

並蒂花開-探討母圖所生成子圖軌跡之鑲嵌性質

國立新竹高級中學 官顯叡
指導老師 黃文鍾

中文摘要

給定兩相似圖形 P 與 Q (母圖) 為 n 邊形, 在兩圖形各取一邊上之一動點, 再於其連線上取一分點. 讓動點移動後可知此分點軌跡(部分子圖)為平行四邊形, 且不論母圖如何移動, 子圖形狀皆不發生改變. 接著在兩母圖中依序各取一邊做相同動作, 會產生 n 個部份子圖, 其聯集稱之為子圖. 驚喜的是我們發現在兩相似的正 n 邊形母圖間有旋轉一特定角度的關係時, 則其子圖會形成準鑲嵌圖形, 且兩母圖的邊長如果為特定比例時, 則其子圖會形成鑲嵌圖形, 然後此鑲嵌性質可以擴展成各圈子圖. 接著將正 n 邊形放寬為平行偶數邊形或凸 n 邊形時, 討論其子圖的鑲嵌性質. 再來我們將母圖數從兩個提升到 N 個, 若 N 為奇數, 則其子圖最多為準鑲嵌圖形; 若 N 為偶數, 則其子圖可為鑲嵌圖形. 最後將分點的取法推廣到線性變換中, 討論其子圖的鑲嵌性質, 可喜的是, 我們得到一類特定形式的線性變換, 其子圖可為鑲嵌圖形.

Abstract

We first drew a moving point on one side of each of the two similar polygons named P and Q . These two points were then connected to form a line, on which a point was drawn. When we shifted these two moving points up and down, the trace of this point would form a parallelogram. Besides, no matter how the original polygons changed their positions, the created pattern from the trace remained the same. Then by repeating the same process on the other sides of the two polygons we got numerous traces, the union of which we call a generated graph. And we found if we rotated the two equilateral polygons to a certain angle, the generated graph would become a collage graph. What was more surprising, when the sides of the two equilateral polygons changed at a certain rate, the pattern of the generated graph would become a tessellation. Then we could use the same way to find tessellating layers of the graph satisfying the rules. By the way, we also discussed the case where P and Q are parallel polygons with even sides or convex polygons. Furthermore, if we increase the number of two polygons to N , when N was an odd number, the pattern of the generated graph were mostly quasi-tessellation, but when N was an even number, the the patterns of generated graph were tessellation. Finally we expanded our investigation to linear transformations, and a family of linear transformations ensuring the existence of tessellating generated graphs was fortunately found.

1 研究動機

過去人們對於鑲嵌性質的研究大都侷限於多邊形間的鑲嵌, 於是猜想或許軌跡圖形也有類似的鑲嵌性質, 經過幾次跟老師的討論及畫圖觀察後, 更確定了軌跡圖形也有鑲嵌性質, 於是決定以此為研究主軸.

2 研究目的

定義 1. 給定兩相似的圖形 P 與 Q , 其中圖形 P 的頂點為 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 且圖形 Q 的頂點為 $B_1, B_2, \dots, B_n$. 分別在 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$ 上取動點 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 並給定 $i = 0, 1, \dots, n-1$, 在 $\overline{B_{1+i}B_{2+i}}, \overline{B_{2+i}B_{3+i}}, \dots, \overline{B_{n+i}B_{1+i}}$ (其中 $B_{n+1} = B_1, \dots, B_{2n-1} = B_{n-1}$) 上也分別取動點 $D_1, D_2, \dots, D_n$, 然後在 $\overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_2D_2}, \dots, \overrightarrow{C_nD_n}$ 上取點 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 使得

$$\overrightarrow{tC_1M_1} = \overrightarrow{sM_1D_1}, \overrightarrow{tC_2M_2} = \overrightarrow{sM_2D_2}, \dots, \overrightarrow{tC_nM_n} = \overrightarrow{sM_nD_n},$$

即

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} = \frac{t}{s+t}\overrightarrow{OC_1} + \frac{s}{s+t}\overrightarrow{OD_1}, \\ \overrightarrow{OM_2} = \frac{t}{s+t}\overrightarrow{OC_2} + \frac{s}{s+t}\overrightarrow{OD_2}, \\ \vdots \\ \overrightarrow{OM_n} = \frac{t}{s+t}\overrightarrow{OC_n} + \frac{s}{s+t}\overrightarrow{OD_n}, \end{cases}$$

其中 $s, t \in \mathbb{R}$, $st \neq 0$ 且 $s+t > 0$.

