單體中同比例分點的研究

臺北市立建國高級中學 蔡宗軒
指導老師 李宗

Abstract

This study is originated from an interesting geometric graphic: A tetrahedron $ABCD$ and four points A', B', C', D' inside satisfy that they are the midpoints of $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{DA'}$, respectively.

In this article "the midpoints" in the statement is extended to points of the same ratio k, that is, $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CD'} = k\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DD'}$. We call the four points A', B', C', D' as **the same ratio points** of the ratio k, and call tetrahedron $A'B'C'D'$ as **the same ratio tetrahedron**; the proposition is also extended to n-dimensional, then some properties of this graph are researched and found.
Here are properties discussed in this article:

1. The existence and the uniqueness of the same ratio points for given n and k.
2. The properties about geometric measurement for given n and k.
3. The locus of the relative points of the same ratio points when the ratio k varies.

中文摘要

這份作品源自於一個有趣的幾何圖形：四面體 $ABCD$ 及其內部四點 A', B', C', D' 使得他們分別為 $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{DA'}$ 中點。

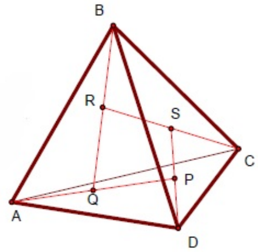
本文將敘述中的中點推廣為比例同為 k 的分點，即為 $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CD'} = k\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DD'}$。 我們稱 A', B', C', D' 比值為 k 的**同比例分點**，並稱四面體 $A'B'C'D'$ 為 **分點四面體**；同時將類似的命題推廣至任意維度(n 維)，並研究、發掘這個圖形的性質。
文中討論的性質有：

1. 確立同比例分點在任意維度 n 及比值 k 下的存在唯一性。
2. 同比例分點在各個維度 n 及比值 k，該維度幾何度量相關性質。
3. 比值 k 在實數域變化時與同比例分點相關的點之軌跡圖形。
4. 其他同比例分點性質。

1 簡介

1.1 研究動機

我在某次數學免修考遇到以下一題(以下稱為原題)： 在四面體 $ABCD$ 內取四點 $PQRS$，使得 Q, R, S, P 分別為線段 AP, BQ, CR, DS 之中點，設 V_{PBCD} 表示四面體 $PBCD$ 之體積，試求 $V_{PBCD} : V_{PACD} : V_{PABD} : V_{PABC}$。



我當時腦中浮現的並不是如何解決這道題目，而是一些有趣問題：對於任意四面體 $ABCD$，點 P, Q, R, S 點存在是否？如果存在，又是否唯一？如果不取中點，而是其他比例的點呢？這樣的圖形又有哪些性質？我曾以這些問題的初步結果報名參加 2013 台灣國際科展，而後又發掘出更多的性質與定理，並將許多結論作高維度推廣。
(在下文中將以點 A', B', C', D' 代稱原題中的點 P, Q, R, S。)

1.2 名詞定義

首先我將研究動機中的圖形作推廣：

(1) (k 值) 將中點推向其他相同比例的分點($\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AA'}$, 其餘同理)

(2) (n 值) 將維度由三維推向任意維度

1.2.1 單體與 n 維幾何度量

在 n 維歐氏空間中不共$(n-1)$維歐氏空間的$(n+1)$個點 $A_i(i = 1 \ldots n+1)$所組成的圖形 $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ 稱為單體，其 n 維幾何度量(n 維有向體積)為

$$[A_1A_2 \ldots A_{n+1}] = \frac{1}{n!} \det \left(\begin{bmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} \\ \overrightarrow{A_1A_3} \\ \vdots \\ \overrightarrow{A_1A_{n+1}} \end{bmatrix} \right)$$

1.2.2 同比例分點與分點單體

給定 n 維單體 $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ 及實數 k，若存在$(n+1)$個點 $A'_i(i = 1 \ldots n+1)$ 使得向量 $\overrightarrow{A_iA'_{i+1}} = k\overrightarrow{A_iA'_i}$ $(i = 1 \ldots n+1,\ A'_{n+2} = A'_1)$，則稱點 A'_i 為點 A_i 的同比例分點，並稱單體 $A'_1A'_2 \ldots A'_{n+1}$ 為單體 $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ 之分點單體。其中 $k = 1$ 時特別定義 $A'_i = A'_j(i,\ j = 1 \ldots n+1)$ 為單體 $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ 重心(將在後文說明)。

1.3 研究目的

在做出定義後開始討論同比例分點的性質，並各個維度及比例之下作探討：

1.3.1 對於任意 k 值、n 值及單體，同比例分點的存在唯一性

1.3.2 分點單體與原單體間的 n 維幾何度量比例

1.3.3 研究動機中原題的證明及推廣

1.3.4 分點單體與原單體間的邊長關係(目前只有二維)

1.3.5 比例 k 在實數域變動時同比例分點的軌跡(目前只有二維、三維)

1.3.6 其他軌跡(外心、內心等)

1.3.7 同比例分點的等價命題

1.3.8 分點單體與原單體是否相似

2　研究內容

2.1　存在唯一定理

在討論同比例分點是否存在唯一時，首先嘗試做二維的討論，而後發現圖形中需要用到一維同比例分點的結構，在維度之間建立連結性再向上推廣，最後以數學歸納法得到 n 維結論。

存在性先構造其解，對 k 值分 $k=0$、$k=-1$、$k=1$ 及其他實數進行討論，以下主要列出其他實數的論證過程。唯一性先解決 $\overleftrightarrow{AA'B'}$ 與去除 A 點之$(n-1)$維單體有交點，在無交點且高於三維部分目前只是猜測。
而由定義與圖形觀察可以發現：

(1) $k \to 0$ 時分點單體與原單體重合(點序不同)。

(2) $k \to \infty$ 時分點單體與原單體重合(點序相同)。

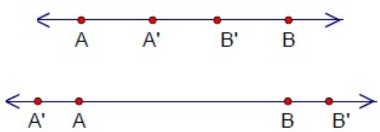
(3) $k=-1$ 且 n 為奇數時$(n+1)$個起始點共$(n-1)$維空間而無解(也就是 $k \to -1$ 時分點趨向無窮遠)，n 為偶數則有解，且為唯一性的無交點部分。

(4) $k \to 1$ 時分點趨向原單體重心，特別定義 $k=1$ 時所有分點皆為原單體重心。

2.1.1　一維存在唯一定理

定理. 直線上相異兩點 A, B 及任意除 *-1* 外的實數 k，必存在唯一的一組比值為 k 的同比例分點A', B'。

證明. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AA'} - k\overrightarrow{BB'}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = k\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}$
$\Rightarrow (k-1)\overrightarrow{AB} = (k^2-1)\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}$



得點 A' 存在且唯一，同理 B' 存在且唯一。 □

在這過程中我們也得到：

推論 1 (一維分點比例). $\overrightarrow{AA'} : \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'B} = 1 : (k-1) : 1$

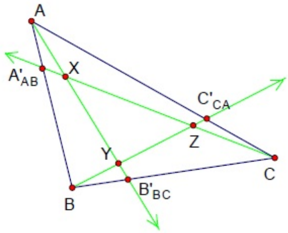
2.1.2　二維存在唯一定理

定理. 平面上不共線三點 A, B, C 及任意實數 k，必存在唯一一組 A', B', C' 為 A, B, C 比值為 k 的同比例分點。

證明. (1) 先證明存在性，直接構造出同比例分點：
記兩點 A, B 比值為 k 的同比例分點為 A'_{AB}, B'_{AB}，如圖，設 $\overleftrightarrow{AB'_{BC}}$ 交 $\overleftrightarrow{CA'_{AB}}$ 於 X，$\overleftrightarrow{BC'_{CA}}$ 交 $\overleftrightarrow{AB'_{BC}}$ 於Y，$\overleftrightarrow{CA'_{AB}}$ 交 $\overleftrightarrow{BC'_{CA}}$ 於 Z，由於 $k \neq 0$ 或 ± 1，這些點皆為相異點。
由孟氏定理及 2.1.1 推論：

