天「蘿」地「網」— 網格蘿莉場問題之相關研究

國立台中第一高級中學 陳和謙
指導老師 包宏信

Abstract

We introduce the new problem of loli fields in the grids. We investigate various properties of loli fields and their applications as well. The function $f(m,n)$ is introduced as the minimum number of lolis required in a loli field problem. We determined the exact values of $f(n,1)$ and $f(n,2)$. We also obtained a detailed specific result of some numbers and the upper bound of $f(n,3)$. Besides, there are also some result on the lower bound of $f(m,n)$ and the upper bound of $f(m,n)$. Finally, some lemmas are found for future research.

中文摘要

網格蘿莉場問題是一個原創的問題，雖然如此，其可研究性和其應用性都相當的廣泛，於是本文就對此進行深入的研究。本研究主要探討在 $m\times n$ 方格板上的蘿莉場中所需的最小蘿莉數$f(m,n)$，這次研究完整給出 $f(n,1)$ 和 $f(n,2)$ 的通式解，並對 $f(n,3)$ 給出了較詳盡的特殊值和上界，也說明了 $f(m,n)$ 的下界和估計上界的方法，並發現一些定理，可供未來更深入研究運用。

1 簡介

1.1 研究動機

去年暑假時，我靈機一動想到了一個自編題(此題稱為「網格蘿莉場問題」)：

「首先我們定義方格板上兩個格子間的「距離」，是指兩個格子橫向距離和縱向距離的和。也就是說，如果格子 A 在第 x 行第 y 列，格子 B 在第 a 行第 b 列，則兩個格子間的距離就是$|x-a|+|y-b|$。

假設現在有一個 5×5 的方格板，格子裡住者一些蘿莉和蘿莉控。每個蘿莉都可以對所有格子依照下面的方式產生蘿莉場：若蘿莉所在的格子 A 和格子 B 距離為 k，則此蘿莉對格子 B 造成 $1/k$ 的蘿莉場。蘿莉造成的蘿莉場不具方向性(為純量)且可以累加。此外，若一個格子的蘿莉場不少於 1，則住在上面的蘿莉控會被迷倒。試問這上面至少要住幾個蘿莉，才能迷倒其他格子裡面所有的蘿莉控？」

當時我比較想知道的是究竟要大概多少個蘿莉可以迷倒多大範圍的蘿莉控，又此時蘿莉的擺法究竟是如何。在本文中，為了簡化計算的部分，將把蘿莉造成蘿莉場的公式改為指數遞減的形式，去研究各種大小的方格板上所需的蘿莉數，或給出其上界和下界。

1.2 研究目的

在蘿莉造成的蘿莉場為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$(其中 k 為蘿莉所在的格子和被造成蘿莉場的格子之間的距離)時，把 $m\times n$ 方格板中所需最少的蘿莉數給定，並找出其蘿莉的排列，或運用構造及估計的方法給出其最少蘿莉數的上界和下界。

1.3 名詞定義

1. $a\times b$ 方格板：指的是每橫排有 a 個方格，每直行有 b 個方格的長方形方格板。
2. 方格座標化：即將方格予以座標編號的方式，此時將從左往右數第 x 格，從下往上數第 y 格定為 (x,y)。

3. $d[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]$：表示方格座標化後 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2) 兩個格子間的距離，在此特別定義其距離為 $|a_1-a_2|+|b_1-b_2|$ (這樣的距離有時也稱為曼哈頓距離)。

4. $\sigma[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]$：表示位於 (a_2,b_2) 的蘿莉對 (a_1,b_1) 的格子造成的蘿莉場大小，在此我們訂為 $1/2^{d[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]-1}$。但如果 (a_2,b_2) 處沒有蘿莉，則定其值為 0。特別地，我們會發現當 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2) 重合時其值為 2，但在一般情況下我們不需對這種情況做特別處理，因為我們只考慮其他空格的情況。

5. $\delta(x,y)$：表示 (x,y) 是否有蘿莉的狀態函數，若 (x,y) 有蘿莉則 $\delta(x,y)=1$，反之則 $\delta(x,y)=0$。

6. 排列：一個一定大小的方格板，上面有一些蘿莉，統稱為一個排列。特別地，如果一個排列是由 $a\times b$ 大小的方格來構成，則稱為 $a\times b$ 的排列。

7. $M(x,y)$：表示座標 (x,y) 的蘿莉場大小。令 S 代表一個 $a\times b$ 的排列，G 表示格子，那麼定義 $M(x,y)=\sum\limits_{G\in S}\sigma[(x,y),G]\delta(G)$。

8. $M(x,y)\Big|_R$：令 S 代表一個 $a\times b$ 的排列，G 表示格子，R 是一個 S 的子集，則定義 $M(x,y)\Big|_R=\sum\limits_{G\in R}\sigma[(x,y),G]\delta(G)$。

在第 5、6、8 條的定義中，我們可以在符號的右下角加上代表排列的符號來進一步說明我們所指的是哪一個排列，例如對於某排列 S 的某個方格 (x,y)，我們可以分別改記為 $\delta_S(x,y)$、$M_S(x,y)$ 以及 $M_S(x,y)\Big|_R$。

9. 合法排列：對於一個 $a\times b$ 的排列 S，如果所有方格 (x,y) 均滿足 $M(x,y)\geq 1$，則該排列為合法排列，或是稱為 $a\times b$ 的合法排列。

10. $f(a,b)$：此函數的值定義為一 $a\times b$ 的合法排列的最少可能蘿莉數。此外，對於 $k=1,\ 2,\ 3,$ 我們定義 $f_k(n)$ 為最大正整數 m 使得 $f(m,k)=n$。

11. 最佳合法排列：若一個 $a\times b$ 的排列恰有 $f(a,b)$ 個蘿莉，則此排列為最佳合法排列。

12. $L[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]$：為所有滿足 $a_1\leq x\leq a_2$、$b_1\leq y\leq b_2$ 的方格所形成的集合。為了使這符號有意義，我們規定 $a_1\leq a_2$、$b_1\leq b_2$。

13. 右順位空格：對於某一格 (x,y)，倘若存在 $n>x$ 使得 $\delta(n,y)=0$ 且對於任意正整數 k 介於 x 和 n 之間，則有 $\delta(k,y)=1$，則稱 (n,y) 為 (x,y) 的右順位空格。

14. 優化：對於同樣大小的排列 S 和 S'，若對於 $(x,y)\in S$ 皆有：$M_{S'}(x,y)\geq M_S(x,y)$ 或 $M_{S'}(x,y)\geq 1$，則稱 S' 為 S 的優化。

15. 冗餘蘿莉場：指一個空格的蘿莉場多出 1 的部分，或一個已有蘿莉的空格被其他蘿莉造成的蘿莉場。

1.4 主要結果

定理 7. $f_1(n)=4n-1,\ f(n,1)=\left[\dfrac{n+4}{4}\right].$

定理 9. $f_2(n)=3n-2,\ f(n,2)=\left[\dfrac{n+4}{3}\right].$

定理 12. $f(9k+n,3)\leq 4k+\lceil\dfrac{n}{2}\rceil\ (12\leq n\leq 20,\ k\in Z_0).$

2 研究過程

2.1 基本性質探討

定理 1. 對任意正整數 a, b 皆有 $f(a,b) = f(b,a)$。

證明. 令 S 代表一個 $a \times b$ 的最佳合法排列，則構造 S' 為一 $b \times a$ 排列使得對於 $1 \le x \le b$, $1 \le y \le a$ 皆有 $\delta_{S'}(x,y) = \delta_S(y,x)$。由於 S 為合法排列，故

$$\begin{aligned} M_{S'}(x,y) &= \sum_{\substack{1 \le x' \le b \\ 1 \le y' \le a}} \sigma[(x,y),(x',y')]\delta_{S'}(x',y') \\ &= \sum_{\substack{1 \le x' \le b \\ 1 \le y' \le a}} \sigma[(y,x),(y',x')]\delta_S(y',x') \\ &= M_S(x,y) \ge 1 \end{aligned}$$

這個算式對任意 $(x,y) \in S$ 都適用，因此我們知道 S' 是一個合法排列，但注意到 $\delta_{S'}(x,y) = \delta_S(y,x)$ 所以 S' 的蘿莉數和 S 一樣多，而 S 原本是 $a \times b$ 的最佳合法排列，因此 $f(a,b) \ge f(b,a)$。同理 $f(a,b) \le f(b,a)$，因此有 $f(a,b) = f(b,a)$。 □

定理 2. 對任意正整數 a, b, c 皆有

(i) $f(a,c) + f(b,c) \ge f(a+b,c)$;

(ii) $f(c,a) + f(c,b) \ge f(c,a+b)$.

