c_{n-1}; \\ c_n = \dfrac{c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{b_{n-1}}. \end{cases}$$

證明. 根據正弦定理可知 $a_{n-1} = 2R \cdot \sin\theta,\ b_{n-1} = 2R \cdot \sin(n-1)\theta,\ c_{n-1} = 2R \cdot \sin n\theta,$
$a_n = 2R \cdot \sin\theta,\ b_n = 2R \cdot \sin n\theta,\ c_n = 2R \cdot \sin(n+1)\theta$

所以 $a_n = a_{n-1},\ b_n = c_{n-1}$

再由三角恆等式 $\sin(n-1)\theta \sin(n+1)\theta + \sin^2\theta = \sin^2 n\theta$

得 $b_{n-1}c_n + a_n^2 = b_n^2$，即 $c_n = \dfrac{c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{b_{n-1}}$ 。 □

將遞迴關係式經變換後代入 2 倍角三角形充要條件，我們可以得到

$$ac^2 = (a+b)(a-b)^2，$$

但是此關係式是否為 3 倍角三角形充要條件，底下是我們驗證過程：

由 $ac^2 = (a+b)(a-b)^2$，得 $c^2 = \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{a}$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{ab^2 + (a+b)(a-b)^2 - a^3}{2abc} = \frac{a(b^2-a^2) + (a+b)(a-b)^2}{2abc}$$

$$= \frac{-b(a+b)(a-b)}{2abc} = \frac{-(a+b)(a-b)}{2ac}$$

$$\begin{aligned} 2ac\cos A = -(a+b)(a-b) &\Leftrightarrow 4a^2c^2\cos^2 A = (a+b)^2(a-b)^2 \\ &\Leftrightarrow 4a(a+b)(a-b)^2\cos^2 A = (a+b)^2(a-b)^2 \\ &\Leftrightarrow 4a\cos^2 A = (a+b) \\ &\Leftrightarrow 4\sin A\cos^2 A = \sin A + \sin B \\ &\Leftrightarrow 3\sin A - 4\sin^3 A = \sin 3A = \sin B. \end{aligned}$$

所以 $\angle B = 3\angle A.$

同樣的，我們將 2 倍角三角形製造機代入遞迴關係式可以得到 3 倍角三角形製造機,

$$a = n^3,\ b = mn(m+2n),\ c = (m+n)(m^2+2mn-n^2),$$

但是此製造機是否含蓋全部的 3 倍角三角形，底下是我們驗證過程：

先證明此為充分條件

$(a+b)(a-b)^2 = (n^3+mn(m+2n))(n^3-mn(m+2n))^2$

$= n^3(n^2+m^2+2mn)(n^2-m^2-2mn)^2 = n^3(n+m)^2(m^2+2mn-n^2)^2 = ac^2$

再證明此為必要條件，由 $ac^2 = (a+b)(a-b)^2$，則

$\dfrac{(a-b)^2}{c^2} = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}$，其中 $(m,n)=1$

$\dfrac{b-a}{c} = \dfrac{n}{m+n},\ \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}$

$$\begin{cases}(m+n)a-(m+n)b+nc=0\\ m(m+2n)a-n^2b=0\end{cases}$$

則 $a:b:c = \begin{vmatrix}-(m+n) & n\\ -n^2 & 0\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}n & m+n\\ 0 & m(m+2n)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}m+n & -(m+n)\\ m(m+2n) & -n^2\end{vmatrix}$

$= n^3 : mn(m+2n) : (m+n)(m^2+2mn-n^2)$

因為 $(m,n)=1$，則 $(n^3, mn(m+2n), (m+n)(m^2+2mn-n^2)) = 1$

所以 $a=n^3,\ b=mn(m+2n),\ c=(m+n)(m^2+2mn-n^2)$

由此可知由遞迴關係所產生之 3 倍角三角形製造機完全刻劃 3 倍角三角形。

推論 4. 由遞迴關係式 $\begin{cases}a_n = a_{n-1}\\ b_n = c_{n-1}\\ c_n = \dfrac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}}\end{cases}$，我們得知當 $n-1$ 倍角三角形的邊長為整數時，遞迴所產生的 n 倍角三角形的邊長為有理數。再經伸縮即為 n 倍角整數邊三角形。