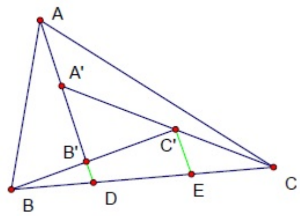
$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB'_{BC}}} = -\frac{\overrightarrow{AA'_{AB}}}{\overrightarrow{A'_{AB}B}} \times \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CB'_{BC}}} = \frac{k+1}{k^2} \qquad \frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YB'_{BC}}} = -\frac{\overrightarrow{AC'_{CA}}}{\overrightarrow{C'_{CA}C}} \times \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BB'_{BC}}} = \frac{k^2+k}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AB'_{BC}}}{k^2+k+1} = \frac{\overrightarrow{AX}}{k+1} = \frac{\overrightarrow{AY}}{k^2+k} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{AY} = k\overrightarrow{AX}$$



同理有 $\overrightarrow{BZ} = k\overrightarrow{BY}$ 且 $\overrightarrow{CX} = k\overrightarrow{CZ}$，得 X, Y, Z 為 A, B, C 比值為 k 的同比例分點 A', B', C'。
綜合上述四點，對於任意實數 k，此三點存在。

(2) 再來證明唯一性：
設 $\overleftrightarrow{AA'B'}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於點 D。過點 C' 作平行於 $\overleftrightarrow{AB'}$ 的直線 $\overleftrightarrow{CE'}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E，則 $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BB'}} = \frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CC'}} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{CE}} = k$



故 D, E 為兩點 B, C 的同比例分點，由一維唯一性知點 D 唯一，得 $\overrightarrow{AD}$ 唯一，同理得由 A, B, C 畫出的三線唯一，交到三點為唯一解。

□

類似於一維推論我們得到：

推論 2 (二維分點比例)**.** $\overrightarrow{AA'} : \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'B'_{BC}} = (k+1) : (k^2-1) : 1$

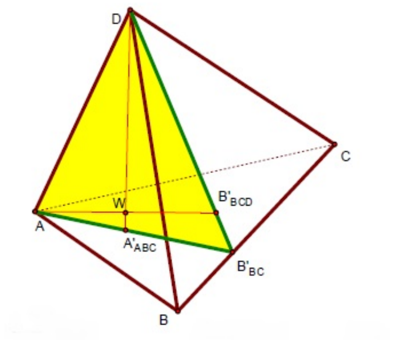
2.1.3 三維存在唯一定理

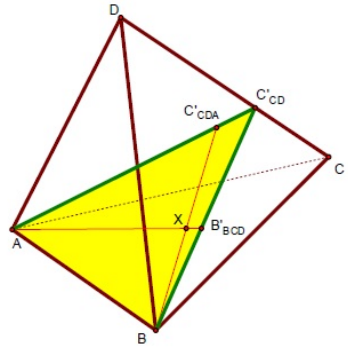
定理. 平面上不共面四點 A, B, C, D 及除 -1 外任意實數 k，必存在唯一一組A', B', C', D' 為 A, B, C, D 比值為 k 的同比例分點。

證明. (1) 先證明存在定理，直接構造出同比例分點：
記三點 A, B, C 比值為 k 的同比例分點為 $A'_{ABC}, B'_{ABC}, C'_{ABC}$，由二維存在唯一定理知 A, A'_{ABC}, B'_{BC} 共線、D, B'_{BCD}, B'_{BC} 共線，得 $A, A'_{ABC}, D, B'_{BCD}, B'_{BC}$ 五點共面，進而$\overleftrightarrow{AB'_{BCD}}$ 與 $\overleftrightarrow{DA'_{ABC}}$ 有交點，設其交點為 W，同理設 $\overleftrightarrow{BC'_{CDA}}$ 交 $\overleftrightarrow{AB'_{BCD}}$ 於 X，$\overleftrightarrow{CD'_{DAB}}$ 交 $\overleftrightarrow{BC'_{CDA}}$ 於 Y，$\overleftrightarrow{DA'_{ABC}}$ 交 $\overleftrightarrow{CD'_{DAB}}$ 於 Z，由孟氏定理：

$$\frac{\overrightarrow{AW}}{\overrightarrow{WB'_{BCD}}} = -\frac{\overrightarrow{AA'_{ABC}}}{\overrightarrow{A'_{ABC}B'_{BC}}} \times \frac{\overrightarrow{B'_{BC}D}}{\overrightarrow{DB'_{BCD}}} = \frac{k+1}{k^2} \times \frac{k^2+k+1}{k^2+k} = \frac{k^2+k+1}{k^3}$$，如下左圖

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB'_{BCD}}} = -\frac{\overrightarrow{AC'_{CDA}}}{\overrightarrow{C'_{CDA}C'_{CD}}} \times \frac{\overrightarrow{C'_{CD}B}}{\overrightarrow{BB'_{BCD}}} = \frac{k^2+k}{1} \times \frac{k^2+k+1}{k+1} = \frac{k^3+k^2+k}{1}$$，如下右圖



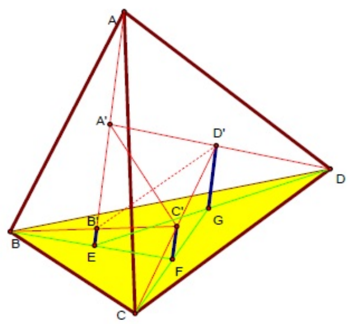


$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AB'_{BCD}}}{k^3+k^2+k+1} = \frac{\overrightarrow{AW}}{k^2+k+1} = \frac{\overrightarrow{AX}}{k^3+k^2+k} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AW}$$

同理可得 $\overrightarrow{BY} = k\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{CZ} = k\overrightarrow{CY}$, $\overrightarrow{DW} = k\overrightarrow{DZ}$，$W$, X, Y, Z 為 A, B, C, D 的同比例分點 A', B', C', D'，此四分點存在。

(2) 再來證明唯一定理

設 $\overleftrightarrow{AA'B'}$ 交平面 BCD 於 E，過 C', D' 作平行於 $\overleftrightarrow{AB'}$ 的直線 $\overleftrightarrow{C'F}$, $\overleftrightarrow{D'G}$ 交平面 BCD 於 F, G，如下圖，則 $\frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{BE}} = \frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BB'}} = k$；$\frac{\overrightarrow{CG}}{\overrightarrow{CF}} = \frac{\overrightarrow{CD'}}{\overrightarrow{CC'}} = k$；$\frac{\overrightarrow{DE}}{\overrightarrow{DG}} = \frac{\overrightarrow{DA'}}{\overrightarrow{DD'}} = k$



E, F, G 為 B, C, D 同比例分點，點 E 唯一，$\overleftrightarrow{AE}$ 唯一，同理 A, B, C, D 畫出的四線唯一，交到四點為唯一解。

□

再次推論得

推論 3 (三維分點比例)**.** $\overrightarrow{AA'} : \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{B'B'_{BCD}} = (k^2+k+1) : (k^3-1) : 1$

2.1.4 n 維存在唯一定理

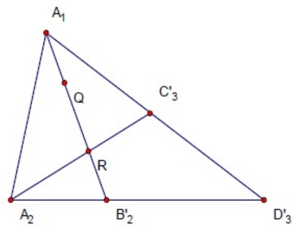
定理. 對於 n 維歐氏空間中不共$(n-1)$維空間的$(n+1)$個點 $A_i\,(i=1\ldots n+1)$及實數 k，必存在唯一一組點 $A'_i\,(i=1\ldots n+1)$為$(n+1)$個點 $A_i\,(i=1\ldots n+1)$比值為 k 的等比例分點，其中$k=-1$ 且 n 為奇數時不存在為例外。

證明. 利用數學歸納法：首先假設對於任意正整數 $t < n$，t 維同比例分點存在唯一。並令除 A_1 之$(t-1)$維單體 $A_2A_3\ldots A_{t+1}$ 對應 A_2 之同比例分點為 B_2'，類似於前述推論：假設 a：$A_1,\ A_1',\ A_2',\ B_2'$ 共線；假設 b：$\overrightarrow{A_1A_1'} : \overrightarrow{A_1'A_2'} : \overrightarrow{A_2B_2'} = \dfrac{k^{t+1}-1}{k-1} : (k^{t+1}-1) : 1$。已知 $n = 1,\ 2,\ 3$ 時成立。