證明. 由定理 1，我們只需證 (i)。考慮兩個排列 A 與 B，A、B 分別是 $a \times c$ 和 $b \times c$ 的最佳合法排列。現在要構造合法排列 C 為一個 $(a+b) \times c$ 的排列，令 $P = L[(1,1),(a,c)]$、$Q = L[(a+1,1),(a+b,c)]$，且令

$$\delta_C(x,y) = \delta_A(x,y)\text{，對於 } (x,y) \text{ 屬於 } P \tag{1}$$

$$\delta_C(x,y) = \delta_B(x-a,y)\text{，對於 } (x,y) \text{ 屬於 } Q \tag{2}$$

則 $\forall (x,y) \in P$，我們有

$$M_C(x,y) \ge M_C(x,y)\Big|_P = \sum_{G \in P} \delta_C[(x,y),G]\sigma(G) = \sum_{G \in A} \delta_A[(x,y),G]\sigma(G) = M_A(x,y) \ge 1 \tag{3}$$

$\forall (x,y) \in Q$，我們有

$$M_C(x,y) \ge M_C(x,y)\Big|_Q = \sum_{G \in Q} \delta_C[(x,y),G]\sigma(G) = \sum_{G \in B} \delta_B[(x-a,y),G]\sigma(G) = M_B(x-a,y) \ge 1 \tag{4}$$

由(3)(4)知 C 也是合法排列，又由(1)(2)知 C 的蘿莉數量為 A 和 B 的總和，且 A 和 B 又都是最佳合法排列，故知存在一$(a+b) \times c$ 的合法排列只有$(f(a,c) + f(b,c))$ 個蘿莉，因此 $f(a,c) + f(b,c) \ge f(a+b,c)$。 □

定理 3. 若 S' 為 S 的優化，則當 S 是合法排列時，S' 亦是。反過來說，若 S' 不是合法排列，則 S 亦不是。

證明. $\forall (x,y) \in S$, 由定義知必有下列兩件事之其中一件：$M_{S'}(x,y) \ge M_S(x,y)$ 或 $M_{S'}(x,y) \ge 1$。但注意到 S 是合法排列，故 $M_S(x,y) \ge 1$，因此保證 $M_{S'}(x,y) \ge 1$。 □

引理 4. 若格子 (x,y) 的右順位空格為 (a,y)，則將 (x,y) 的蘿莉移到 (a,y) 後，$(x+1,y)$ 必有蘿莉。

證明. 由右順位空格的定義知 $a \geq x$。如果 $a = x+1$，則蘿莉移動到 (a,y) 後 $(x+1,y)$ 當然有蘿莉。如果 $a > x+1$，則由右順位空格的定義知 $(x+1,y)$ 有蘿莉，故得證。 □

定理 5. 有兩個皆為 $a \times b$ 的排列 S 和 S'，若其蘿莉的排列在 $P = L[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]$ 的地方都是完全相同的，則只要滿足下列條件就能確定 S' 是 S 的優化：

(i) 在 P 內 S' 是 S 的優化

(ii) 若 k 滿足 $b_1 \leq k \leq b_2$ 則

$$M_{S'}(a_2+1,k)\Big|_P \geq M_S(a_2+1,k)\Big|_P \text{ 且 } M_{S'}(a_1-1,k)\Big|_P \geq M_S(a_1-1,k)\Big|_P.$$

(iii) 若 k 滿足 $a_1 \leq k \leq a_2$ 則

$$M_{S'}(k,b_2+1)\Big|_P \geq M_S(k,b_2+1)\Big|_P \text{ 且 } M_{S'}(k,b_1-1)\Big|_P \geq M_S(k,b_1-1)\Big|_P.$$

證明. 規定 G 為格子，令 $P' = \{G | G \notin P\}$，則 P' 中的格子 (x,y) 有以下八種情況：

(1) $x > a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2$

(2) $x > a_2,\ y > b_2$

(3) $a_1 \leq x \leq a_2,\ y > b_2$

(4) $x < a_1,\ y > b_2$

(5) $x < a_1,\ b_1 \leq y \leq b_2$

(6) $x < a_1,\ y < b_1$

(7) $a_1 \leq x \leq a_2,\ y < b_1$

(8) $x > a_2,\ y < b_1$

其中情況(1)(3)(5)(7)是類似的、情況(2)(4)(6)(8)也是類似的，故我們只考慮(1)(2)的情況。

情況(1)中，我們希望有 S' 是 S 的優化，因此要有 $M_{S'}(x,y) \geq M_S(x,y)$。注意到

$$M_S(x,y) = M_S(x,y)\Big|_P + M_S(x,y)\Big|_P',\ M_{S'}(x,y) = M_{S'}(x,y)\Big|_P + M_{S'}(x,y)\Big|_P'$$

但是因為 S 和 S' 在 P' 的部分蘿莉是完全相同的，故應有 $M_S(x,y)\Big|_{P'} = M_{S'}(x,y)\Big|_{P'}$，因此我們只需證 $M_{S'}(x,y)\Big|_P \geq M_S(x,y)\Big|_P$。

由於 $x > a_2$，可假設 $x-(a_2+1) = m$。我們有

$$\begin{aligned} M_S(x,y)\Big|_P &= \sum_{(x',y')\in P} \sigma[(x,y),(x',y')]\delta[(x,y),(x',y')] \\ &= \sum_{\substack{a_1 \leq x' \leq a_2 \\ b_1 \leq y' \leq b_2}} \sigma[(x,y),(x',y')]\delta[(x,y),(x',y')] \\ &= \sum_{\substack{a_1 \leq x' \leq a_2 \\ b_1 \leq y' \leq b_2}} \sigma[(a_2+1+m,y),(x',y')]\delta[(x,y),(x',y')] \\ &= \sum_{\substack{a_1 \leq x' \leq a_2 \\ b_1 \leq y' \leq b_2}} \frac{1}{2^m}\sigma[(a_2+1,y),(x',y')]\delta[(x,y),(x',y')] \\ &= \frac{1}{2^m} M_S(a_2+1,y)\Big|_P \end{aligned}$$

同樣地有 $M_{S'}(x,y)\Big|_P = \dfrac{1}{2^m} M_{S'}(a_2+1,y)\Big|_P$，但由(ii)知

$$M_{S'}(a_2+1,y)\Big|_P \geq M_S(a_2+1,y)\Big|_P,$$

因此 $M_{S'}(x,y)\Big|_P \geq M_S(x,y)\Big|_P$。

情況(2)可以用類似的手法完成，首先我們也只需證 $M_{S'}(x,y)\Big|_P \geq M_S(x,y)\Big|_P$。接下來假設 $y-b_2=m$，我們可以類似上述而得到 $M_S(x,y)\Big|_P = \dfrac{1}{2^m}M_S(a_2,y)\Big|_P$ 以及 $M_{S'}(x,y)\Big|_P = \dfrac{1}{2^m}M_{S'}(a_2,y)\Big|_P$，這就把問題變為我們在情況(1)中解決過的，因此也有 $M_{S'}(x,y)\Big|_P \geq M_S(x,y)\Big|_P$。

情況(3)-(8)可以類似處理，因此我們知道對於 $G \in P'$, $M_{S'}(G)\Big|_P \geq M_S(G)\Big|_P$，也就是說在 P' 內 S' 是 S 的優化，但又由已知條件 P 內 S' 是 S 的優化，故 S' 是 S 的優化。 □

2.2 $n \times 1$ 方格板上的蘿莉場

首先我們有：

定理 6. 對於正整數 $a,\ b$，若 $a \geq b$，則 $f(a,1) \geq f(b,1)$。

證明. $a=b$ 時顯然。要證明此定理，只須證明 $f(a,1) \geq f(a-1,1)$，再運用數學歸納法即可。

考慮 $a\times1$ 的最佳合法排列 S。若 $(1,1)$ 處沒有蘿莉，則 $L[(2,1),(a,1)]$ 部份便是一個 $(n-1)\times1$ 的合法排列，蘿莉數恰為 $f(a,1)$。若 $(1,1)$ 處有蘿莉，假設 $(k,1)$ 是 $(1,1)$ 的右順位空格，則將 $(1,1)$ 的蘿莉移到 $(k,1)$，再將 $L[(2,1),(a,1)]$ 部分做為新排列 S'。對於 $l>k$，我們有 $M_{S'}(k-1,1)=M_S(k,1)-\sigma[(k,1),(1,1)]+\sigma[(k,1),(l,1)]>M_S(k,1)\geq 1$，又 S' 的 $L[(1,1),(k-1,1)]$ 部分又都是蘿莉，因此知 S' 是 $(n-1)\times 1$ 的合法排列，其蘿莉數也是 $f(a,1)$。 綜合以上知 $f(a,1)\geq f(a-1,1)$。 □

我們定義 $f_1(n)$ 為最大的正整數 m 使得 $f(m,1)=n$。我們發現：

定理 7. $f_1(n)=4n-1,\ f(n,1)=\left[\dfrac{n+4}{4}\right]$

證明. 我們需要證明 $f_1(n)\geq 4n-1$ 以及 $f_1(n)<4n$。

1. $f_1(n)\geq 4n-1$：

   構造 $(4n-1)\times 1$ 方格板上有 n 個蘿莉的合法排列，方法如下：

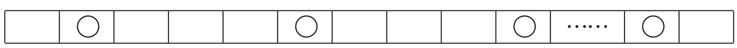

圖 1

如圖 1，將方格座標化，則只需在 $(4k-2,1)$ 處放蘿莉即可($k=1,\ 2,\cdots,\ n$)。由於對於 $k=1,\ 2,\cdots,n-1$

$$\begin{cases} M(4k+1,1)\geq M(4k+1,1)\Big|_{(4k+2,1)}=1; \\ M(4k-1,1)\geq M(4k-1,1)\Big|_{(4k-2,1)}=1; \\ M(4k,1)\geq M(4k,1)\Big|_{L[(4k-2,1),(4k+2,1)]}=1 \text{ 且 } M(1,1)\geq 1,\ M(4n-1,1)\geq 1. \end{cases}$$

故知 $f(4n-1,1)\leq n$。

2. $f_1(n) < 4n$：

令 S 為一 $4n \times 1$ 的排列，在其中 $(4k-2,1)$ 的格子上有蘿莉($k=1,\ 2,\cdots,\ n$)。 若 S' 為一 $4n \times 1$ 的排列，其中 $\delta_{S'}(l) = \delta_S(l)$ 對於 $l = 1,\ 2,\cdots,\ k-1$ 且 $\delta_{S'}(k) \neq \delta_S(k)$ 則定義 $T(S') = k$。

如果現在有個 $4n \times 1$ 且只有 n 個蘿莉的合法排列 S'，我們說明必可以找到排列 S'' 使得 $T(S'') > T(S')$ 且 S'' 也是合法排列。由定理 3，我們只需找 S'' 為 S' 的優化即可。

Case 1. $T(S') = 1$.

此時我們知道 S' 在 $(1,1)$ 有蘿莉。假設 $(k,1)$ 為 $(1,1)$ 的右順位空格，則將 $(1,1)$ 的蘿莉移到 $(k,1)$ 以形成 S''。由定理 4 知 S'' 中 $(2,1)$ 必有蘿莉，因此 $M_{S''}(1,1) \geq 1$。而 S'' 中 $L[(2,1),(k,1)]$ 的範圍內都有蘿莉。當 $l > k$ 時，我們有

$$M_{S''}(l,1) = M_{S'}(l,1) + \sigma[(l,1),(k,1)] - \sigma[(l,1),(1,1)] > M_{S'}(l,1)。$$

故知 S'' 是 S' 的優化，且 $\delta_{S''}(1,1) = \delta_S(1,1) = 0$，故知 $T(S'') > 1 = T(S')$。

Case 2. $T(S') = 2$.