2.2.5 n 倍角 Heron 三角形製造機

令 $\triangle_k$ 表 $\triangle A_kB_kC_k$ 面積，

則
$$\begin{aligned}\triangle_{n-1} &= \frac{1}{4R}a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}\\ \triangle_n &= \frac{1}{4R}a_nb_nc_n = \frac{1}{4R}a_{n-1}c_{n-1}\frac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}} = \frac{1}{4R}a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}\frac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}\\ &= \frac{c_{n-1}^2-a_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}\triangle_{n-1}\end{aligned}$$

推論 5. 給定一個 $(n-1)$ 倍角 Heron 三角形，則經由結論 2 產生的 n 倍角三角形,再經伸縮後即為 n 倍角 Heron 三角形。

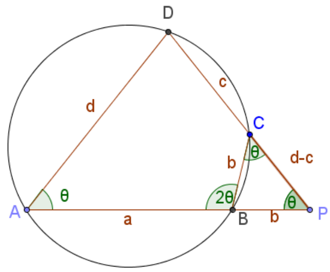
2.3 n 倍角圓內接四邊形

2.3.1 2 倍角整數邊圓內接四邊形

在以下的討論，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，令 $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c, \overline{DA}=d$。

定理 4. 令 $\square ABCD$ 為一 *2* 倍角圓內接四邊形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則充分條件為 $ab+b^2+cd=d^2$。

證明. 先證明此為充分條件，如圖示，延長 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{DC}$ 相交於 P



則 $\angle BCP = \angle A = \theta$，所以 $\angle P = \angle ABC - \angle BCP = \theta$

因此 $\triangle ADP \sim \triangle CBP$皆為等腰三角形

在 $\triangle ADP$中，$\cos\theta = \dfrac{\overline{AP}}{2\overline{DA}} = \dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2\overline{DA}} = \dfrac{a+b}{2d}$

在 $\triangle CBP$中，$\cos\theta = \dfrac{\overline{CP}}{2\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DA}-\overline{CD}}{2\overline{BC}} = \dfrac{d-c}{2b}$

所以 $\dfrac{a+b}{2a} = \dfrac{d-c}{2b}$，則 $(a+b)2b = 2a(d-c)$，即 $ab+b^2+cd = d^2$

再證明此為必要條件，由餘弦定理，$a^2+d^2-2ad\cos A = b^2+c^2-2bc\cos(\pi-A) = b^2+c^2+2bc\cos A$

$$得\ \cos A = \frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)} = \frac{a^2-c^2+ab+cd}{2(ad+bc)}$$

$$\begin{aligned}同理可得\ \cos B &= \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)} = \frac{a^2-c^2-(ab+cd)}{2(ab+cd)} = \frac{a^2-c^2+ab+cd}{2(ab+cd)} - 1\\ &= \cos A\cdot\frac{ad+bc}{ab+cd} - 1 = \cos A\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{(ad+bc)\sin A}{(ab+cd)\sin B} - 1\\ &= \cos A\cdot\frac{\sin B}{\sin A} - 1\end{aligned}$$

則 $\cos A\sin B - \sin A\cos B = \sin(B-A) = \sin A$

所以 $\angle B = 2\angle A$，得證。 □

底下我們給出 2 倍角整數邊圓內接四邊形製造機。

定理 5. 令 $\square ABCD$ 為一 *2* 倍角圓內接四邊形，其中 $\angle B = 2\angle A$。則 a, b, c, d 為整數之充分條件為存在 $p, q, m, n \in \mathbb{N}, p<q, 2m>n$ 使得

$$\frac{a}{qn-pm} = \frac{b}{pm} = \frac{c}{qm-pn} = \frac{d}{qm}。$$

證明. 由 $ab+b^2+cd = d^2$，可得 $\dfrac{b}{d} = \dfrac{d-c}{a+b} = \dfrac{p}{q}$，其中 $(p,q)=1$

則 $\begin{cases} qb-pd=0 \\ pa+pb+qc-qd=0 \end{cases}$ 可得式(1)，$p^2a+(p^2-q^2)b+pqc = 0$

同理我們可得 $\dfrac{b}{d-c} = \dfrac{d}{a+b} = \dfrac{m}{n}$，其中 $(m,n)=1$

則 $\begin{cases} nb+mc-md=0 \\ ma+mb-nd=0 \end{cases}$ 可得式(2)，$m^2a+(m^2-n^2)b-mnc=0$
聯立上式(1)、(2)之結果我們可得

$$\begin{aligned}
a:b:c &= \begin{vmatrix} p^2-q^2 & pq \\ m^2-n^2 & -mn \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} pq & p^2 \\ -mn & m^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p^2 & p^2-q^2 \\ m^2 & m^2-n^2 \end{vmatrix} \\
&= -p^2mn+q^2mn-pqm^2+pqn^2 : pqm^2+p^2mn : p^2m^2-p^2n^2-p^2m^2+q^2m^2 \\
&= (qn-pm)(pn+qm) : pm(pn+qm) : (qm-pn)(pn+qm) \\
&= qn-pm : pm : qm-pn.
\end{aligned}$$