(1) 先證明存在性，直接構造：
取$(n-1)$維單體 $A_2A_3\ldots A_{n+1}$ 中對應 A_2 之同比例分點 B_2'；
$(n-1)$維單體 $A_1A_3\ldots A_{n+1}$ 對應 A_3 之同比例分點 C_3'；
$(n-2)$維單體 $A_3A_4\ldots A_{n+1}$ 對應 A_3 之同比例分點 D_3'。
因假設中$(n-1)$維存在唯一定理成立，由假設 a，$\overleftrightarrow{A_1C_3'},\ \overleftrightarrow{A_2B_2'}$ 兩直線皆過 D_3'，故 $A_1,\ B_2',\ A_2,\ C_3',\ D_3'$ 五點共面，設 $\overleftrightarrow{A_1B_2'}$ 交 $\overleftrightarrow{A_2C_3'}$ 於 R，由孟氏定理及前述假設：

$$\frac{\overrightarrow{A_1R}}{\overrightarrow{RB_2'}} = -\frac{\overrightarrow{A_1C_3'}}{\overrightarrow{C_3'D_3'}} \times \frac{\overrightarrow{D_3'A_2}}{\overrightarrow{A_2B_2'}} = \frac{\frac{k}{k-1}\left(k^n-1\right)}{1} \times \frac{\frac{k^{n+1}-1}{k-1}}{\frac{k^n-1}{k-1}} = \frac{\frac{k}{k-1}\left(k^{n+1}-1\right)}{1} \tag{i}$$

$$\frac{\overrightarrow{A_2R}}{\overrightarrow{RC_3'}} = -\frac{\overrightarrow{A_2B_2'}}{\overrightarrow{B_2'D_3'}} \times \frac{\overrightarrow{D_3'A_1}}{\overrightarrow{A_1C_3'}} = \frac{\frac{1}{k-1}\left(k^n-1\right)}{k} \times \frac{\frac{k^{n+1}-1}{k-1}}{\frac{k}{k-1}\left(k^n-1\right)} = \frac{\frac{1}{k-1}\left(k^{n+1}-1\right)}{k^{n+1}} \tag{ii}$$



同理以 A_n 代 A_1，以 A_1 代 A_2，故 B_2' 同理於 C_3'，可得同理於 R 之點 Q 使得

$$\frac{\overrightarrow{A_1Q}}{\overrightarrow{QB_2'}} = \frac{\frac{1}{k-1}\left(k^{n+1}-1\right)}{k^{n+1}}. \tag{iii}$$

由 (i) 及 (iii)可得

$$\frac{\overrightarrow{A_1Q}}{\frac{1}{k-1}\left(k^{n+1}-1\right)} = \frac{\overrightarrow{A_1R}}{\frac{k}{k-1}\left(k^{n+1}-1\right)} = \frac{\overrightarrow{A_1B_2'}}{1} \quad \Rightarrow \overrightarrow{A_1Q} : \overrightarrow{A_1R} = 1 : k.$$

如此再取 n 次後，可得$(n+1)$個點使得它們為 n 維空間中$(n+1)$個點 $A_i(i = 1\ldots n+1)$ 比值為 k 之同比例分點，並且有：
$A_1,\ A_1',\ A_2',\ B_2'$ 共線合假設 a；$\overrightarrow{A_1A_1'} : \overrightarrow{A_1'A_2'} : \overrightarrow{A_2B_2'} = \dfrac{k^{n+1}-1}{k-1} : \left(k^{n+1}-1\right) : 1$ 合假設 b。

(2) 再來證明唯一性：
設 $\overleftrightarrow{A_1A_1'A_2'}$ 交$(n-1)$維空間 $A_2A_3\ldots A_{n+1}$ 於點 B_2'，由 $A_i'(i = 3\ldots n+1)$ 做平行於 $\overleftrightarrow{A_1A_1'A_2'}$ 之直線交$(n-1)$維空間 $A_2A_3\ldots A_{n+1}$ 於 $B_i'(i = 3\ldots n+1)$，則由：

$$\frac{\overrightarrow{A_iB_{i+1}'}}{\overrightarrow{A_iB_i'}} = \frac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}'}}{\overrightarrow{A_iA_i'}} = k, \qquad \left(i = 2\ldots n+1,\ A_{n+2}' = A_2',\ B_{n+2}' = B_2'\right).$$

得 $B_i'(i=2\ldots n+1)$為$(n-1)$維空間中 n 個點 $A_2A_3\ldots A_{n+1}$ 比值為 k 的等比例分點，由$(n-1)$維存在唯一定理知 B_2' 存在且唯一，直線 $\overleftrightarrow{A_1A_1'A_2'}$ 唯一，同理有 $\overleftrightarrow{A_{n+1}A_{n+1}'A_1'}$ 唯一，故點 A_1' 唯一，同理交到的 n 個點為唯一解。 □

2.2 分點單體的幾何度量

2.2.1 一維有向線段

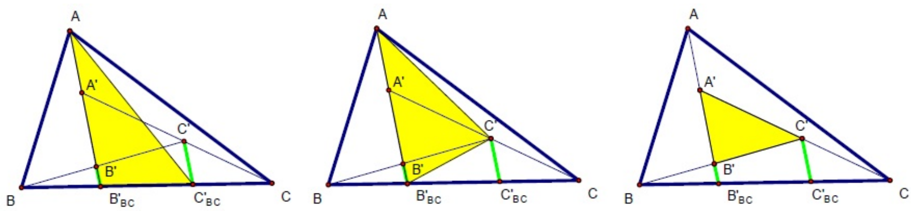
定理. 分點線段與原線段比例為：$[A'B']=\dfrac{(k-1)^2}{k^2-1}[AB]$ 。

證明. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'B}=k\overrightarrow{AA'}+k\overrightarrow{A'B}-\overrightarrow{A'B'}$
$\Rightarrow (k-1)\overrightarrow{AB}=(k+1)\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}=\dfrac{(k-1)^2}{k^2-1}\overrightarrow{AB}$ □

2.2.2 面積定理

定理. 分點三角形與原三角形比例為：$[A'B'C']=\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}[ABC]$ 。

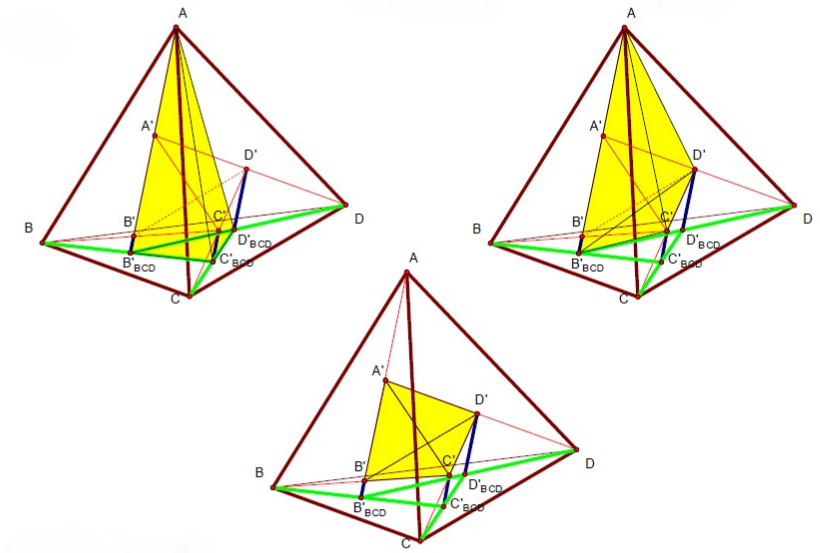
證明. 可先由 2.2.1：$[AB_{BC}'C_{BC}']=\dfrac{(k-1)^2}{k^2-1}[ABC]$
再由 $\overline{B'B_{BC}'}\mathbin{/\!/}\overline{C'C_{BC}'}$：$[AB_{BC}'C']=[AB_{BC}'C_{BC}']$
最後由 2.1.2 的推論：$[A'B'C']=\dfrac{k^2-1}{k^2+k+1}[AB_{BC}'C']=\dfrac{k^3-1}{(k-1)^3}[ABC]$ 得證。 □