此時 S' 在 $(1,1)$ 和 $(2,1)$ 都沒有蘿莉，但這時會有

$$M(1,1) = \sum_{3\leq k\leq n} \sigma[(1,1),(k,1)]\delta(k,1) \leq \sum_{3\leq k\leq n} \sigma[(1,1),(k,1)] = 1 - \frac{1}{2^{k-2}} < 1,$$

和 S' 是合法排列矛盾，故這種情況是不可能發生的。

Case 3. $T(S') = m = 4k-1,\ 4k,\ 4k+1$ $(k = 1,\ 2,\cdots,\ n-1)$.

此時有 $\delta_{S'}(m,1) = 1$。假設 $(m,1)$ 的右順位空格是 $(p,1)$，則將 $(m,1)$ 的蘿莉移到 $(p,1)$ 以形成 S''。此時 $L[(1,1),(4k-1,1)]$ 部分恰好是一個合法排列，因此這部分的格子蘿莉場都達到 1 以上。此外由定理 4 知 $\delta_{S''}(m+1,1) = 1$，而分別考慮 $m = 4k-1,\ m = 4k,\ m = 4k+1$ 的情況，都有 $M_{S''}(4k,1) \geq 1$ 和 $M_{S''}(4k+1,1) \geq 1$，又因為 $m \leq 4k+1$，因此我們確定了 $L[(1,1),(m,1)]$ 的部分合法，又 $L[(m+1,1),(p,1)]$ 之中的格子都有蘿莉。對於 $l > p$，我們有

$$M_{S''}(l,1) = M_{S'}(l,1) + \sigma[(l,1),(p,1)] - \sigma[(l,1),(m,1)] > M_{S'}(l,1),$$

由以上知 S'' 是 S' 的優化。

Case 4. $T(S') = 4k+2$ $(k = 1,\ 2,\cdots,\ n-1)$.

此時 S' 在 $(4k+2,1)$ 的位置上沒有蘿莉。這時考慮 $M(4k,1)$，我們有

$$\begin{aligned}
M(4k,1) &= \sum_{i\leq k} \sigma[(4k,1),(4i-2,1)] + \sum_{m=4k+3}^{n} \sigma[(4k,1),(m,1)]\delta(m,1) \\
&\leq \sum_{i\leq k} \sigma[(4k,1),(4i-2,1)] + \sum_{m=4k+3}^{n} \sigma[(4k,1),(m,1)] \\
&= \sum_{i\leq k} \frac{1}{2^{4i+1}} + \sum_{m=2}^{n-4k-1} \frac{1}{2^m} \\
&< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{512} \times 2\right) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\
&< \frac{17}{16}.
\end{aligned}$$

因此 $(4k,1)$ 的蘿莉場上限是 $17/16$。注意到 $(4k+3,1)$ 和 $(4k+4,1)$ 的蘿莉分別貢獻了 $1/4$ 和 $1/8$ 的蘿莉場，故這兩格都必定要有蘿莉，否則會使 $M(4k,1) < 1$。

現在將 $(4k+3,1)$ 的蘿莉移到 $(4k+2,1)$，並將 $(4k+4,1)$ 的蘿莉移到其右順位空格，設為 $(m,1)$，以形成 S''。由定理知 $(4k+5,1)$ 處有蘿莉，因此由簡單的計算可檢驗 $L[(1,1),(4k+5,1)]$ 部分都是合法排列，且 $L[(4k+5,1),(m,1)]$ 部分都有蘿莉。對於 $l>m$，我們有

$$\begin{aligned}
M_{S''}(l,1) &= M_{S'}(l,1)+\sigma[(l,1),(m,1)]-\sigma[(l,1),(4k+3,1)]-\sigma[(l,1),(4k+4,1)] \\
&\quad +\sigma[(l,1),(4k+2,1)] \\
&> M_{S'}(l,1)+\sigma[(l,1),(4k+5,1)]-\sigma[(l,1),(4k+3,1)]-\sigma[(l,1),(4k+4,1)] \\
&> M_{S'}(l,1)
\end{aligned}$$

由以上可知 S'' 是 S' 的優化。

不斷重複進行以上 Case 便可以將 $T(S')$ 不斷增大，因此最終可以把 S' 優化為 S，故知 S 應為合法排列，但我們檢驗發現 $M_S(4k,1)<1$，故知 S 不是合法排列，矛盾！

由 $f_1(n)=4n-1$ 和定理 6，可以直接推得 $f(n,1)=\left[\frac{n+4}{4}\right]$。 □

2.3 $n\times 2$ 方格板上的蘿莉場

類似於 $f(n,1)$ 中的情況，首先我們有：

定理 8. 對於正整數 $a,\ b$，若 $a\geq b$，則 $f(a,2)\geq f(b,2)$。

證明. 我們同樣只需證 $f(a,2)\geq f(a-1,2)$。

令 S 是一個 $a\times 2$ 的最佳合法排列，若 $L[(1,1),(1,2)]$ 的部分都沒有蘿莉，則 $L[(2,1),(a,2)]$ 的部分就形成一個 $(a-1)\times 2$ 的合法排列，上有 $f(a,2)$ 個蘿莉。若 $(1,1)$ 有蘿莉，令 $(x,1)$ 為 $(1,1)$ 的右順位空格，將 $(1,1)$ 的蘿莉移至 $(x,1)$ 以形成 S'，我們希望 S' 在 $R=L[(2,1),(a,2)]$ 這部分是 S 的優化。由右順位空格的定義知 $L[(2,1),(x,1)]$ 的部分都有蘿莉，而這些蘿莉也使得 $M_{S'}(G)\geq 1$ ($G\in L[(2,2),(x,2)]$)。運用定理 5，取 $P=L[(1,1),(x,2)]$，則 $L[(2,1),(x,2)]$ 的部分已經確定是優化(我們不用考慮 $L[(1,1),(1,2)]$ 的範圍)，又我們有

$$M_{S'}(x+1,1)\Big|_P - M_S(x+1,1)\Big|_P = \sigma[(x+1,1),(x,1)]-\sigma[(x+1,1),(1,1)]>0$$

$$M_{S'}(x+1,2)\Big|_P - M_S(x+1,2)\Big|_P = \sigma[(x+1,2),(x,1)]-\sigma[(x+2,1),(1,1)]>0$$

由此二式便可知 S' 在 R 內是 S 的優化。若 $(1,2)$ 有蘿莉也可類似處理，因此我們總可以得到一 $(a-1)\times 2$ 的合法排列 S' 上有 $f(a,2)$ 個蘿莉，故 $f(a,2)\geq f(a-1,2)$。 □

我們定義 $f_2(n)$ 為最大的正整數 m 使得 $f(m,2)=n$。我們發現：

定理 9. $f_2(n)=3n-2,\ f(n,2)=\left[\frac{n+4}{3}\right]$.

證明. 我們只需要證 $f_2(n)\geq 3n-2$ 以及 $f_2(n)<3n-1$ 即可。

1. 要證明 $f_2(n)\geq 3n-2$, 我們構造 $(3n-2)\times 2$ 的合法排列。

把方格座標化。當 n 為偶數時，在 $(6k-5,2)$ 和 $(6k-2,1)$ (其中 $k=1,\ 2,\cdots,\frac{n}{2}$) 的地方都擺上蘿莉，如圖 2。

當 n 為奇數時，在 $(6k-5,2)$(其中 $k=1,\ 2,\cdots,\frac{n+1}{2}$) 和 $(6k-2,1)$(其中 $k=1,\ 2,\cdots,\frac{n-1}{2}$) 的地方都擺上蘿莉，如圖 3。

○						○	……	○			
			○				……				○

圖 2

○						○	……				○
			○				……	○			

圖 3

這兩個圖都可以滿足以下式子：

$$M(6k-5,1) \geq M(6k-5,1)\Big|_{(6k-5,2)} = 1;$$
$$M(6k-4,2) \geq M(6k-4,2)\Big|_{(6k-5,2)} = 1;$$
$$M(6k-4,1) \geq M(6k-4,1)\Big|_{(6k-5,2)} + M(6k-4,1)\Big|_{(6k-2,1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\text{。}$$

我們可以照樣說明對所有 (m,n), $4 \geq m \geq 0$, $n = 1,\ 2$ 都有 $M(6k-m,n) \geq 1$，因此這兩個排列都是合法排列。我們稱這樣的排列為 D_n。

2. 接著我們證明 $f_2(n) < 3n-1$.

令 S 為一 $(3n-1)\times 2$ 的排列，其中 $(6k-5,1)$, $(6k-2,2)$ 的地方都有蘿莉(k 可以是任意使 $(6k-5,1) \in S$ 或 $(6k-2,2) \in S$ 的正整數)。

現在定義區域 $\{A_i\}$ 如下：

$A_0 = L[(1,1),(1,2)]$,

$A_k = L[(3k-1,1),(3k+1,2)]$, (其中 $k = 1,\ \cdots,\ n-1$)

$A_n = L[(3n-1,1),(3n-1,2)]$.