此外再加上 $qb-pd=0$，我們可得

$$a:b:c:d = qn-pm : pm : qm-pn : pm\cdot\frac{q}{p} = qn-pm : pm : qm-pn : qm$$

即

$$\frac{a}{qn-pm}=\frac{b}{pm}=\frac{c}{qm-pn}=\frac{d}{qm}.$$

另一方面，由 $\dfrac{q}{p}>\dfrac{m}{n},\ \dfrac{q}{p}>\dfrac{n}{m}$，可知 $q>p$

由 $b+c+d>a \Rightarrow pm+qm-pn+qm>qn-pm$ 經化簡可知 $2m>n$。
$a+b+c>d \Rightarrow qn-pm+pm+qm-pn>qm$ 經化簡可知 $q>p$。

如果令 $g=(qn-pm,pm,qm-pn,qm)$，則

$$a=\frac{i}{g}(qn-pm),\ b=\frac{i}{g}(pm),\ c=\frac{i}{g}(qm-pn),\ d=\frac{i}{g}(qm),\text{其中 } i\in\mathbb{N}.$$ □

推論 6. 設 $p,\ q,\ m,\ n\in\mathbb{N},\ p<q,\ 2m<n$。則以 $a=qn-pm,\ b=pm,\ c=qm-pn,\ d=qm$ 為四邊的圓內接四邊形，必要條件為 $\angle B=2\angle A$。

證明. 由定理 4，因為

$$\begin{aligned}
ab+b^2+cd &= (qn-pm)\cdot(pm)+(pm)^2+(qm-pn)\cdot(qm) \\
&= (qn)(pm)-(pm)^2+(pm)^2+(qm)^2-(pn)(qm)=(qm)^2=d^2
\end{aligned}$$

所以 $\angle B=2\angle A.$ □

2.3.2 2 倍角 Heron 圓內接四邊形製造機

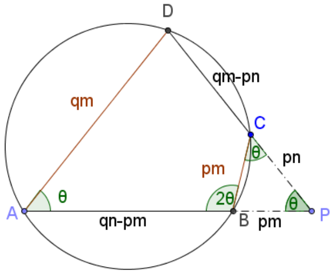
接下來我們來探討 2 倍角圓內接四邊形的面積

$$\begin{aligned}
\square ABCD &= \triangle ADP-\triangle CBP \\
&= \frac{1}{2}\left(qm\cdot qn\sqrt{1-\left(\frac{n}{2m}\right)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(pm\cdot pn\sqrt{1-\left(\frac{n}{2m}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}mn(q^2-p^2)\sqrt{1-\frac{(n)^2}{(2m)^2}}=\frac{1}{4}n(q^2-p^2)\sqrt{(2m)^2-(n)^2}
\end{aligned}$$

令 $D=\sqrt{F^2-E^2}$，其中 $E=n,\ F=2m$，則 $D^2+E^2=F^2$
此外，設 2 不同時整除 D 與 E，則 $D^2+E^2 \pmod 4\equiv 1$ or 2，與 $D^2+E^2=F^2=4m^2$ 矛盾，於是可知 D 與 E 同為偶數。

因此 $\square ABCD$ 的面積 $=\dfrac{1}{4}n(q^2-p^2)\sqrt{(2m)^2-(n)^2}=\dfrac{1}{4}(q^2-p^2)D\cdot E=k$，其中 $k\in\mathbb{N}.$

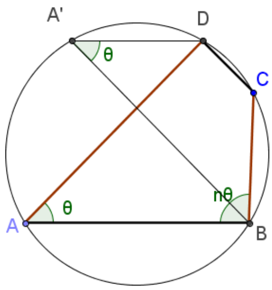
推論 7. 當 $D,\ E,\ F$ 為畢氏三元數時，因為斜邊 F 為偶數，則 $E(=n)$ 亦為偶數那麼由 $(m,n)=\left(\dfrac{F}{2},E\right)$ 代入製造機，得到的四邊形即為 2 倍角 *Heron* 圓內接四邊形。