2.2.3 體積定理

定理. 分點四面體與原四面體比例為：$[A'B'C'D']=\dfrac{(k-1)^4}{k^4-1}[ABCD]$。

證明. 先由 2.2.2：$[AB_{BCD}'C_{BCD}'D_{BCD}']=\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}[ABCD]$
再由 $\overline{B'B_{BCD}'}\mathbin{/\!/}\overline{C'C_{BCD}'}\mathbin{/\!/}\overline{D'D_{BCD}'}$：$[AB_{BC}'C'D']=[AB_{BCD}'C_{BCD}'D_{BCD}']$
最後由 2.1.3 的推論：$[A'B'C'D']=\dfrac{k^3-1}{k^3+k^2+k+1}[AB_{BCD}'C'D']=\dfrac{k^4-1}{(k-1)^4}[ABCD]$ 得證。 □



2.2.4 n 維體積定理

定理. 分點單體與原單體比例為：$[A_1'A_2'\dots A_{n+1}'] = \dfrac{(k-1)^{n+1}}{k^{n+1}-1}[A_1A_2\dots A_{n+1}]$。

證明. 設單體 $A_2A_3\dots A_{n+1}$ 的分點單體為 $B_2'B_3'\dots B_{n+1}'$，以下由數學歸納法證明。已知 $n=1$ 成立，假設$(n-1)$成立，可先由$(n-1)$維體積定理及 n 維存在唯一定理內容得 $[AB_2'B_3'\dots B_{n+1}'] = \dfrac{(k-1)^n}{k^n-1}[A_1A_2\dots A_{n+1}]$，在 $2 \le i \le n+1$, $\overline{A_i'B_i'}$ 互相平行有 $[AB_2'A_3'A_4'\dots A_{n+1}'] = [AB_2'B_3'\dots B_{n+1}']$，最後由 2.1.4 的推論得 $[A_1'A_2'\dots A_{n+1}'] = \dfrac{k^n-1}{(k^{n+1}-1)/(k-1)}[AB_2'A_3'A_4'\dots A_{n+1}'] = \dfrac{(k-1)^{n+1}}{k^{n+1}-1}[A_1A_2\dots A_{n+1}]$，得證。 □

2.3 幾何度量成等比(原題推廣)

2.3.1 一維有向線段

定理. 取比值為 k 的同比例分點 A'，則 $\dfrac{[AA']}{1} = \dfrac{[A'B]}{k}$ 。

證明. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{B'B}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = k\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B}$
$\Rightarrow (k-1)\overrightarrow{AA'} = (k-1)\overrightarrow{B'B} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B} \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{B'B} = k\overrightarrow{AA'}$

得證。 □

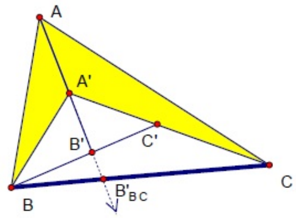
2.3.2 面積等比定理

定理. 取比值為 k 的同比例分點 A'，則 $\dfrac{[ABA']}{1} = \dfrac{[AA'C]}{k} = \dfrac{[A'BC]}{k^2}$ 。

證明. 由二維存在唯一定理內容，延長 $\overline{AA'}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於點 B'_{BC}，由 2.3.1：

$$\frac{[ABB'_{BC}]}{[AB'_{BC}C]} = \frac{[A'BB'_{BC}]}{[A'B'_{BC}C]} = \frac{[BB'_{BC}]}{[B'_{BC}C]} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{[ABA']}{AA'C} = \frac{[ABB'_{BC}]-[A'BB'_{BC}]}{[AB'_{BC}C]-[A'B'_{BC}C]} = \frac{1}{k}。$$

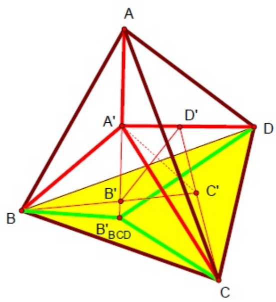
同理可得 $\dfrac{[AA'C]}{[A'BC]} = \dfrac{1}{k}$。於是有 $\dfrac{[ABA']}{1} = \dfrac{[AA'C]}{k} = \dfrac{[A'BC]}{k^2}$，得證。 □



2.3.3 體積等比定理

定理. 取比值為 k 的同比例分點 A'，則 $\dfrac{[ABCA']}{1} = \dfrac{[ABA'D]}{k} = \dfrac{[AA'CD]}{k^2} = \dfrac{[A'BCD]}{k^3}$。

證明. 由三維存在唯一定理內容，延長 $\overline{AA'}$ 交平面 BCD 於點 B'_{BCD}，由 2.3.2：



$$\begin{aligned}
& [ABCB'_{BCD}]:[ABB'_{BCD}D]:[AB'_{BCD}CD] \\
& = [A'BCB'_{BCD}]:[A'BB'_{BCD}D]:[A'B'_{BCD}CD] = [BCB'_{BCD}]:[BB'_{BCD}D]:[B'_{BCD}CD] \\
& = 1:k:k^2 \\
\Rightarrow\quad & [ABCA']:[ABA'D]:[AA'CD] \\
& = ([ABCB'_{BCD}]-[A'BCB'_{BCD}]):([ABB'_{BCD}D]-[A'BB'_{BCD}D]) \\
& \qquad :([AB'_{BCD}CD]-[A'B'_{BCD}CD]) \\
& = 1:k:k^2.
\end{aligned}$$

同理有 $[ABA'D]:[AA'CD]:[A'BCD] = 1:k:k^2$

於是有 $\dfrac{[ABCA']}{1} = \dfrac{[ABA'D]}{k} = \dfrac{[AA'CD]}{k^2} = \dfrac{[A'BCD]}{k^3}$，得證。

在此代入 $k=2$ 即為研究動機中原題的解。 □

2.3.4 n 維體積等比定理

定理. 取單體 $A_1A_2\dots A_{n+1}$ 比值為 k 的同比例分點 A_1'，則

$$\frac{[A_1A_2\dots A_nA_1']}{1}=\frac{[A_1A_2\dots A_{n-1}A_1'A_{n+1}]}{k}=\cdots=\frac{[A_1'A_2\dots A_{n+1}]}{k^n}\text{。}$$

證明. 設$(n-1)$維單體 $A_2A_3\dots A_{n+1}$ 的分點單體為 $B_2'B_3'\dots B_{n+1}'$，以下由數學歸納法證明，已知 $n=1$ 成立，假設$(n-1)$成立。由 n 維存在唯一定理內容，延長 $\overline{AA'}$ 交$(n-1)$維單體 $A_2A_3\dots A_{n+1}$ 於點 B_2'，由$(n-1)$維體積等比定理：

$$\begin{aligned}
&[A_1A_2A_3\dots A_nB_2']:[A_1A_2A_3\dots A_{n-1}B_2'A_{n+1}]:\cdots:[A_1B_2'A_3\dots A_{n+1}] &&(n\text{ 個 }n\text{ 維單體})\\
&=[A_1'A_2A_3\dots A_nB_2']:[A_1'A_2A_3\dots A_{n-1}B_2'A_{n+1}]:\cdots:[A_1'B_2'A_3\dots A_{n+1}] &&(n\text{ 個 }n\text{ 維單體})\\
&=[A_2A_3\dots A_nB_2']:[A_2A_3\dots A_{n-1}B_2'A_{n+1}]:\cdots:[B_2'A_3\dots A_{n+1}] &&(n\text{ 個}(n-1)\text{維單體})\\
&=1:k:\cdots:k^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad &[A_1A_2\dots A_nA_1']:[A_1A_2\dots A_{n-1}A_1'A_{n+1}]:\cdots:[A_1A_1'\dots A_{n+1}]\\
&=([A_1'A_2A_3\dots A_nB_2']-[A_1'A_2A_3\dots A_nB_2'])\\
&\quad:([A_1'A_2A_3\dots A_{n-1}B_2'A_{n+1}]-[A_1'A_2A_3\dots A_{n-1}B_2'A_{n+1}]):\cdots\\
&\quad:([A_1'B_2'A_3\dots A_{n+1}]-[A_1'B_2'A_3\dots A_{n+1}])\\
&=1:k:\cdots:k^{n-1}
\end{aligned}$$