對於任意其他 $(3n-1)\times 2$ 的排列 S'，我們可以定義函數 T 如下：

定義. 若 $\forall G \in A_i$ $(i = 0,\ 1,\cdots,k-1)$, $\delta_{S'}(G) = \delta_S(G)$ 且 $\exists G \in A_k$ 使得 $\delta_{S'}(G) \neq \delta_S(G)$ 則定義 $T(S') = k$。

如果現在有個 $(3n-1)\times 2$ 且只有 n 個蘿莉的合法排列 S'，我們說明必可以找到排列 S'' 使得 $T(S'') > T(S')$ 且 S'' 也是合法排列。由定理 3，我們只需找 S'' 為 S' 的優化即可。

我們可以運用下列引理來較方便處理此問題。

引理 10. 若 $T(S') = m > 0$，且存在正整數 k 使得 S' 在 $A_m,\ A_{m+1},\ \cdots,\ A_{m+k-1}$ 之中的蘿莉超過 k 個，則必存在 S'' 使得 $T(S'') > T(S')$ 且 S'' 也是合法排列。

證明. 先定義函數 θ：當 n 為偶數時 $\theta(n) = 2$，反之 $\theta(n) = 1$。我們可以發現到 S 在 A_k 的蘿莉位在 $(3k+1,\theta(k+1))$ 的位置上。

現在令 $r = \theta(m+k+1)$ 並令 r' 為跟 r 相異且是 1 或 2 的數，設 S'' 中 $(3m+3k,r)$ 的右順位空格為 (x,r)。現在將 S' 在 $A_m,\ A_{m+1},\cdots,A_{m+k-1}$ 之中的蘿莉選 $k+1$ 個，其中 k 個分別移到 $(3m+1,\theta(m+1))$, $(3m+4,\theta(m+2))$, $\cdots$, $(3m+3k-2,\theta(m+k))$ 之中(如果這些位置本來就有蘿莉就不需移動)，剩下一個移到 (x,r) 中以形成 S''。由定理 4 知 S'' 在 $(3m+3k+1,r)$ 必有蘿莉，這時 S'' 中 $L[(1,1),(3m+3k+1,r)]$ 的部分跟 D_{m+k+1} 比對，會發現 D_{m+k+1} 有蘿莉處 S'' 中的這個部分必定有，因此 S'' 在這部分是合法的。

由右順位空格的定義知 $\delta_{S''}(k,r) = 1$，因此 $M_{S''}(k,r') \geq 1$ $(3m+3k+2 \leq k \leq x)$。由以上討論知 S'' 在 $L[(1,1),(x,2)]$ 的部分都是合法的，此時運用定理 5，令 $P =$

$L[(1,1),(x,2)]$，又由右順位空格定義有 $x \geq 3m+3k+2$，則

$$
\begin{aligned}
M_{S''}(x+1,l)\Big|_P - M_{S'}(x+1,l)\Big|_P &> \sigma[(x+1,l),(x,r)] - \sum_{G\in\bigcup_{i=1}^{m+k-1} A_i} \sigma[(x+1,l),G] \\
&\geq \frac{1}{2} - \sum_{G\in\bigcup_{i=1}^{m+k-1} A_i} \sigma[(3m+3k+2,l),G] \\
&> \frac{1}{2} - \sum_{i=1,2} \sum_{j=1}^{3m+3k-2} \sigma[(3m+3k+2,l),(j,i)] \\
&> \frac{1}{2} - \frac{3}{8} > 0
\end{aligned}
$$

因此可由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化，證畢。 □

繼續定理 9 的證明，我們可以分情況討論：

Case 1. $T(S') = 0$.

Case 1.1. S' 在 A_0 中沒有蘿莉。

令區域 $B = \{G | G \in A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n\}$ 由簡單計算可知 $M_{S'}(1,k)\Big|_B < \frac{3}{8}$ 對於 $k = 1,\ 2$。由於 S' 是合法排列，因此可以確定 S' 在 A_1 內必須要有至少兩個蘿莉。

令 $C(S) = (\delta_S(2,1),\ \delta_S(3,1),\ \delta_S(4,1),\ \delta_S(2,2),\ \delta_S(3,2),\ \delta_S(4,2))$，現在依照 $C(S')$ 的情況來討論(注意到基於上下對稱性，某些情況可以省略):

Case 1.1.1. $C(S') = (1,0,0,1,0,0),\ (1,0,0,0,1,0),\ (0,0,0,1,1,0)$.

我們將兩個蘿莉分別移到 $(1,1)$ 和 $(4,2)$ 以形成 S''。運用定理 5，令 P 為 $L[(1,1),(4,2)]$，可知 P 內 S'' 為優化，且 $M_{S''}(5,k)\Big|_P \geq M_{S'}(5,k)\Big|_P$ $(k = 1,2)$，故知 S'' 為 S' 的優化。又 $\delta_{S''}(1,k) = \delta_S(1,k)$ $(k = 1,\ 2)$ 知 $T(S'') \geq 1 > T(S')$。

Case 1.1.2. $C(S') = (0,1,0,0,1,0)$.

此時注意到由計算可知 $M_{S'}(1,2)\Big|_{B-\{5,2\}} < \frac{1}{4}$，因此

$$
\begin{aligned}
M_{S'}(1,2) &= M_{S'}(1,2)\Big|_{A_0\cup A_1} + M_{S'}(1,2)\Big|_{B-\{5,2\}} + \sigma[(1,2),(5,2)]\delta(5,2) \\
&< \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\delta(5,2) = 1 + \frac{1}{8}\delta(5,2)
\end{aligned}
$$

但應有 $M_{S'}(1,2) \geq 1$，故 $\delta(5,2) = 1$，即 $(5,2)$ 處有蘿莉。

此時考慮 $(6,1)$ 的右順位空格，假設是 $(x,1)$，則將 A_1 的蘿莉分別移到 $(1,1)$ 和 $(4,2)$，再將 $(5,2)$ 的蘿莉移到 $(x,1)$ 以形成 S''。 此時由定理 4 知 S'' 的 $(7,1)$ 處必有蘿莉，運用定理 5，令 $P = [(1,1),(x,2)]$，則由右順位空格的定義知 $L[(7,1),(x,1)]$ 的部分都是蘿莉，這些蘿莉使得 $M_{S''}(k,2) \geq 1$ $(7 \leq k \leq x)$，又易確認 $M_{S''}(G) \geq 1$ $(G \in L[(1,1),(7,2)])$，故知 S'' 在 P 內為合法。再由右順位空格知 $x \geq 7$，因此我們又有

$$
\begin{aligned}
& M_{S''}(x+1,k)\Big|_P - M_{S'}(x+1,k)\Big|_P \\
&= \sum_{G=(1,1),(4,2),(x,1)} \sigma[(x+1,k),G] - \sum_{G=(3,1),(3,2),(5,2)} \sigma[(x+1,k),G] \\
&> \sum_{G=(x,1)} \sigma[(x+1,k),G] - \sum_{G=(3,1),(3,2),(5,2)} \sigma[(8,k),G] > 0\ (k = 1,\ 2),
\end{aligned}
$$

因此由定理 5 可知 S'' 是 S' 的優化，並可另外確定 $T(S'') \geq 1 > T(S')$。

Case 1.1.3. $C(S') = (1,0,0,0,0,1)$.

注意到這時 $M_{S'}(1,2)\Big|_{A_1} = \frac{3}{4}$，故同 **Case 1.1.2** 可知 $\delta_{S'}(5,2) = 1$。考慮 $(6,1)$ 的右順位空格，假設是 $(x,1)$，將 $(2,1)$, $(5,2)$ 的蘿莉分別移到 $(1,1)$, $(x,1)$ 以形成 S''，並運用

定理 5 令 $P=[(1,1),(x,2)]$，類似於 Case 1.1.2 的討論可確定 S'' 在 P 內為合法，對於 $k=1,\ 2$ 並有

$$\begin{aligned}
&M_{S''}(x+1,k)\Big|_P - M_{S'}(x+1,k)\Big|_P \\
&= \sum_{G=(1,1),(x,1)} \sigma[(x+1,k),G] - \sum_{G=(2,1),(5,2)} \sigma[(x+1,k),G] \\
&> \sum_{G=(x,1)} \sigma[(x+1,k),G] - \sum_{G=(2,1),(5,2)} \sigma[(8,k),G] > 0
\end{aligned}$$

因此由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化，並可另外確定 $T(S'')\geq 1>T(S')$。
Case 1.1.4. $C(S')=(0,0,0,0,1,1),(0,0,0,1,0,1),(0,0,1,0,0,1),(0,1,0,0,0,1)$.
這四種情況都有 $M_{S'}(1,1)\Big|_{A_1}<\dfrac{3}{8}$，故有 $M_{S'}(1,1)=M_{S'}(1,1)\Big|_{A_0\cup A_1}+M_{S'}(1,1)\Big|_B<\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}=1$，因此 S' 不可能是合法排列。
Case 1.1.5. S' 在 A_1 內有 3 個以上的蘿莉。
假設 $(6,1)$ 的右順位空格為 $(x,1)$，將其中 3 個蘿莉分別移到 $(1,1)$, $(4,2)$ 及 $(x,1)$ 處以形成 S''，並運用定理 5 令 $P=[(1,1),(x,2)]$，類似於 Case1.1.2 可確定 S'' 在 P 內為合法。由右順位空格定義知 $x\geq 7$，因此對於 $k=1,\ 2$ 我們有

$$\begin{aligned}
&M_{S''}(x+1,k)\Big|_P - M_{S'}(x+1,k)\Big|_P \\
&> \sum_{G=(1,1),(4,2),(x,1)} \sigma[(x+1,k),G] - \sum_{G\in A_1} \sigma[(x+1,k),G] \\
&> \sum_{G=(x,1)} \sigma[(x+1,k),G] - \sum_{G\in A_1} \sigma[(8,k),G] > 0
\end{aligned}$$

因此由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化，並可另外確定 $T(S'')\geq 1>T(S')$。

至此 Case 1.1 的討論完成。

Case 1.2. $\delta_{S'}(1,1)=0$ 且 $\delta_{S'}(1,2)=1$.
令 S'' 為 S' 之上下翻轉即可。
Ccase 1.3. $\delta_{S'}(1,1)=\delta_{S'}(1,2)=1$.
令 $(1,2)$ 的右順位空格為 $(x,2)$，將 $(1,2)$ 的蘿莉移到 $(x,2)$ 以形成 S''，則由定理 4 知 $(2,2)$ 必有蘿莉，且 $L[(2,2),(x,2)]$ 處都有蘿莉，因此 $M_{S''}(k,1)\geq 1$ $(2\leq k\leq x)$ 且 $M_{S''}(1,2)\geq 1$。又有

$$M_{S''}(x+1,k)\Big|_P - M_{S'}(x+1,k)\Big|_P = \sigma[(x+1,k),(x,2)] - \sigma[(x+1,k),(1,2)] > 0\ (k=1,\ 2),$$

故由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化，並易知 $T(S'')\geq 1>T(S')$。

Case 1. 至此全部討論完畢。

Case 2. $T(S')=m>0$.
以下再細分幾種情況：
Case 2.1. S' 在 A_m 中沒有蘿莉。
這時由 m 的奇偶性，有可能是 $\delta(3m-2,1)$ 或 $\delta(3m-2,2)=1$，但由於上下的對稱性，為了討論方便我們一律取後者的情況。
我們在這個 Case 中令

$$B_l=\{G|G\in A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_{m-1}\},\ B_r=\{G|G\in A_{m+2}\cup A_{m+3}\cup\cdots\cup A_n\}$$

並令 $C(S)=(\delta_S(3m+2,1),\cdots,\delta_S(3m+4,1),\delta_S(3m+2,2),\cdots,\delta_S(3m+4,2))$
並由不同的 $C(S')$ 來分情況討論：
Case 2.1.1. $C(S')=(1,0,0,1,0,0),(1,0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1,0)$.