令 $G_i(s, t) = G_{i1}(s, t) \cup G_{i2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{in}(s, t)$, 其中

$$G_{ij}(s, t) = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \frac{t}{s+t}\overrightarrow{OC_j} + \frac{s}{s+t}\overrightarrow{OD_j} \right. \\ \left. \text{for some } C_j \in \overline{A_j A_{j+1}}, D_j \in \overline{B_{j+i} B_{j+1+i}} \right\}.$$

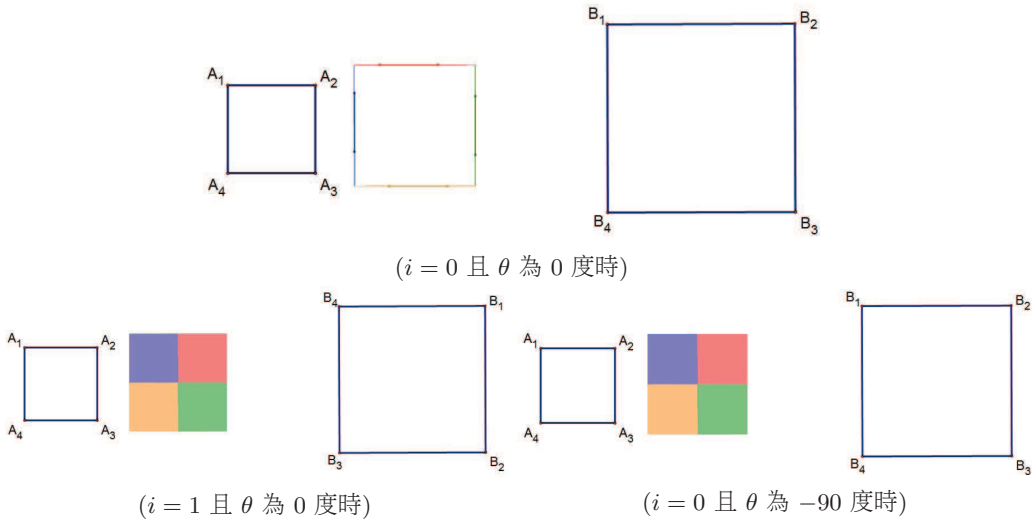
定義 2. 稱給定兩相似圖形 P 與 Q 為母圖, 其生成之圖形 $G_i(s, t)$ 為圖形 P 與 Q 的比例 $s:t$ 之第 i 階子圖, 而 $G_{ij}(s, t)$ 為圖形 P 與 Q 的第 i 階第 j 個部份子圖.

定義 3. 給定相似母圖, 當其所有部分子圖間以「沒有間隙, 但允許重疊」的方式接合所形成的子圖稱為拼貼圖形; 以「沒有間隙且不重疊」的方式接合所形成的子圖稱為鑲嵌圖形; 以「沒有重疊, 但允許中空了與母圖相似的圖形」之方式接合所形成的圖形稱為準鑲嵌圖形.

註: 由定義 3, 鑲嵌圖形為準鑲嵌圖形的特殊情形, 同時也是拼貼圖形的特殊情形.

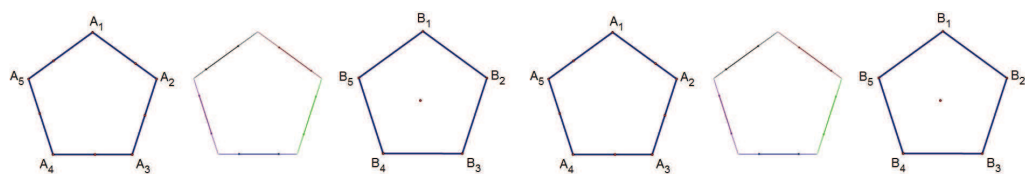
目的 1. 若圖形 P 、 Q 為相似的正 n 邊形, 且圖形 Q 為將圖形 P 平移後旋轉有向角 θ , 當 i 與 θ 變動時, 觀察子圖 $G_i(s, t)$ 的現象並討論其鑲嵌性質.

例 1: 當圖形 P 、 Q 分別為相似的正方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 、 $B_1 B_2 B_3 B_4$, 而 $s:t = 1:3$, i 由 0 變動為 1 與 θ 由 0 變動為 -90 度時, 分別如下圖所示.