同理有

$$[A_1A_2\dots A_{n-1}A_1'A_{n+1}]:[A_1A_2\dots A_1'A_nA_{n+1}]:\cdots:[A_1'A_2\dots A_{n+1}]=1:k:\cdots:k^{n-1}$$

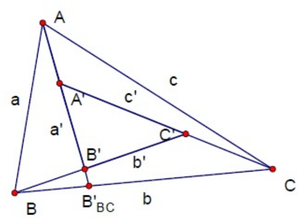
於是 $\dfrac{[A_1A_2\dots A_nA_1']}{1}=\dfrac{[A_1A_2\dots A_{n-1}A_1'A_{n+1}]}{k}=\cdots=\dfrac{[A_1'A_2\dots A_{n+1}]}{k^n}$，得證。 □

2.4 邊長關係

2.4.1 平方和定理

定理. 三角形 ABC 三邊長平方和與其比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ 三邊長平方和比值為：$\dfrac{\overline{A'B'}^2+\overline{B'C'}^2+\overline{C'A'}^2}{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2}=\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}$ ，與面積定理的比值相同。

證明. 記 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$, $\overrightarrow{A'B'}=\vec{a'}$, $\overrightarrow{B'C'}=\vec{b'}$, $\overrightarrow{C'A'}=\vec{c'}$。



如圖，由 2.1.2 推論：$\vec{a'}=\dfrac{k^2-1}{k^2+k+1}\overrightarrow{AB'_{BC}}=\dfrac{k^2-1}{k^2+k+1}\left(\vec{a}+\dfrac{1}{k+1}\vec{b}\right)$

因而有：

$$\begin{aligned}
&|\vec{a'}|^2+|\vec{b'}|^2+|\vec{c'}|^2\\
&=\left(\frac{k^2-1}{k^2+k+1}\right)^2\left(\frac{k^2+2k+2}{(k+1)^2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)+\frac{2}{k+1}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

代入 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=-|\vec{a}|^2$

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2+k+1}\right)^2\times\left(\frac{k^2+2k+2}{(k+1)^2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)+\frac{-1}{k+1}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)\right)$$
$$=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)$$
$$=\frac{(k-1)^3}{k^3-1}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)$$ ，得證。 □

2.5 分點軌跡

2.5.1 二維軌跡定理(橢圓)

定理. 對於任意固定的 A, B, C 三點，在同比例分點比值 k 在實數域變動時，其同比例分點 A' 的集合為一橢圓，且 A', B', C' 所構成的三橢圓全等並且傾角相等。

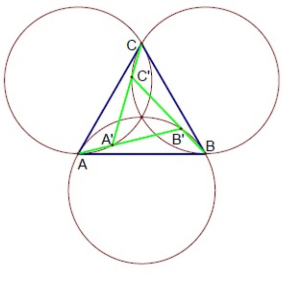
證明. 先由其特殊情況討論，取三角形 ABC 為正三角形時，由全等三角形易知三角形 $A'B'C'$ 亦為正三角形，取三角形 ABC 重心 G，$\angle BGC=120^\circ$

(1) $k>0$：點 C' 在三角形 ABC 內，$\angle BC'C=180^\circ-\angle A'C'B'=120^\circ$

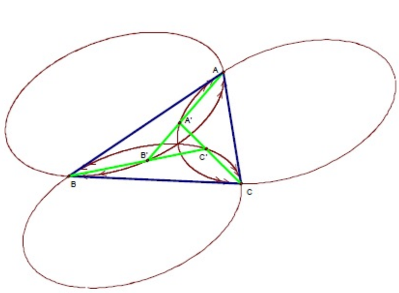
(2) $k<0$：點 C' 在三角形 ABC 外，$\angle BC'C=\angle A'C'B'=60^\circ$

(3) $k=0$：點 $C'=B$

綜合三點，可知無論 k 為何值 B, C, C', G 四點共圓，且 $k=1$ 時已特別定義 C' 為三角形重心，如此圖形得以連續，點 C' 隨 k 值變化在圓上移動。同理點 A', B' 的軌跡各為一圓，且 A', B', C' 三點所決定的三圓共點於三角形 ABC 中心。



由於伸縮變換後平行線上的比例不變，故其比值為 k 的條件不變，同時正三角形 ABC 變為任意三角形 ABC，軌跡三圓變為軌跡三全等橢圓，且三橢圓傾斜方向一致並交於三角形 ABC 重心，如圖。 □



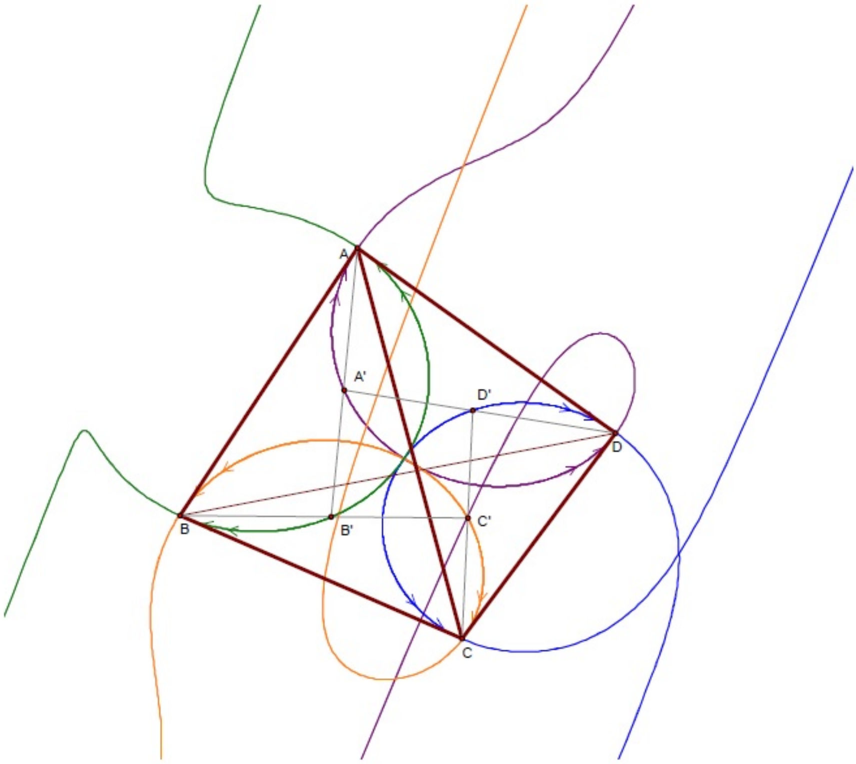
推論 4 (同重心推論). 分點三角形與原三角形重心共點。

在正三角形時顯然成立，而伸縮變換過程中重心不變，故可推廣至任意三角形。 由此推論可證明 2.6.1 的外心軌跡定理，在座標化或是複數解析的過程中取重心 G 為原點將使這些證明方便許多。

2.5.2 三維軌跡定理

空間中任意固定的 A, B, C, D 四點，在其同比例分點比值 k 在實數域變動時，其同比例分點 A' 的集合為兩斜橢圓錐的交集，B', C', D' 同理。

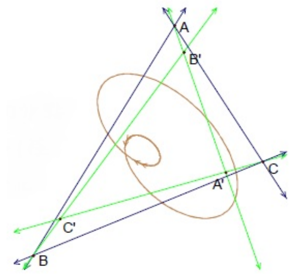
記 B'_{BCD} 之橢圓軌跡為 Γ^{B}_{BCD}，由三維存在唯一定理內容知點 A' 在 $\overleftrightarrow{AB'_{BCD}}$ 上，即 k 值變化時所有的 A' 在以 A 為頂點、Γ^{B}_{BCD} 為截面的斜橢圓錐上，同理亦在以 D 為頂點、Γ^{A}_{ABC} 為截面的斜橢圓錐上，即 A' 的軌跡為這兩個斜橢圓錐的交集。經由 GSP 繪圖可見其軌跡。