此時我們把 A_{m+1} 中的兩個蘿莉分別移到 $(3m+1,1)$ 以及 $(3m+4,2)$ 以形成 S''，S'' 是 S' 優化這點類似於 Case 1.1.1，因為 S'' 在 $L[(1,1),(3m+4,2)]$ 是 D_{m+2}，是個合法排列。

Case 2.1.2. $C(S')=(1,0,0,0,1,0)$

這時也把 A_{m+1} 中的兩個蘿莉分別移到 $(3m+1,1)$ 以及 $(3m+4,2)$ 以形成 S''。這時 S'' 在 $L[(1,1),(3m+4,2)]$ 的部分是 D_{m+2}，於是利用定理 5 令 $P=L[(1,1),(3m+4,2)]$，我們有

$$\begin{aligned}&M_{S''}(3m+5,k)\Big|_P - M_{S'}(3m+5,k)\Big|_P\\&=\sum_{\substack{G=(3m+1,1)\\,(3m+4,2)}}\sigma[(3m+5,k),G]-\sum_{\substack{G=(3m+2,1)\\,(3m+3,2)}}\sigma[(3m+5,k),G]>0\ (k=1,2)\text{，}\end{aligned}$$

故由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化，並可另外確定 $T(S'')\geq m+1>T(S')$。

Case 2.1.3. $C(S')=(0,1,0,0,1,0),(0,0,0,1,0,1),(0,0,1,0,1,0),(0,0,1,0,0,1),(0,0,0,0,1,1),$ $(0,1,1,0,0,0),\ (0,1,0,0,0,1),\ (0,0,1,1,0,0)$

$$\begin{aligned}M_{S'}(3m,1)&=M_{S'}(3m,1)\Big|_{B_l}+M_{S'}(3m,1)\Big|_{B_r}+M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}}\\&<\left(\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{m-1}\sigma[(3m,1),(3k-2,1)]\right)+\sum_{G\in B_r}\sigma[(3m,1),G]+M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}}\\&<\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+\frac{3}{16}+M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}}\\&=\frac{33}{64}+M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}}\end{aligned}$$

由 S' 是合法排列知 $M_{S'}(3m,1)\geq 1$，故應有 $M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}}\geq\dfrac{31}{64}$。但就本例中的八個情況逐一檢查，會發現都有 $M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}}<\dfrac{31}{64}$，因此這些情況都不可能。

Case 2.1.4. $C(S')=(1,1,0,0,0,0)$.

　　這個情況可以再細分為以下三個情況：

Case 2.1.4.1. A_{m+2} 中有 2 個以上的蘿莉。

這時 S' 在 A_m, A_{m+1}, A_{m+2} 中有 4 個蘿莉，故可運用引理 10。

Case 2.1.4.2. A_{m+2} 中只有一個蘿莉。這時考慮

$$\begin{aligned}&M_{S'}(3m,2)\\&=M_{S'}(3m,2)\Big|_{B_l}+M_{S'}(3m,2)\Big|_{A_{m+1}}+M_{S'}(3m,2)\Big|_{A_{m+2}}\\&+M_{S'}(3m,2)\Big|_{B_r-A_{m+2}}\\&\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots\right)+\frac{3}{8}+\sigma[(3m,2),(3m+5,2)]\\&+\sum_{G\in B_r-A_{m+2}}\sigma[(3m-2),G]\\&<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{1024}\right)+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{3}{128}\\&=\frac{1025}{1024}\end{aligned}$$

我們注意到這是在假設 B_r-A_{m+2} 之中全部都有蘿莉的情形，現在我們試圖刪減一些蘿莉來使 $M_{S'}(3m,2)$ 仍能達到 1 以上，結果會發現在 A_{m+3} 之中沒有蘿莉能被省略(因為

每個蘿莉都造成了至少 $\dfrac{1}{1024}$ 的蘿莉場)，故知 A_{m+3} 有 6 個蘿莉(即每格都有蘿莉)。這時 $A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}$ 中有 9 個蘿莉，故可運用引理 10。
Case 2.1.4.3. A_{m+2} 中沒有蘿莉。這時有

$$\begin{aligned}
&M_{S'}(3m,2)\\
&= M_{S'}(3m,2)\Big|_{B_l} + M_{S'}(3m,2)\Big|_{A_{m+1}} + M_{S'}(3m,2)\Big|_{A_{m+2}} + M_{S'}(3m,2)\Big|_{B_r-A_{m+2}}\\
&\le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots\right)+\frac{3}{8}+0+\sum_{G\in B_r-A_{m+2}}\sigma[(3m,2),G]\\
&< \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{1024}\right)+\frac{3}{8}+\frac{3}{128}<1
\end{aligned}$$

故知這種情況是不可能的。
Case 2.1.5. $C(S')=(1,0,1,0,0,0)$.
此時也分兩種情況：
Case 2.1.5.1. A_{m+2} 中有 2 個以上的蘿莉：這時所有優化討論同 Case 2.1.4.1。
Case 2.1.5.2. A_{m+2} 中只有 1 個蘿莉或沒有蘿莉。此時有

$$\begin{aligned}
&M_{S'}(3m,2)\\
&= M_{S'}(3m,2)\Big|_{B_l} + M_{S'}(3m,2)\Big|_{A_{m+1}} + M_{S'}(3m,2)\Big|_{A_{m+2}} + M_{S'}(3m,2)\Big|_{B_r-A_{m+2}}\\
&\le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots\right)+\frac{5}{16}+\sigma[(3m,2),(3m+5,2)]+\sum_{G\in B_r-A_{m+2}}\sigma[(3m,2),G]\\
&< \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)+\frac{5}{16}+\frac{1}{16}+\frac{3}{128}<1
\end{aligned}$$

故此時 S' 不可能是合法排列。
Case 2.1.6. $C(S')=(1,0,0,0,0,1)$.
此時也分兩種情況：
Case 2.1.6.1. A_{m+2} 中有 2 個以上的蘿莉：這時所有優化討論同 Case 2.1.4.1。
Case 2.1.6.2. A_{m+2} 中只有 1 個蘿莉或沒有蘿莉。此時有

$$\begin{aligned}
&M_{S'}(3m,1)\\
&= M_{S'}(3m,1)\Big|_{B_l} + M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+1}} + M_{S'}(3m,1)\Big|_{A_{m+2}} + M_{S'}(3m,1)\Big|_{B_r-A_{m+2}}\\
&\le \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\cdots\right)+\frac{9}{16}+\sigma[(3m,1),(3m+5,1)]+\sum_{G\in B_r-A_{m+2}}\sigma[(3m,1),G]\\
&< \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}\right)+\frac{9}{16}+\frac{1}{16}+\frac{3}{128}<1
\end{aligned}$$

故知此時 S' 不可能是合法排列。
Case 2.1.7. S' 有三個以上的蘿莉。此時的優化討論類似於 1.1.5。
　至此 Case 2.1 的部分討論完畢。
Case 2.2. S' 在 A_m 中恰有一個蘿莉但不是位在 $(3m+1,1)$ 處：
此時再分為兩種情況：
Case 2.2.1. S' 在 A_m 中的蘿莉位在 $(3m-1,1)$, $(3m-1,2)$, $(3m,1)$, $(3m,2)$ 處
這時將這個蘿莉直接移到 $(3m+1,1)$ 以形成 S''，由定理 5 令 $P=L[(1,1),(3m+1,1)]$，可以確定 S'' 在 P 內合法(恰為 D_m)以及

$$M_{S''}(3m+2,k)\Big|_P - M_{S'}(3m+2,k)\Big|_P = M_{S''}(3m+2,k)\Big|_{A_m} - M_{S'}(3m+2,k)\Big|_{A_m} > 0$$

$(k=1,\ 2)$，因此知 S'' 是 S' 的優化，另外可確定 $T(S'')\ge m+1>T(S')$。

Case 2.2.2. S' 在 A_m 中的蘿莉位在 $(3m+1,2)$ 處
這時再細分以下情況：
Case 2.2.2.1. S' 在 A_{m+1} 中有 2 個以上的蘿莉：這時 A_m, A_{m+1} 處共有 3 個蘿莉，故可運用引理 10。
我們由計算可知 $M(3k-1,1)\Big|_{B_f} \le \frac{3}{32}$，故

$$\begin{aligned}
&M(3k-1,1)\\
&= M(3k-1,1)\Big|_{B_l} + M(3k-1,1)\Big|_{A_m} + M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+1}} + M(3k-1,1)\Big|_{B_r}\\
&< \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{128}+\cdots\right)+\frac{1}{4}+\frac{3}{32}+M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+1}}\\
&< M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+1}} + \frac{63}{64}
\end{aligned}$$