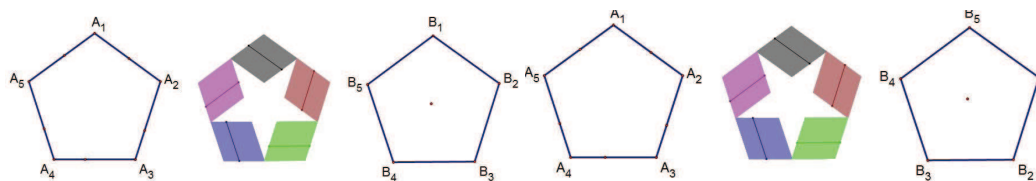
例 2: 當圖形 P 、 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 、 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$, 而 $s:t = 1:1$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 與 θ 為 $0, -72, -144, -216, -288$ 度之對應關係, 分別如下圖所示.

目的 2. 若圖形 P 、 Q 為相似的正 n 邊形, 且圖形 Q 為將圖形 P 平移後旋轉有向角 θ , 當 i 固定而 θ 變動時, 觀察子圖 $G_i(s, t)$ 的現象, 並求得所有相鄰部分子圖 $G_{ij}(s, t)$ 均鑲嵌接合時的臨界角度 θ .



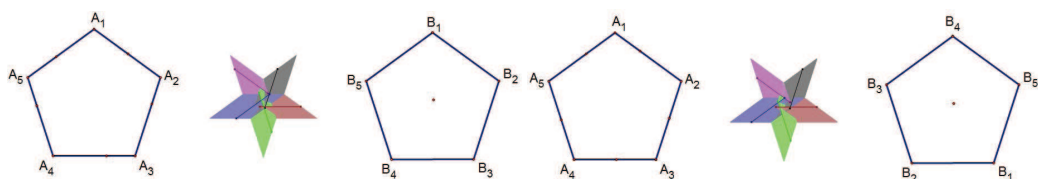
(0 階)

(旋轉 0 度)



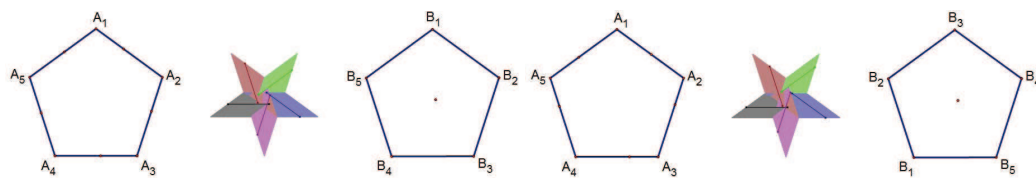
(1 階)

(旋轉 -72 度)



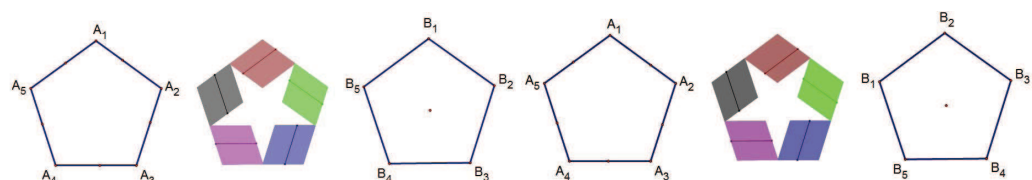
(2 階)

(旋轉 -144 度)



(3 階)

(旋轉 -216 度)



(4 階)

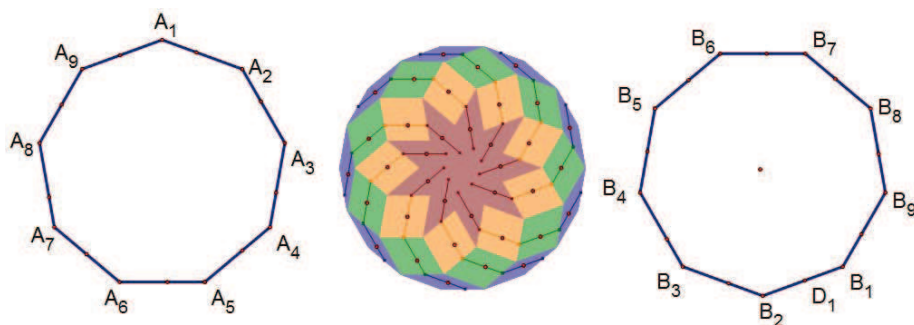
(旋轉 -288 度)