2.6 其他軌跡

2.6.1 外心軌跡定理($n = 1/3$ 玫瑰線伸縮)

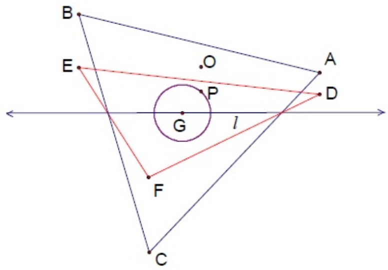
定理. 在同比例分點比值 k 在實數域變動時，三角形 ABC 的分點三角形 $A'B'C'$ 的外心所形成的軌跡是玫瑰線 $r = \cos\dfrac{1}{3}\theta$(極座標)伸縮後的圖形，其中伸縮方向與原三角形相對於正三角形的伸縮方向垂直，且伸縮比例相同。



證明此定理需要用到兩個引理：

伸縮變換定義：
以直線 l 為軸將點 A 伸縮 s 倍($s>0$)，得點 B，意即由點 A 作直線 l 的垂線，垂點為 H，取點 B 使 $\overrightarrow{HB}=s\overrightarrow{HA}$。直觀而言就是將圖形以垂直 l 的方向拉長 s 倍。

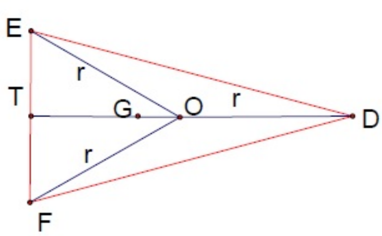
引理 1 (對應外心). 給定正三角形 ABC 及伸縮比例 s，過重心 G 做直線 l。以 l 為軸將 ABC 伸縮 s 倍，得 DEF，取其外心 O 再以 l 為軸將 O 伸縮 s 倍，得 P。稱點 P 為 ABC 以直線 l 伸縮 s 倍的對應外心。
將 ABC 以 G 為中心旋轉，則其對應外心 P 的軌跡為以 G 為中心的圓，且當 $\overline{GA}$ 與直線 l 夾角為 θ 時，$\overline{GP}$ 與直線 l 夾角為 3θ。(圖為 $s<1$ 情況)



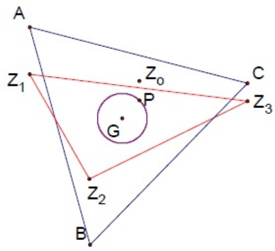
證明. 方法主要是利用伸縮變換後重心 G 不變，以 G 為中心、$\overline{GA}$ 為單位長、直線 l 為 x 軸建立複數平面。先預測 P 的位置，再以複數解析反推證明 O 為三角形 DEF 外心。
首先計算軌跡圓半徑，令 $\overline{GA}=1$，當旋轉正三角形至 A 在直線 l 上時，顯然有 $O\equiv P$，$\overline{EF}=s\sqrt{3}$，點 O 為三角形 DEF 外心。
延長 $\overline{OD}$ 交 $\overline{EF}$ 於點 T，則 $\overline{TO}=\frac{3}{2}$。
令 $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=r$，由畢氏定理有：

$$\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-r\right)^2=r^2 \Rightarrow r=\frac{s^2+3}{4}$$

而所求軌跡圓半徑即為：$\overline{GO}=1-r=\frac{1-s^2}{4}$



當正三角形由以上情形旋轉 θ 時，可設 A, B, C, P 的複數座標分別為：
$A=\cos\theta+i\sin\theta,\ B=\cos(\theta+120^\circ)+i\sin(\theta+120^\circ),\ C=\cos(\theta-120^\circ)+i\sin(\theta-120^\circ),$
$P=\dfrac{1-s^2}{4}(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).$
再由伸縮變換知 D, E, F, O 的複數座標為：
$z_1=\cos\theta+is\sin\theta,\ z_2=\cos(\theta+120^\circ)+is\sin(\theta+120^\circ),\ z_3=\cos(\theta-120^\circ)+is\sin(\theta-120^\circ),$
$z_o=\dfrac{1-s^2}{4}\cos 3\theta+\dfrac{1-s^2}{4s}i\sin 3\theta$



由於欲證為 O 是 D, E, F 外心，故先證 O 在 $\overline{EF}$ 中垂線上，即：

$$\arg((z_2-z_3)i)=\arg\left(z_o-\frac{z_2+z_3}{2}\right).$$

由三角公式計算：

$$\begin{aligned} i(z_2-z_3) &= i[\cos(\theta+120^\circ)-\cos(\theta-120^\circ)]-s[\sin(\theta+120^\circ)-\sin(\theta+120^\circ)] \\ &= i[-\sin\theta\sin 120^\circ]-s[\cos\theta\sin 120^\circ]=-\sin 120^\circ(s\cos\theta+i\sin\theta) \end{aligned}$$

由於 $z_1+z_2+z_3=0,$

$$\begin{aligned} z_o-\frac{z_2+z_3}{2} &= z_o+\frac{z_1}{2}=\frac{(1-s^2)\cos 3\theta+2\cos\theta}{4}+i\times\frac{(1-s^2)\sin 3\theta+2s^2\sin\theta}{4s} \\ &= \frac{s\cos\theta}{4s}\left[(1-s^2)(4\cos^2\theta-3)+2\right]+\frac{i\sin\theta}{4s}\left[(1-s^2)(-4\sin 3\theta+3)+2s^2\right]. \end{aligned}$$

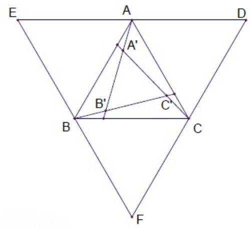
故只需證

$$\begin{aligned} & (1-s^2)(4\cos^2\theta-3)+2=(1-s^2)(-4\sin 3\theta+3)+2s^2 \\ \Leftrightarrow\quad & (1-s^2)(4\cos^2\theta-3)+2-(1-s^2)(-4\sin^2\theta+3)-2s^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (1-s^2)(4\cos^2\theta-3+4\sin^2\theta-3+2)=(1-s^2)(4-3-3+2)=0 \end{aligned}$$

為恆等式，得證 O 在 $\overline{EF}$ 中垂線，同理 O 亦在 $\overline{DE}, \overline{FD}$ 中垂線上，為三角形 DEF 外心。 □

引理 2 **(分點三角形與反中點三角形比例關係).** 正三角形 ABC 的分點三角形 $A'B'C'$ 與三角形 ABC 的反中點三角形 DEF(即 $k=-1$ 的分點三角形)邊長比例與其邊的夾角 φ($\overrightarrow{EF}$ 與 $\overrightarrow{B'C'}$ 的夾角)的關係為 $\overline{B'C'}=\overline{EF}\cos\varphi$。

證明. 先求原三角形與分點三角形的邊長關係，在 $k>0$ 之情況($k<0$ 同理可得)設 $\angle CBC'=\theta$，有 $\angle BCC'=60^\circ-\theta$。設 $\overline{BC}=1, \overline{BB'}=d, \overline{BC'}=t$, 則 $\overline{B'C'}=|t-d|$, 由正弦定理：$\dfrac{1}{\sin 120^\circ}=\dfrac{t}{\sin(60^\circ-\theta)}=\dfrac{d}{\sin\theta}$



$$
\begin{aligned}
|t-d| &= \frac{1}{\sin 120^\circ}|\sin(60^\circ-\theta)-\sin\theta| = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big|\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta-\sin\theta\Big| \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Big|\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\Big| = 2|\cos(\theta+60^\circ)| = 2|\cos\varphi|
\end{aligned}
$$

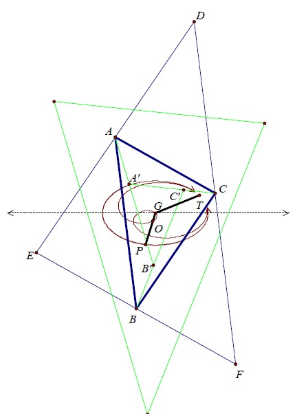
易得 $\overrightarrow{EF}$ 與 $\overrightarrow{B'C'}$ 的夾角 $-90^\circ \le \varphi \le 90^\circ$, $\cos\varphi \ge 0^\circ$, $d = 2|\cos\varphi| = 2\cos\varphi$, 得證。 □