因此應有 $M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+1}} > \frac{1}{64}$，故 A_{m+1} 中必須有蘿莉，但可以位在任何地方。
Case 2.2.2.2. S' 在 A_{m+1} 中的蘿莉位於 $(3m+2,1)$, $(3m+2,2)$, $(3m+3,1)$, $(3m+3,2)$
此時將 S' 位於 A_m 和 A_{m+1} 的兩個蘿莉分別移到 $(3m+1,1)$, $(3m+4,2)$ 上以形成 S''，令 $P = L[(1,1),(3m+4,2)]$，我們發現 S'' 在 P 上是合法的，又由計算可確認 $M_{S''}(3m+5,k)\Big|_P - M_{S'}(3m+5,k)\Big|_P \ge 0$ 對 S' 在 A_{m+1} 中的蘿莉位置和 $k=1$, 2 都是對的，故由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化。
Case 2.2.2.3. S' 在 A_{m+1} 中的蘿莉位於 $(3m+4,2)$

$$\begin{aligned}
&M(3k-1,1)\\
&= M(3k-1,1)\Big|_{B_l} + M(3k-1,1)\Big|_{A_m\cup A_{m+1}} + M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}} + M(3k-1,1)\Big|_{B_r-A_{m+2}}\\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{128}+\cdots\right)+\frac{9}{32}+\frac{3}{128}+M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}}\\
&< M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}} + \frac{61}{64}
\end{aligned}$$

這表示應有 $M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}} > \frac{3}{64}$，但 A_{m+2} 之中離 $(3k-1,1)$ 最近的蘿莉也只能造成 $\frac{1}{32}$ 的蘿莉場，這表示 A_{m+2} 中必有 2 個以上的蘿莉，此時 A_m, A_{m+1}, A_{m+2} 之中至少有 4 個蘿莉，故可運用引理 10。
Case 2.2.2.4. S' 在 A_{m+1} 中的蘿莉位於 $(3m+4,1)$
修改 Case 2.2.2.3 之中的相關數據可得 $M(3k-1,1) < M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}} + \frac{63}{64}$，這表示 $M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}} > \frac{1}{64}$。若 A_{m+2} 之中有兩個以上的蘿莉則可運用引理 10，若只有一個蘿莉則此蘿莉只能位於 $(3m+5,1)$ 處才可能使 $M(3k-1,1)\Big|_{A_{m+2}} > \frac{1}{64}$，此時我們可以將 A_m, A_{m+1}, A_{m+2} 之中的蘿莉分別移到 $(3m+1,1)$, $(3m+4,2)$ 以及 $(3m+7,1)$ 中以形成 S''，此時令 $P = [(1,1),(3m+7,1)]$，可知 S'' 在 P 上合法，又有

$$\begin{aligned}
&M_{S''}(3m+8,k) - M_{S'}(3m+8,k)\\
&> \sigma[(3m+8,k),(3m+7,1)] - \sum_{\substack{G=(3m+1,1)\\,(3m+4,2)\\,(3m+7,1)}} \sigma[(3m+8,k),G] > 0
\end{aligned}$$

故由定理 5 知 S'' 是 S' 的優化。至此 Case 2.2 討論完畢。

Case 2.3. 在 A_m 中有兩個以上的蘿莉
此即引理 10 中 $k = 1$ 的情況。
至此 Case 2 全部討論完畢。
由以上知我們可以把 $T(S')$ 不斷增大，因此最後可把 S' 優化為 S，因此 S 應為合法排列，但檢驗可知 $M_S(4n,1) < 1$，矛盾！因此這樣的合法排列不存在。
由 $f_2(n) = 3n - 2$ 和定理 6，可以直接推得 $f(n,2) = \left\lceil \frac{n+4}{3} \right\rceil$。 □

2.4 $n \times 3$ 方格板上的蘿莉場

類似於定理 6 和 8 我們有：

定理 11. 對於正整數 $a,\ b$，若 $a \geq b$，則 $f(a,3) \geq f(b,3)$。

證明. 類似地我們只需證 $f(a,3) \geq f(a-1,3)$。令 S 為一 $a \times 3$ 的最佳合法排列，若 S 在 $L[(1,1),(1,3)]$ 處都沒有蘿莉，則 $L[(2,1),(a,3)]$ 部分就形成一個 $(a-1) \times 3$ 的合法排列，上有 $f(a,3)$ 個蘿莉。倘若 S 在 $L[(1,1),(1,3)]$ 處有蘿莉，我們用以下方法來對 S 的 $[(2,1),(a,3)]$ 部分進行優化：
Case 1. 若 S 在 $(1,1)$ 處有蘿莉.

考慮 $(1,2)$ 的右順位空格 $(x,2)$。將 $(1,1)$ 處的蘿莉移至 $(x,2)$ 以形成 S'，則由右順位空格的定義知 $x \geq 2$ 且 $(2,2)$ 必有蘿莉，又有 $\delta_{S'}(k,2) = 1 \Rightarrow M_{S'}(k,1) \geq 1$, $M_{S'}(k,3) \geq 1$ $(2 \leq k \leq x)$。令 $P = L[(1,1),(x,3)]$，我們有

$$M_{S'}(x+1,k)\Big|_P - M_S(x+1,k)\Big|_P = \sigma[(x+1,k),(x,2)] - \sigma[(x+1,k),(1,1)] \geq 0\ (k = 1,2,3)$$

故由定理 5 知 S' 在 $L[(2,1),(a,3)]$ 處是 S 的優化。
Case 2. 若 S 在 $(1,3)$ 處有蘿莉. 此時和 Case 1 是上下對稱的情況。
Case 3. 若 S 在 $(1,2)$ 處有蘿莉.

考慮 $(1,2)$ 的右順位空格 $(x,2)$。將 $(1,2)$ 處的蘿莉移至 $(x,2)$ 以形成 S'，則由右順位空格的定義知 $x \geq 2$ 且 $(2,2)$ 必有蘿莉，又有 $\delta_{S'}(k,2) = 1 \Rightarrow M_{S'}(k,1) \geq 1$, $M_{S'}(k,3) \geq 1$ $(2 \leq k \leq x)$。令 $P = L[(1,1),(x,3)]$，我們有

$$M_{S'}(x+1,k)\Big|_P - M_S(x+1,k)\Big|_P = \sigma[(x+1,k),(x,2)] - \sigma[(x+1,k),(1,2)] > 0\ (k = 1,2,3)$$

故由定理 5 知 S' 在 $L[(2,1),(a,3)]$ 處是 S 的優化。

由以上 Case 的討論，我們可以把 S 不斷優化到最後使得 $L[(1,1),(1,3)]$ 處都沒有蘿莉，這時再取 $L[(2,1),(a,3)]$ 部分便可得到一 $(a-1) \times 3$ 的合法排列，上有 $f(a,3)$ 個蘿莉，因此我們有 $f(a,3) \geq f(a-1,3)$。 □

$f(n,3)$ 的值較不規則，且討論也較繁複，因此尚無法找出通解。但對於較小的數字，已經解決的有 $f(1,3) = 1$; $f(2,3) = f(3,3) = 2$; $f(4,3) = f(5,3) = 3$; $f(6,3) = f(7,3) = 4$.

這些都是可以由簡單的構造和證明獲得，或者也可以利用程式進行搜尋。

乍看之下會以為 $f_3(n) = 2n - 1$，但其實不然，因為 $f(12,3) = 6$，

下圖給出 $f(12,3) \leq 6$

		○									○
				○			○				
○									○		

圖 4

$f(10,3) > 5$ 的證明若採用人工會相當繁瑣，故我們運用程式來完成它，C 語言的程式碼可以參閱附錄。

若存在 10×3 且只有 5 個蘿莉的合法排列，這個程式會輸出"有解"，但程式執行後甚麼都沒有輸出，表示說這樣的合法排列不存在。用同樣的方法也可以得到 8×3 且只有 4 個蘿莉的合法排列不存在。

○				○				○
		○				○		

由此圖知 $f(9,3)\le 5$。藉由以上結論以及定理 6.3 可得 $f(8,3)=f(9,3)=5$, $f(10,3)=f(11,3)=f(12,3)=6$。現在討論 $f(n,3)$ 的上界，考慮以下的排列

		○									○
				○			○				
○									○		

注意到 $L[(4,1),(12,3)]$ 的部分，這部分可以向右不斷複製而形成新的合法排列。這是因為假設對於這部分的某個空格 $X(x,y)$，標定出一些對它造成蘿莉場總和為 1 的蘿莉所在的格子 $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$,$\cdots$,$A_i(x_i,y_i)$，則對於複製過去的空格 X'，可知$X'(x+9,y)$。又考察格子 $A'_1(x_1+9,y_1)$, $A'_2(x_2+9,y_2)$,$\cdots$,$A'_i(x_i+9,y_i)$，會發現這些格子上面也都有蘿莉，而這些蘿莉也對 X' 造成恰為 1 的蘿莉場。由此可知複製過後整個排列仍然是合法排列。

每複製一次，方格板的長會增加 9 且會增加 4 個蘿莉。因此當複製 k 次後，就會得到一個 $(12+9k)\times 3$ 的方格板，上面有 $(6+4k)$ 個蘿莉，因此我們有 $f(9k+12,3)\le 4k+6$。另外，當一個 $k\times 3$ 方格板上有 m 個蘿莉的合法排列確定時，若 $(k,3)$ 有蘿莉，則可以擴充 $L[(k+1,1),(k+2,3)]$ 的部分並且在 $(k+2,1)$ 放蘿莉，由於 $L[(k,1),(k+2,3)]$ 的部分是 3×3 方格板的合法排列，因此這樣就形成了一個 $(k+2)\times 3$ 方格板上有 $(m+1)$ 個蘿莉的合法排列。類似地，若是 $(k,1)$ 有蘿莉，則可以擴充 $L[(k+1,1),(k+2,3)]$ 的部分並且在 $(k+2,3)$ 放蘿莉，也可以形成了一個 $(k+2)\times 3$ 方格板上有 $(m+1)$ 個蘿莉的合法排列。注意到在 12×3 方格板中有 6 個蘿莉的合法排列 $(12,3)$ 有蘿莉，而複製 $L[(4,1),(12,3)]$ 的部分之後 $(12,3)$ 的蘿莉也會被複製到 $(9k+12,3)$ 的位置上去。因此我們還可以對這個 $(9k+12)\times 3$ 上有 $(4k+6)$ 個蘿莉的合法排列繼續用這種方法進行擴充。如此一來依序可得

$$f(9k+12,3)\le 4k+6,\ f(9k+14,3)\le 4k+7,\cdots,f(9k+20,3)\le 4k+10.$$

注意到用 $k+1$ 取代 $f(9k+12,3)\le 4k+6$ 裡面的 k 可得到 $f(9k+21,3)\le 4k+10$，至此已經構成循環，運用定理 11 並進行整理後，我們可以獲得：