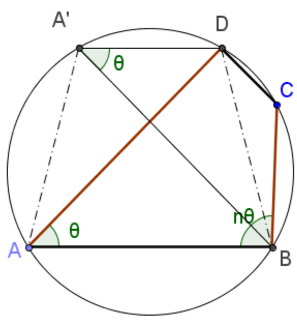
2.3.3 n 倍角整數邊圓內接四邊形

定理 6. 如圖示，若 $\angle ABC = n\angle A,\ \angle A'BC = (n-1)\angle A'$，其中 $n \geq 3$，則

$$\overline{A'D}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)+\overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)+\overline{AD}\left(\overline{BD}^2-\overline{AD}^2\right)=0$$



證明. 由 $\angle ABA' = \angle ABC - \angle A'BC = n\theta - (n-1)\theta = \angle A'$， 所以 $\overline{A'D}$ 平行 $\overline{AB}$，連 $\overline{AA'}, \overline{BD}$，得等腰梯形 $\square ABDA'$。



$\square ABDA'$ 中，根據托勒密定理可得 $\overline{A'D}\cdot\overline{AB}+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2$ 且

$$\overline{BD}^2=\frac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}},$$

代入上式中得

$$\overline{A'D}\cdot\overline{AB}+\frac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=\overline{AD}^2$$

經由化簡

$$\overline{A'D}\cdot\overline{AB}+\frac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)-\overline{AD}^2\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=0$$

$$\overline{A'D}\cdot\overline{AB}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)-\overline{AD}^2\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=0$$

$$\overline{A'D}\cdot\overline{AB}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)+\overline{AB}\cdot\overline{AD}\left(\overline{BC}^2-\overline{AD}^2\right)}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=0$$

$$\overline{A'D}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)+\overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)+\overline{AD}\left(\overline{BC}^2-\overline{AD}^2\right)=0$$

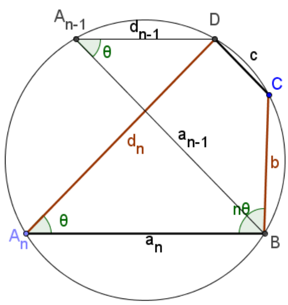
得 $\overline{A'D}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)+\overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)=\overline{AD}\left(\overline{AD}^2-\overline{BC}^2\right)$ □

現在考慮內接於同一圓的四邊形形序列 $\square A_2BCD, \square A_3BCD, \ldots, \square A_nBCD, \ldots$, 在 $\square A_nBCD$ 中，設 $a_n=\overline{A_nB}$, $b=\overline{BC}$, $c=\overline{CD}$, $d_n=\overline{DA_n}$, 且 $\angle A_n=\theta$, $\angle A_nBC=n\theta$.

定理 7. 令 $\square A_nBCD$ 為上述內接於同一圓的四邊形形序列，則

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{a_{n-1}\left(a_{n-1}^2-c^2\right)-b(a_{n-1}b+cd_{n-1})}{a_{n-1}d_{n-1}+bc}, & n\geq 3\\ d_n=a_{n-1} \end{cases}$$

證明. 如圖示，作 $\overline{DA_{n-1}}$ 平行 $\overline{AB}$,



因為 $\angle A_{n-1}=\angle A_n=\theta$，且 $\angle A_{n-1}BC=\angle A_nBC-\angle A_nBA_{n-1}=n\theta-\theta=(n-1)\theta$
所以$\square A_{n-1}BCD$ 為 $(n-1)$ 倍角圓內接四邊形
又因為 $\angle A_{n-1}BC=(n-1)\angle A_{n-1}$, $\angle A_nBC=n\angle A_n$
根據性質 5

$$\square A_nBDA_{n-1} \text{ 為等腰梯形，則 } d_n=a_{n-1},$$

$$\overline{A'D}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)+\overline{CD}\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AD}\right)=\overline{AD}\left(\overline{AD}^2-\overline{BC}^2\right)$$

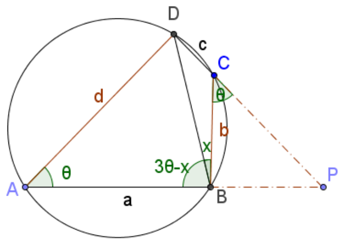
$$\Rightarrow \overline{AB}\left(\overline{A'B}\cdot\overline{A'D}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)=\overline{A'B}\left(\overline{A'B}^2-\overline{CD}^2\right)-\overline{BC}\left(\overline{A'B}\cdot\overline{BC}+\overline{A'D}\cdot\overline{CD}\right)$$

$$\text{得 } a_n=\frac{a_{n-1}\left(a_{n-1}^2-c^2\right)-b(a_{n-1}b+cd_{n-1})}{a_{n-1}d_{n-1}+bc}$$