例 3: 當圖形 P 、 Q 分別為相似的凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ ，且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 θ ，當 $\theta = 0^\circ, 80^\circ, 130^\circ, 180^\circ, 250^\circ$ 時， $G_1(1, 1)$ 分別如下圖所示，注意當 $\theta = 180^\circ$ 時，子圖 $G_i(s, t)$ 為準鑲嵌圖形。



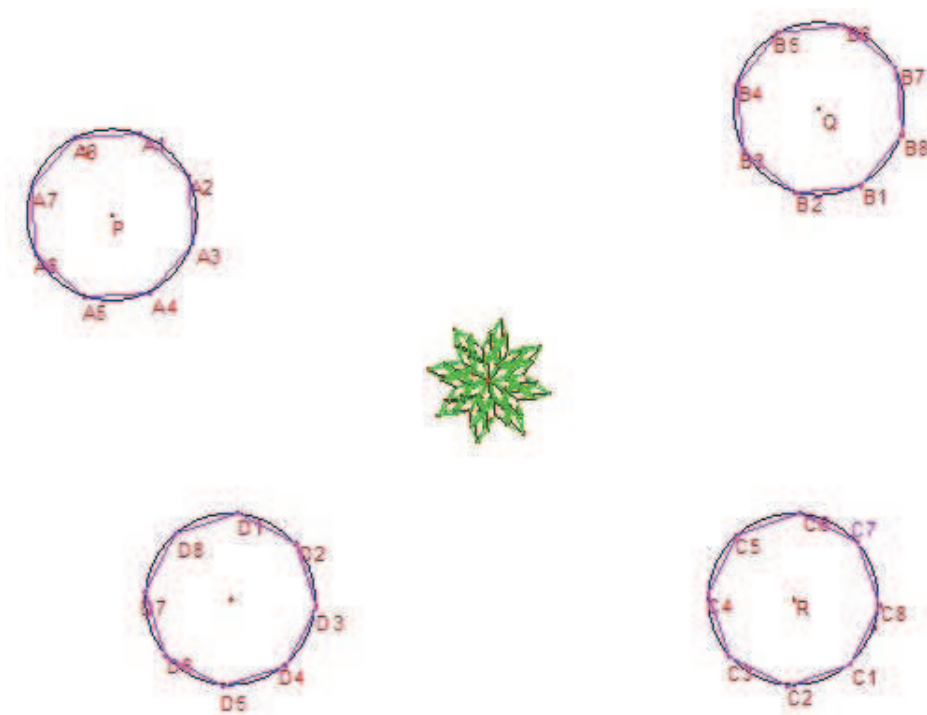
目的 3. 若兩全等圖形 P 、 Q 互為平移且旋轉關係，當 i 變動時，觀察子圖 $G_i(s, t)$ 聯集的現象，並討論其鑲嵌性質。

例 4: 當圖形 P 、 Q 分別為全等的正九邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 -140 度, 而 $s:t = 1:1$, $i = 9$ (即 0), 8, 7, 6 時, 分別如下圖所示.



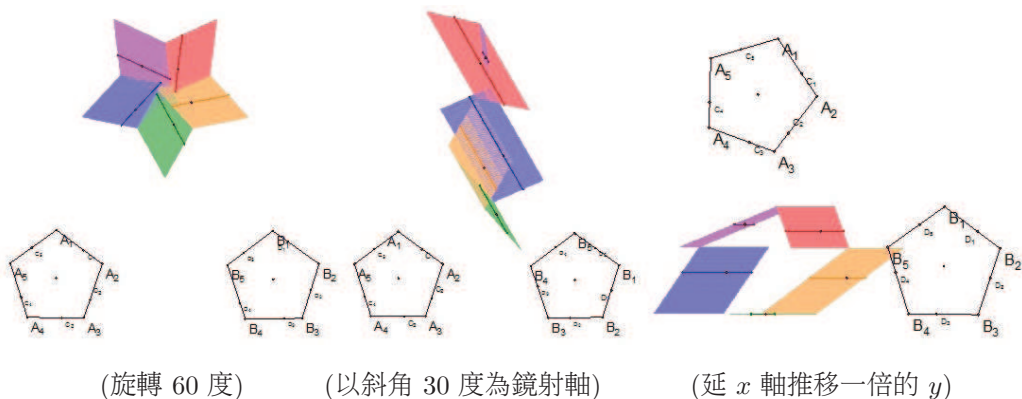
目的 4. 若 N 個全等圖形 $Q_1 Q_N$ 互為平移且旋轉關係時, 觀察子圖的現象並討論其鑲嵌性質.