定理 12. $f(9k+n,3)\le 4k+\lceil\frac{n}{2}\rceil$ 其中 $12\le n\le 20,\ k\in Z_{\ge 0}$

運用這個定理，當任意給定一正整數 $n\ge 12$ 時，就可以估算出 $f(n,3)$ 的上界了。

2.5 一些具備專一性的定理

所謂的「專一性」是指：一個定理如果只有在 σ 函數如本文中定義時才能成立，則此定理便具有專一性；反之則不具專一性，即使 σ 函數的定義改變，只要遵守隨著距離遞增而值遞減的規則，就可以適用。
以下介紹的定理皆具有專一性。

定理 13. 在一個排列中，若一個空格的蘿莉場達到 *1* 以上，則一定可以在這排列中標定出一些蘿莉，使得這些蘿莉對這個空格造成的蘿莉場總和恰為 *1*。

證明. 如果這個空格的蘿莉場是 1，那麼就把這個排列中的所有蘿莉標起來就行了。

如果不是，則此空格的蘿莉場大於 1，此時把離這個空格最遠的蘿莉造成的蘿莉場忽略，再考察這個空格的蘿莉場，若仍大於 1 則繼續依此反覆進行，直到未被忽略的蘿莉造成的蘿莉場等於 1 為止。
現在要說明以上的做法一定可以成立。

令這個排列的蘿莉依照和這個空格的距離由近到遠排序分別為 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，而蘿莉 A_i 會造成 a_i 的蘿莉場 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，於是知 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，並令 $S_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$ (特別地，規定 $S_0 = 0$)。 此時 $S_n, S_{n-1}, \cdots, S_1, S_0$ 是個嚴格遞減數列，且從一個大於 1 的數遞減至 0，故一定可以找到一個 S_k 使得 $S_k \geq 1$ 且 $S_{k-1} < 1$。

於是只需證 $S_k = 1$。由 $S_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$ 可知 $S_k - S_{k-1} = a_k$，此時注意到 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 都是 a_k 的整數倍(因為都是 2 的整數冪次且 a_k 次數最小)，因此可知 S_k 和 S_{k-1} 是 a_k 的相鄰整數倍。假設 $S_k > 1 > S_{k-1}$，再注意到 1 也是 a_k 的整數倍，就發現 a_k 的相鄰整數倍中居然又夾了一個 a_k 的整數倍，矛盾！於是知 $S_k = 1$。 □

定理 14. 續定理 *9*，假設對一個空格已經有一些蘿莉被標定了，且被標定的蘿莉之中和這個空格距離最遠的和其距離為 n，則至少有 n 個蘿莉被標定。

證明. 運用數學歸納法。

(i) $n = 1$ 時原命題顯然成立。

(ii) 假設當 $n = k$ 時原命題已成立，即假設對一個空格已經有一些蘿莉被標定了，且被標定的蘿莉之中和這個空格距離最遠的和其距離為 k，則至少有 k 個蘿莉被標定。

(iii) 當 $n = k + 1$ 時

列出不定方程，假設和該空格距離為 i 的蘿莉有 a_i 個 $(i = 1, 2, \cdots, k + 1)$，則有

$$a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_3 + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}a_k + \frac{1}{2^k}a_{k+1} = 1 \ldots (1)\text{，其中 } a_{k+1} > 0$$

將(1)式兩端乘上 2^k 倍可得：

$$2^k a_1 + 2^{k-1}a_2 + 2^{k-2}a_3 + \cdots + 2a_k + a_{k+1} = 2^k$$

由這個式子可知 a_{k+1} 必為偶數，因此 (1) 式可改寫為

$$a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_3 + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\left(a_k + \frac{a_{k+1}}{2}\right) = 1 \ldots (2)$$

對 (2) 式運用 (ii) 的歸納假設可得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \frac{a_{k+1}}{2} \geq k \ldots (3)$$

又因為 $a_{k+1} > 0$，所以 $\frac{a_{k+1}}{2} > 0$，又 $\frac{a_{k+1}}{2}$ 為整數故 $\frac{a_{k+1}}{2} \geq 1 \ldots (4)$
把(3)(4)式相加即得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geq k + 1$

因此由數學歸納法，原命題成立。 □

定理 15. 對任意正整數 a, b, c 皆有

(i) $f(a, c) + f(b, c) \geq f(a + b + 1, c)$;

(ii) $f(c, a) + f(c, b) \geq f(c, a + b + 1)$.

證明. 由定理 1，只需證 (i) 即可。
考慮兩個排列 A 與 B，A、B分別是 $a \times c$ 和 $b \times c$ 的最佳合法排列。現在要構造合法排列 C 為一個 $(a+b+1)\times c$ 的排列，其中
$\delta_C(x,y) = \delta_A(x,y)$，對於 $1 \le x \le a$ 且 $1 \le y \le c$
$\delta_C(x,y) = \delta_B(x-a-1,y)$，對於 $a+2 \le x \le a+b+1$ 且 $1 \le y \le c$
$\delta_C(x,y) = 0$，對於 $x = a+1$
則令 $P = L[(1,1),(a,c)]$、$Q = L[(a+2,1),(a+b+1,c)]$
$\forall\ (x,y) \in P$，我們有

$$\begin{aligned} M_C(x,y) &\geq M_C(x,y)\Big|_P = \sum_{G\in P} \delta_C[(x,y),G]\sigma(G) \\ &= \sum_{G\in A} \delta_A[(x,y),G]\sigma(G) = M_A(x,y) \ge 1 \ldots (1) \end{aligned}$$

$\forall\ (x,y) \in Q$，我們有

$$\begin{aligned} M_C(x,y) &\geq M_C(x,y)\Big|_Q = \sum_{G\in Q} \delta_C[(x,y),G]\sigma(G) \\ &= \sum_{G\in B} \delta_B[(x-a-1,y),G]\sigma(G) = M_B(x-a-1,y) \ge 1 \ldots (2) \end{aligned}$$

現在考慮 $M_C(a+1,y_0)$。若 $\delta_C(a,y_0) = 1$ 或 $\delta_C(a+2,y_0) = 1$ 都會有 $M_C(a+1,y_0) \ge 1$。
當 $\delta_C(a,y_0) = 0$ 且 $\delta_C(a+2,y_0) = 0$ 時，我們有

$$\begin{aligned} M_C(a+1,y_0) &= M_C(a+1,y_0)\Big|_P + M_C(a+1,y_0)\Big|_Q \\ &= \sum_{\substack{(x,y)\in P \\ x\le a}} \sigma[(a+1,y_0),(x,y)]\delta_C(x,y) + \sum_{\substack{(x,y)\in Q \\ x\ge a+2}} \sigma[(a+1,y_0),(x,y)]\delta_C(x,y) \\ &= \sum_{\substack{(x,y)\in P \\ x\le a}} \frac{1}{2}\sigma[(a,y_0),(x,y)]\delta_C(x,y) + + \sum_{\substack{(x,y)\in Q \\ x\ge a+2}} \frac{1}{2}\sigma[(a+2,y_0),(x,y)]\delta_C(x,y) \\ &= \frac{1}{2}(M_C(a,y_0) + M_C(a+2,y_0)) \\ &= \frac{1}{2}(M_A(a,y_0) + M_B(1,y_0)) \ge \frac{1}{2}(1+1) = 1 \ldots (3) \end{aligned}$$

由(1)(2)(3)知 C 是個合法排列且上面恰有 $f(a,c) + f(b,c)$ 個蘿莉，故得證。 □

定理 16. 若 a, b, m 為正整數，且 $m \le 7$，則 $f(a,m) \ge f(b,m)$。

證明. 首先先證以下敘述：若 $f(n,m) \le n+1$，則 $f(n,m) \le f(n+1,m)$。
Case 1. $f(n+1,m) \ge n+1$：此時 $f(n,m) \le n+1 \le f(n+1,m)$ 顯然。
　　假設該敘述不成立，則 $f(n+1,m) \le n$。這時存在一個 $(n+1)\times m$ 的合法排列，上面只有 $f(n+1,m) \le n$ 個蘿莉。由於這個方格版有 $n+1$ 行，故由鴿籠原理知必有一行沒有任何的蘿莉。將這行去掉後，把左右兩邊重新合併可以得到一個 $n \times m$ 的排列，顯然對於原本排列上的任何一組蘿莉–空格對，經過調整後他們的距離都不會增加，因此所有空格的蘿莉場都不會減少，因此這個 $m \times n$ 的排列仍然是合法排列，且上面有 $f(n+1,m)$ 個蘿莉，因此 $f(m,n) \le f(m+1,n)$。 故知此敘述成立。
現在繼續證明原定理，先考慮 $m = 7$ 的情況，由前面的研究結果知 $f(1,7) = 2$、$f(2,7) = 3$、$f(3,7) = 4$。以下利用定理 15 和數學歸納法證明對任意正整數 n，有 $f(n,7) \le n+1$。

(i) 當 $n = 1,\ 2,\ 3$ 時，原命題成立。

(ii) 假設對 $n = m-1$, $n = m$ 時皆成立。

(iii) 當 $n=m+1$ 時，運用定理 15 和歸納假設

$$f(m+1,7)\le f(m-1,7)+f(1,7)\le m+2$$

於是由數學歸納法知對任意正整數 n，有 $f(n,7)\le n+1$。

當 $m\le 6$ 時，由於 $f(1,m)\le 2$、$f(2,m)\le 3$，$f(3,m)\le 4$，故上述的證明過程仍然可以直接套用，得到此比較律對 $m=6,\ 5,\ 4$ 也成立，故原命題成立。 □