將遞迴關係式經變換後代入 2 倍角圓內接四邊形充要條件，經化簡我們可以得到下式

$$(c-d)(a+c)(ab+cd)=(c-d)(b+d)(b-d)^2$$

並且，如圖所示 $c = 2R\sin x,\ d = 2R\sin(3\theta - x)$



因為 $\theta > x,\ 3\theta - x > 2\theta > x$，所以 $c = 2R\sin x < 2R\sin(3\theta - x) = d.$

因此我們可以將其簡化為 $(a+c)(ab+cd) = (b+d)(b-d)^2$，但是此關係式是否為 3 倍角圓內接四邊形充要條件,底下是我們驗證過程：

由 $(a+c)(ab+cd) = (b+d)(b-d)^2$，得 $b^2 - d^2 = \dfrac{(a+c)(ab+cd)}{b-d}.$

$$\text{由 餘弦定理，得 } \cos A = \frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)} = \frac{a^2-c^2-(b^2-d^2)}{2(ad+bc)}$$
$$= \frac{(a^2-c^2)(b-d)-(a+c)(ab+cd)}{2(ad+bc)(b-d)}$$
$$= \frac{(a+c)}{2(ad+bc)(b-d)}\cdot[(a-c)(b-d)-(ab+cd)]$$
$$= \frac{a+c}{2(ad+bc)(d-b)}\cdot[ad+bc] = \frac{a+c}{2(d-b)}.$$

$$\text{同理可得 } \cos B = \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)} = \frac{a^2-c^2+(b^2-d^2)}{2(ab+cd)}$$
$$= \frac{(a^2-c^2)(b-d)+(a+c)(ab+cd)}{2(ab+cd)(b-d)}$$
$$= \frac{(a+c)}{2(ab+cd)(b-d)}\cdot[(a-c)(b-d)+(ab+cd)]$$
$$= \frac{(a+c)}{2(ab+cd)(b-d)}\cdot[2(ab+cd)-ad-bc]$$
$$= \frac{(a+c)}{2(d-b)}\cdot\left[-2+\frac{ad+bc}{ab+cd}\right] = \cos A\cdot\left(-2+\frac{\sin B}{\sin A}\right).$$

則 $\sin A\cos B = -2\sin A\cos A + \cos A + \sin B$；$2\sin A\cos A = \cos A\sin B - \sin A\cos B.$
即 $\sin 2A = \sin(B-A)$，所以 $\angle B = 3\angle A$，得證。 □

同樣的，我們將 2 倍角圓內接四邊形製造機代入遞迴關係式可以得到 3 倍角圓內接四邊形製造機，

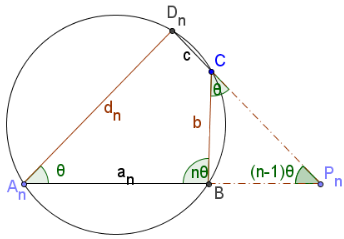
$$a = q(n^2-m^2)-pmn,\ \ b = pm^2,\ \ c = qm^2-pmn,\ \ d = qmn-pm^2$$

$$\begin{aligned}
&(a+c)(ab+cd)\\
&= \left(q(n^2-m^2)-pmn+qm^2-pmn\right)\left[pm^2\left(q(n^2-m^2)-pmn\right)+(qmn-pm^2)(qm^2-pmn)\right]\\
&= (qn^2-2pmn)\left[pm^2(qn^2-qm^2-pmn)+(qmn-pm^2)(qm^2-pmn)\right]\\
&= (qn^2-2pmn)\left[pqm^2n^2-pm^2(qm^2+pmn)+qmn(qm^2-pmn)-pm^2(qm^2-pmn)\right]\\
&= (qn^2-2pmn)\left[qmn(qm^2)-2pm^2(qm^2)\right]\\
&= qmn(qmn-2pm^2)(qmn-2pm^2) = (b+d)(b-d)^2
\end{aligned}$$

當 $n-1$ 倍角圓內接四邊形的邊長為整數時，遞迴所產生的 n 倍角圓內接四邊形的邊長為有理數。再經伸縮後即為 n 倍角整數邊圓內接四邊形.