證明. (定理2.6.1)

將一三角形以某直線 l 為軸伸縮 $\frac{1}{s}$ 倍成正三角形，令此正三角形的反中點三角形以直線 l 為軸伸縮 s 倍的對應外心為 T，重心為 G，以 $\overrightarrow{GT}$ 為單位長和 $\theta = 0$ 處建立極座標。由引理 2，此反中點三角形在以 G 為中心旋轉的對應外心軌跡為一圓，此圓極座標方程為 $r = \theta$。

在引理 1、2 中代入 $\varphi = \frac{1}{3}\theta$，易知在引理 1 中旋轉 φ 的正三角形和引理 2 中夾角為 φ 的正三角形位似，且位似中心為 G，又由引理 2 知位似比例為 $\cos\varphi = \cos\frac{1}{3}\theta$。由於引理 1 中三角形轉角為 φ 時對應外心極座標為 $(1,\theta)$，上述位似後座標為 $(\cos\frac{1}{3}\theta,\theta)$。

由於伸縮後位似的性質不變，將上述圖形以直線 l 為軸伸縮 $\frac{1}{s}$ 倍後得一般情況下分點三角形外心軌跡為極座標方程 $r = \cos\frac{1}{3}\theta$ 的伸縮，且伸縮方向與原三角形相對於正三角形伸縮方向垂直、伸縮比例相同。 □



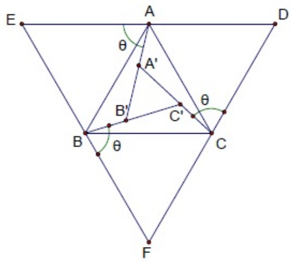
2.7 同比例分點的等價命題

前述 2.1 存在唯一定理的構造法；2.3 原題推廣的結論；2.6.1 引理 1、引理 2 以參數 θ

表達的形式(僅限二維)，可以視為同比例分點不同表達形式的等價命題。以下以參數 θ 表達形式的等價命題為例。

2.7.1 以參數 θ 表示

給定一正三角形 ABC，取其反中點三角形 DEF(A為 $\overline{DE}$ 中點，其餘類推)，以 A 為中心將 $\overleftrightarrow{DE}$ 旋轉角 θ；以 C 為中心將 $\overleftrightarrow{FD}$ 旋轉角 θ，則此二直線交到的點定為相對於 A 的同比例分點A'，同理得點 B', C'。
由於轉 θ 和 $(\pi+\theta)$ 是一樣的，固定轉角 θ 的範圍為 $0 \le \theta < \pi$。



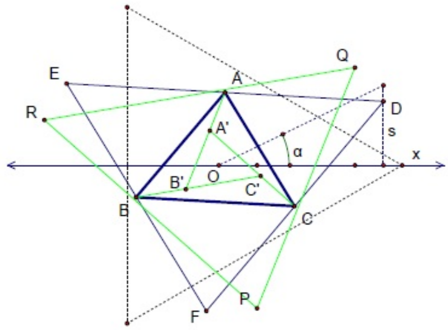
由 2.6.1 引理 1 有 $\overline{B'C'} = \overline{EF}\cos\theta$，又由 2.2.2 面積定理有 $[A'B'C'] = \dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}[ABC]$，
可得 θ 與 k 的代換關係為：$(2\cos\theta)^2 = \dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}$
又當 $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 且$(k > 1 \vee k \le -1)$，$\cos\theta > 0$，$2\cos\theta = \sqrt{\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}}$
當 $\dfrac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ 且 $-1 \le k < 1$，$\cos\theta \le 0$，$2\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}}$
可建立 θ 與 k 的一一對應關係。
以下是幾個特殊的 θ 與 k 值對應：
$\theta = 0$：$k = -1$；$\theta = \dfrac{\pi}{3}$：$k \to \pm\infty$；$\theta = \dfrac{\pi}{2}$：$k = 1$；$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$：$k = 0$。
建立這樣的對應關係後，利用伸縮變換就可以推廣至任意三角形。以 k 值對應 θ 值，因此比值為 k 的分點三角形亦可稱為角度為 θ 的分點三角形。
後面所提及的角度 $(\theta + t\pi)$ 等價於 θ(t 為整數)。

2.8 相似分點單體

以下分點三角形以 2.7.3 參數 θ 的形式做討論。

2.8.1 相似分點三角形

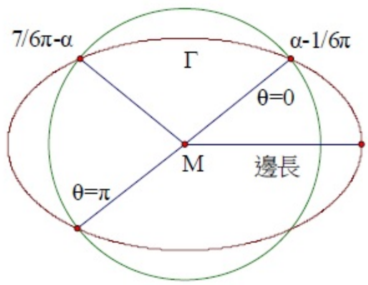
分點三角形與原三角形相似當 θ 的值為：
$0, \dfrac{1}{3}\pi, \dfrac{2}{3}\pi$，同向相似；$-\alpha, (-\alpha + \dfrac{1}{3}\pi), (-\alpha + \dfrac{2}{3}\pi)$，反向相似。
共六種情形。
其中 α 為反中點三角形以 x 軸伸縮成正三角形後，由標準三角形旋轉來的角度。
又當原三角形為等腰三角形時 (1)、(2) 會有重複，剩三種情形；當原三角形為正三角形的時候，任意角度都可，不適用上述。 首先定義標準狀態的正三角形，也就是直角坐標系上，重心在原點且其中一頂點在 x 軸正向的正三角形。
現將此三角形以原點為中心旋轉角 α，在以 x 軸為軸伸縮 s 倍($s \ne 1$，若 $s = 1$ 正三角形都相似)，得 $\triangle DEF$，在取其三邊中點 A, B, C，定其為原三角形的三頂點。因為是中點有 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。



由 2.6 定理證明內容可知：角度為 θ 的分點三角形 $A'B'C'$，與標準狀態三角形旋轉 $(\alpha+\theta)$ 後再以 x 軸為軸伸縮 s 倍的三角形 PQR，為以原點為中心的位似。又由於 $\triangle DEF$ 與 $\triangle PQR$ 面積相等，欲找出 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ 的情況，只需找出 $\triangle PQR \cong \triangle DEF$ 的情況。

易知若 θ 成立則 $\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)$、$\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$ 也成立(即三邊輪換)。以邊長相等下手，若 $\triangle PQR \cong \triangle DEF$，則 $\overline{DE}=\overline{PQ} \vee \overline{QR} \vee \overline{RP}$，不失一般性設 $\overline{DE}=\overline{PQ}$(其餘兩邊可用輪換)。

$\overline{PQ}$ 是以標準狀態正三角形的旋轉 $(\alpha+\theta)$ 再伸縮的其中一邊，令其為邊 $\overline{MN}$，$\overline{PQ}$ 長度等價於以 M 為中心將 N 旋轉 $\left(\alpha+\theta-\frac{1}{6}\pi\right)$ 再伸縮，θ 變化得一橢圓 Γ。而 $\overline{DE}$ 是以標準狀態正三角形的旋轉 α 再伸縮的其中一邊，其長度等價於以 M 為中心將 N 旋轉 $\left(\alpha-\frac{1}{6}\pi\right)$ 再伸縮。



目的是求出 $\overline{PQ}$ 何時與 $\overline{DE}$ 相等，故以 M 為中心 $\overline{DE}$ 為半徑做出圓，看它何時與橢圓 Γ 相交。又 $\overline{DE}$ 小於(或等於)標準狀態正三角形邊長，故必有交點且在 $0 \le \theta < \pi$ 有兩個交點(等於時一個)，由前述與橢圓的對稱性可知分別為旋轉 $\left(\alpha-\frac{1}{6}\pi\right)$ 與 $\left(\frac{7}{6}\pi-\alpha\right)$ 的結果，即 $\theta=0$ 與 $\theta=\frac{4}{3}\pi-2\alpha$。