2.6 $f(m,n)$ 的下界估計

首先，如果假設蘿莉對所在格子造成蘿莉場為 1，經由等比級數的運算可知一個蘿莉場對所有空格造成的蘿莉場必小於 17。

再來我們考慮冗餘蘿莉場造成的蘿莉場浪費：對於一個不靠邊的空格 (x,y)，若上面有蘿莉，則 $M(x\pm1,y\pm1)\Big|_{(x,y)}=\frac{1}{2}$，這意味著我們還需要其他蘿莉來對 $(x\pm1,y\pm1)$ 這四個空格造成不足的 $\frac{1}{2}$ 蘿莉場。對任何一個其他格子的蘿莉，我們定義「效率」為對 $(x\pm1,y\pm1)$ 這四個空格造成的蘿莉場總和，與對 (x,y) 造成的蘿莉場(即冗餘蘿莉場)之比值。並定義效率函數

$$\phi(G)=\frac{\sum_{\substack{a=x\pm1\\b=y\pm1}}\sigma[(a,b),G]}{\sigma[(x,y),G]}.$$

我們要找出 $\phi(G)$ 的最大值。

若 $G\in\{(a,b)|a>x;\ b=y\}$，設 $a=x+k$，我們有

$$\phi(G)=\frac{\sum_{\substack{a=x\pm1\\b=y\pm1}}\sigma[(a,b),G]}{\sigma[(x,y),G]}=\frac{\frac{2}{2^{k-1}}+\frac{2}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^{k-1}}}=\frac{5}{2}.$$

從圖形上的對稱性，我們知道當 $G\in\{(a,b)|a<x;\ b=y\}$、$G\in\{(a,b)|a=x;\ b>y\}$ 以及 $G\in\{(a,b)|a=x;\ b<y\}$ 時，情況是完全一樣的。

又若 $G\in\{(a,b)|a>x;\ b>y\}$，設 $a=x+k$、$b=y+l$，我們有

$$\phi(G)=\frac{\sum_{\substack{a=x\pm1\\b=y\pm1}}\sigma[(a,b),G]}{\sigma[(x,y),G]}=\frac{\frac{1}{2^{k+l-3}}+\frac{2}{2^{k+l-1}}+\frac{1}{2^{k+l+1}}}{\frac{1}{2^{k+l-1}}}=\frac{25}{4}.$$

從圖形上的對稱性，我們知道當 $G\in\{(a,b)|a<x;\ b>y\}$、$G\in\{(a,b)|a>x;\ b<y\}$ 以及 $G\in\{(a,b)|a<x;\ b<y\}$ 時，情況是完全一樣的。

因此可知 $\phi(G)$ 的最大值為 $\frac{25}{4}$。

由於 $(x\pm1,y\pm1)$ 這四個空格總計還缺少 2 的蘿莉場，即使假設其他蘿莉都以最大效率來補足缺少的蘿莉場，仍然會造成 $2\div\frac{25}{4}=\frac{8}{25}$ 的冗餘蘿莉場。

由於每個不靠邊的空格中的蘿莉造成的蘿莉場都以 17 為上界，且又會有 $\frac{8}{25}$ 的浪費，故可以當成每個蘿莉只有 $\frac{417}{25}$ 的蘿莉場真正作用在方格上。

對於邊上及角落的蘿莉而言，無法適用上面的討論，但可以由直接計算來確定它們對所有方格造成的蘿莉場總和必小於 $\frac{417}{25}$。

因此，對一個 $m\times n$ 方格而言，總計應有至少 mn 的蘿莉場，但每個蘿莉至多貢獻 $\frac{417}{25}$ 的蘿莉場，因此有 $f(m,n)\ge\lceil\frac{25mn}{417}\rceil$。

2.7 $f(m,n)$ 的上界估計

定義 $r(n) = \left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil$、$s(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ if $1 \le n \le 11$; $s(9n+k) = 4n + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ if $12 \le k \le 20$ and $n \in N_0$
那麼由 2.4 和 2.5 的討論結果知 $f(n,2) = r(n)$ 且 $f(n,3) \le s(n)$。
我們可以運用定理 11 來完成對任意 m, n，$f(m,n)$ 的上界估計。
當 $m = 1,\ 2,\ 3$ 時已完成。
當 $m = 4$ 時，$f(4,n) \le f(1,n) + f(2,n) = \left\lceil \frac{n-4}{4} \right\rceil + r(n)$。
連續運用定理 15 我們有

$$\begin{aligned} kf(m,n) &= f(m,n) + f(m,n) + (k-2)f(m,n) \\ &\ge f(2m+1,n) + (k-2)f(m,n) \ge \cdots \\ &\ge f(k(m+1)-1,n) \end{aligned}$$

因此有 $af(2,n) + bf(3,n) \ge f(3a-1,n) + f(4b-1,n) \ge f(3a+4b-1,n)$
對於 $m > 4$，由數論上的性質可知必存在非負整數 a, b 使得 $3a+4b-1 = m$，此時便有

$$f(m,n) = f(3a+4b-1,n) \le af(2,n) + bf(3,n) \le ar(n) + bs(n)$$

如此一來對於任意 m, n 都可以找到 $f(m,n)$ 之上界。

2.8 蘿莉密度

除了一個排列所需的蘿莉數量，我們也會關心究竟多少的空格所構成的方格版會需要大約多少的蘿莉，這就是所謂的「蘿莉密度」。一般而言，當方格板越大，且寬度不太窄時(過窄的寬度，例如 1、2 等情況，會導致較高的蘿莉密度)，蘿莉密度就越小。$f(x,y) \le k$ 這樣的式子代表著存在 $x \times y$ 的合法排列只有 k 個蘿莉，故這樣的蘿莉密度為 $\frac{k}{xy}$。

目前找到的最佳蘿莉密度可趨近 $\frac{7}{64}$，以下為構造：

	○				○	
○			○			○
	○				○	

可以檢驗上圖為 7×7 的合法排列，上面恰有 7 個蘿莉，故知 $f(7,7) \le 7$。

由定理 16 我們可以得到 $f(8k-1,7) \le kf(7,7)$，進而有 $f(8k-1,8l-1) \le lf(8k-1,7) \le klf(7,7) \le 7kl$。
這個蘿莉密度為 $\frac{7kl}{(8k-1)(8l-1)}$，又如果將 k 和 l 都趨近無窮大，我們便會發現這個密度趨近於 $\frac{7}{64}$。

3 未來展望與應用

3.1 未來展望

由於時間或能力的不足，或其他諸多種種因素，使得本作品尚有許多可以發揮之處。在這個題目上的未來展望如下：

1. 找到更佳的上界與下界。
2. 把比較律一般化，即：對任意正整數 a_1, a_2, b_1, b_2，若 $a_1 \geq a_2$ 且 $b_1 \geq b_2$，則有 $f(a, b_1) \geq f(a_2, b_2)$。
3. 確認 $f(m, n)$ 的通式。
4. 發展不同的蘿莉場模型。
5. 往三維度或高維度發展。
6. 把命題由離散性改為連續性。

3.2 運用

本題目的發展有相當多的運用，舉例來說，臨避設施(例：垃圾場)等的興建，應盡可能使每個地方都享有設施帶來的便利性，但又不要設太多導致經費的浪費以及周遭住戶的抗爭，此時便會想找出興建最少設施的方案，本文的研究可以提供此類問題的一種模型。又如滴墨水來染色一張紙，要求每處的墨水量達到一定程度。墨水分布的情況應該較為接近指數型，和本文研究類似，惟其連續性的變化是本文未探討的部分。總之，類似的應用相當廣泛。

A 附錄

關於 $f(n, 3)$ 的計算的 C 語言的程式碼

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
typedef struct{
int x;
int y;
}point;
typedef struct{
point a1;
point a2;
point a3;
point a4;
point a5;
}loliset;
int paw2(int a);
int distanct(point p1,point p2);
int check(point p,loliset set);
point turnpoint(int a);
main()
{
int i,j;
int num[6];
```

```
loliset target;
point test;
for(num[1]=1;num[1]<=30;num[1]++)
for(num[2]=num[1]+1;num[2]<=30;num[2]++)
for(num[3]=num[2]+1;num[3]<=30;num[3]++)
for(num[4]=num[3]+1;num[4]<=30;num[4]++)
for(num[5]=num[4]+1;num[5]<=30;num[5]++)
{
target.a1.x=(num[1]-1)%10+1;
target.a1.y=(num[1]-1)/10+1;
target.a2.x=(num[2]-1)%10+1;
target.a2.y=(num[2]-1)/10+1;
target.a3.x=(num[3]-1)%10+1;
target.a3.y=(num[3]-1)/10+1;
target.a4.x=(num[4]-1)%10+1;
target.a4.y=(num[4]-1)/10+1;
target.a5.x=(num[5]-1)%10+1;
target.a5.y=(num[5]-1)/10+1;
for(j=1;j<=3;j++)
for(i=1;i<=10;i++)
{
test.x=i;
test.y=j;
if(check(test,target))
goto START;
}
printf("有解");
START:i=0;
}
}
int paw2(int a)
{
if(a==0)
return 1;
else
return 2*paw2(a-1);
}
int distant(point p1,point p2)
{
int sum=0;
if(p1.x>p2.x)
sum=sum+p1.x-p2.x;
else
sum=sum+p2.x-p1.x;
if(p1.y>p2.y)
sum=sum+p1.y-p2.y;
else
sum=sum+p2.y-p1.y;
return sum;
}
int check(point p,loliset set)
{
```

```
double sum=0.0;
sum=sum+2.0/paw2(distant(p,set.a1));
sum=sum+2.0/paw2(distant(p,set.a2));
sum=sum+2.0/paw2(distant(p,set.a3));
sum=sum+2.0/paw2(distant(p,set.a4));
sum=sum+2.0/paw2(distant(p,set.a5));
if(sum>=1.0)
return 0;
else
return 1;
}
```