2.3.4 n 倍角 Heron 圓內接四邊形

如圖示，延長 $\overrightarrow{A_nB}$ 與 $\overrightarrow{D_nC}$ 相交於 P_n,



所以 $\angle BCP_n = \angle A_n = \theta$，且 $\angle P_n = \angle P_n$，所以 $\triangle CBP_n \sim \triangle A_nP_nD_n$

由 $\dfrac{\overline{CP_n}}{\overline{BP_n}+a_n} = \dfrac{\overline{BP_n}}{\overline{CP_n}+c} = \dfrac{b}{d_n}$，得 $\begin{cases} d_n\cdot\overline{CP_n} - b\cdot\overline{BP_n} = a_nb \\ -b\cdot\overline{CP_n} + d_n\cdot\overline{BP_n} = bc \end{cases}$

則 $\overline{CP_n} = \dfrac{a_nb\cdot d_n + bc\cdot b}{d_n^2-b^2} = \dfrac{b(a_nd_n+bc)}{d_n^2-b^2}$

令 $\square_i$ 表 $\square A_iBCD_i$ 面積,

則

$$\begin{aligned}
\square_i = \triangle A_iD_iP_i - \triangle CBP_i &= \frac{1}{2}\overline{A_iD_i}\cdot\overline{A_iP_i}\sin\theta - \frac{1}{2}\overline{CB}\cdot\overline{CP_i}\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}d_i\cdot\left(\frac{d_i}{b}\cdot\frac{a_ibd_i+b^2c}{d_i^2-b^2}\right)\sin\theta - \frac{1}{2}b\cdot\frac{a_ibd_i+b^2c}{d_i^2-b^2}\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(d_i^2-b^2\right)\cdot\frac{a_id_i+bc}{d_i^2-b^2}\cdot\sin\theta = \frac{\sin\theta}{2}\cdot(a_id_i+bc)
\end{aligned}$$

所以

$$\square_{n-1} = \frac{\sin\theta}{2}\cdot(a_{n-1}d_{n-1}+bc)$$

$$\begin{aligned}
\square_n &= \frac{\sin\theta}{2}\cdot(a_nd_n+bc) = \frac{\sin\theta}{2}\cdot\left(\frac{a_{n-1}\left(a_{n-1}^2-c^2\right)-b\left(a_{n-1}b+cd_{n-1}\right)}{a_{n-1}d_{n-1}+bc}\cdot a_{n-1}+bc\right) \\
&= \frac{\sin\theta}{2}\cdot\frac{a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2-c^2\right)-a_{n-1}b(a_{n-1}b+cd_{n-1})+bc(a_{n-1}d_{n-1}+bc)}{a_{n-1}d_{n-1}+bc} \\
&= \frac{\sin\theta}{2}\cdot\frac{a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2-c^2\right)-(a_{n-1}b)^2+(bc)^2}{a_{n-1}d_{n-1}+bc} \\
&= \frac{\sin\theta}{2}\cdot\frac{\left(a_{n-1}^2-b^2\right)\left(a_{n-1}^2-c^2\right)}{a_{n-1}d_{n-1}+bc} = \frac{\left(a_{n-1}^2-c_{n-1}^2\right)\left(a_{n-1}^2-b_{n-1}^2\right)}{(a_{n-1}d_{n-1}+b_{n-1}c_{n-1})^2}\cdot\square_{n-1}.
\end{aligned}$$

推論 8. 當給定一個 $n-1$ 倍角 *Heron* 圓內接四邊形，我們可經由邊長遞迴關係產生的 n 倍角圓內接四邊形，再經伸縮後即為 n 倍角 *Heron* 圓內接四邊形.

3 未來展望

一、 是否能寫出 n 倍角整數邊三角形與 n 倍角整數邊圓內接四邊形製造機的一般形式。

二、 文章中所給予的 n 倍角整數邊圓內接四邊形製造機並不唯一，且不像 n 倍角三角形般可透過調整式中的比值獲得，因此是否能找出不同形態的製造機所蘊含的意義。

三、 是否有辦法將倍角整數邊圓內接四邊形推廣到一般四邊形。

參考文獻

[1] 三角形趣談，楊世明，哈爾濱工業大學出版社，2012 年 8 月。

[2] 從 3, 5, 7 出發—擬畢氏三角形之研究—陳學儀，臺北市立第一女子高級中學。

[3] 整體與倍角—簡境良、張緯鈞、陳韋銓，板橋高中。