$\theta=0$ 就是三角形 DEF 本身，顯然會全等(同向全等)。$\theta=\frac{4}{3}\pi-2\alpha$ 可視為與 $\theta=-2\alpha$ 同狀況，而此狀況為標準三角形旋轉 $-\alpha$ 再伸縮，與旋轉 α 再伸縮的圖形以 x 軸對稱，故也全等(反向全等)。

綜合上述，在一般狀況下會有六組解，分別為 $\theta=0 \vee \frac{1}{3}\pi \vee \frac{2}{3}\pi$，同向相似；$\theta=-\alpha \vee \left(-\alpha+\frac{1}{3}\pi\right) \vee \left(-\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)$，反向相似。

但在 α 為 $\frac{1}{3}\pi$ 的倍數時，也就是原三角形為等腰三角形時，上述兩種情況可對應，因此只有三組解。(另一種看法是等腰三角形同向相似和反向相似一樣。)

3 結論與未來展望

3.1 存在唯一定理

對於任意 n 維單體，存在比值為 k 的分點單體，且此單體唯一。其中 n 為奇數且 $k=-1$ 不存在唯例外。

存在性部分已由維度推廣及構造得到完整的結論。而 n 維唯一性證明中 $\overleftrightarrow{A_1A_1'}$ 平行於$(n-1)$維單體 $A_2A_3\dots A_{n+1}$ 的部分尚未給出完整結論，僅猜測該狀況下偶數維度會有唯一解($k=-1$)；奇數維度無解。

3.2 分點單體的幾何度量

單體 $A_1A_2\dots A_{n+1}$ 與其比值為 k 的分點單體 $A_1'A_2'\dots A_{n+1}'$ 體積比例為 $[A_1'A_2'\dots A_{n+1}'] = \frac{(k-1)^{n+1}}{k^{n+1}-1}[A_1A_2\dots A_{n+1}]$。

3.3 幾何度量成等比(原題推廣)

取單體 $A_1A_2\dots A_{n+1}$ 比值為 k 的同比例分點 A_1'，則

$$\frac{[A_1A_2\dots A_nA_1']}{1} = \frac{[A_1A_2\dots A_{n-1}A_1'A_{n+1}]}{k} = \cdots = \frac{[A_1'A_2\dots A_{n+1}]}{k^n}\text{。}$$

3.4 邊長 n 次方和

平方和定理：三角形 ABC 三邊長平方和與其比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ 三邊長平方和比值為：$\frac{\overline{A'B'}^2+\overline{B'C'}^2+\overline{C'A'}^2}{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2} = \frac{(k-1)^3}{k^3-1}$，與面積定理的比值相同。
未來希望能夠得到這個命題的 n 維推廣形式，預期可得到和 n 維體積定理的比例式有密切關聯的結果。

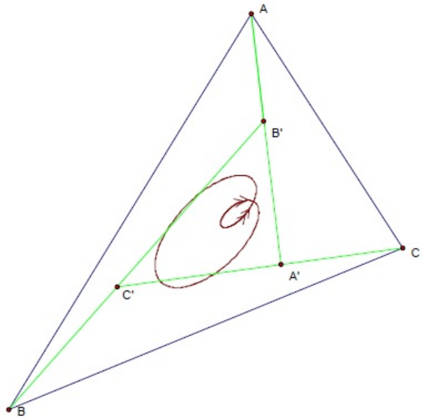
3.5 分點軌跡

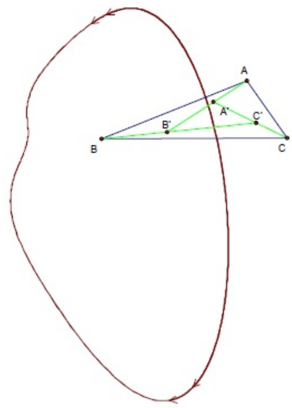
當同比例分點的比值 k 在實數域變動時，二維同比例分點的軌跡為橢圓；三維同比例分點的軌跡為兩斜橢圓錐的交集。
這個命題在三維的結論基本上是直接由二維的結論推論而來，對此空間曲線的性質其實未全了解。在推廣到四為時將會面臨的是兩個四維空間曲面(二維面)的交集，我想僅是證明其交集為一個四維封閉曲線就遠超我的能力範圍。

3.6 其他軌跡

外心軌跡：當同比例分點的比值 k 在實數域變動時，二維分點三角形的外心軌跡為 $n=\frac{1}{3}$ 的玫瑰線(極座標方程為 $r=\cos\frac{1}{3}\theta$)伸縮變換後的圖形。
除了外心，尚有考慮分點三角形的內心、旁心等軌跡，如下圖。旁心軌跡(圖為相對於 A 之旁心的例子)似乎無較為顯著的規律，目前較有希望的為內心軌跡。

另外也希望未來將這部分推廣至高維度，對於與分點四面體或分點單體相關的點之軌跡有所探討。





3.7 等價命題

透過 2.1 存在性的構造法與 2.3 的結論逆推，可得到 n 為同比例分點的等價命題。
透過 2.6.1 推論過程中所引入的參數 θ，可得到二維同比例分點的等價命題，並且有 θ 和 k 一一對應的關係為：
$0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 且$(k > 1 \vee k \le -1)$，$2\cos\theta = \sqrt{\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}}$；
$\dfrac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ 且 $-1 \le k < 1$，$2\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}}$。
並且可利用此結論證明 2.8 二維情況。

3.8 相似單體

以 θ 表示，分點三角形與原三角形相似當 θ 的值為：

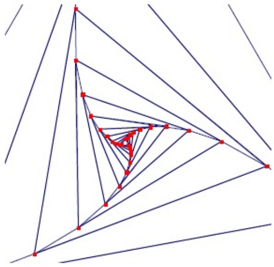
(1) $0, \dfrac{1}{3}\pi, \dfrac{2}{3}\pi$，同向相似。

(2) $-\alpha, \left(-\alpha + \dfrac{1}{3}\pi\right), \left(-\alpha + \dfrac{2}{3}\pi\right)$，反向相似。

共六種情形，其中 α 為反中點三角形以 x 軸伸縮成正三角形後，由標準三角形旋轉來的角度。
又當原三角形為等腰三角形時(1)、(2)會有重複，剩三種情形；當原三角形為正三角形的時候，任意角度都可，不適用上述。
這個命題在做其他軌跡知前就已經考慮過，但一直沒有好的想法，只知到非所有分點三角形都和原三角形相似。但在研究外心軌跡時引入以 θ 表示二維同比例分點的方式，意外地為這個命題提供一個好的詮釋與推論方式。
二維以上的分點單體就不如正三角形好處理，因為事實上正四面體本身的分點四面體就不是正四面體。實質原因可能是命題本身沒有對稱性，只有輪換性，因此只能保證 $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$ 等長，對於 $\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$ 目前沒有特別方法。

3.9 多次同比例分點

除了上述數個性質，未來還可向做多次分點單體研究。以二維為例，三角形 ABC 的比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ 稱為一階分點三角形；三角形 $A'B'C'$ 的分點三角形 $A''B''C''$ 稱為二階分點三角形，以此類推。



目前發現以此做多階(甚至無窮階)分點三角形與等角螺線有密切關聯，只是它的形式使離散而非連續的。例如等角螺線以其中心做任意比例位似變換與原圖形全等，但無窮階分點三角形只有在特定比例(即分點三角形與原三角形邊長比的冪次)才符合此性質。也就是說在 $k \to 0$ 或 $k \to \infty$ 時對應 A 的每一階分點會形成夾角為 $\frac{\pi}{6}$ 的等角螺線。

3.10 其他性質

除了上述歸納出的性質，同比例分點的圖形想必還有許多有趣的性質等著我發掘、推廣。

參考文獻

[1] 數學奧林匹亞訓練題，《中等數學》8月號第40頁，2008年。

[2] 黃家禮等，梅內勞斯定理，《幾何明珠》第四章，九章數學，初版，2000年。

[3] 維基百科，單體(單純形), http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%95%E7%BA%AF%E5%BD%A2

[4] Rose, Wolfram MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/Rose.html