例 5: 當圖形 $Q_1 Q_4$ 分別為全等的正八邊形, 且分點取法為重心時, 如下圖所示.



目的 5. 若兩全等圖形 P 、 Q 互為平移且旋轉關係, 將所取之分點推廣為基本的線性變換 (伸縮、推移、鏡射、旋轉) 後, 觀察子圖的現象並討論其鑲嵌性質.

例 6: 當圖形 P 、 Q 分別為正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$, 而 $s:t = 1:1$, $i = 0$ 時, 旋轉、鏡射、推移變換分別如下圖所示.



3 研究方法與過程

一、兩母圖取分點所生成子圖軌跡之鑲嵌性質

引理 1. 若給定線段 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{B_1B_2}$ 時, 則其生成之子圖 $G_{01}(s, t)$ 為平行四邊形 $E_{11}E_{21}E_{22}E_{12}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, 其中

$$\overrightarrow{OE_{kl}} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{OA_k} + \frac{s}{s+t} \overrightarrow{OB_l}, \quad \forall k, l \in \{1, 2\},$$

且

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_{11}E_{21}} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_1A_2}, \\ \overrightarrow{E_{11}E_{12}} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_1B_2}, \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \text{其一內角 } \angle E_{11} \text{ 為 } \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_1A_2} \text{ 與 } \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_1B_2} \text{ 的夾角,} \\ \text{另一內角 } \angle E_{12} \text{ 為 } \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_1A_2} \text{ 與 } \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_2B_1} \text{ 的夾角.} \end{cases}$$

證明. 因 $G_{01}(s, t)$ 為所有 M_1 所形成的圖形, 又 M_1 為 $\overline{C_1D_1}$ 上之一點, C_1, D_1 為 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}$ 上之兩動點, 當固定 D_1 時

$$\left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{OC_1} + \frac{s}{s+t} \overrightarrow{OD_1} \text{ for some } C_1 \in \overline{A_1A_2} \right\}$$

所形成的圖形為線段 $\overline{A'_1A'_2}$. 當 D_1 在 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 上變動時, $\overline{A'_1A'_2}$ 所形成的圖形即為 $G_{01}(s, t)$, 所以可知 $G_{01}(s, t)$ 為四邊形. 令 $G_{01}(s, t)$ 的四個頂點為 $E_{11}E_{21}E_{22}E_{12}$, 如下圖所示.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{11}E_{12}} &= \overrightarrow{A_1E_{12}} - \overrightarrow{A_1E_{11}} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{A_1B_2} - \frac{s}{s+t} \overrightarrow{A_1B_1} = \frac{s}{s+t} (\overrightarrow{A_1B_2} - \overrightarrow{A_1B_1}) \\ &= \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_1B_2} = \frac{s}{s+t} (\overrightarrow{A_2B_2} - \overrightarrow{A_2B_1}) = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{A_2B_2} - \frac{s}{s+t} \overrightarrow{A_2B_1} \\ &= \overrightarrow{A_2E_{22}} - \overrightarrow{A_2E_{21}} = \overrightarrow{E_{21}E_{22}}, \end{aligned}$$

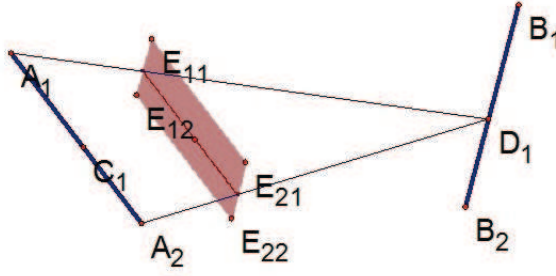
同理

$$\overrightarrow{E_{11}E_{21}} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{E_{12}E_{22}},$$

故內角

$$\begin{aligned}\angle E_{11} & \text{ 為 } \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_1 A_2} \text{ 與 } \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_1 B_2} \text{ 的夾角,} \\ \angle E_{12} & \text{ 為 } \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_2 A_1} \text{ 與 } \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_1 B_2} \text{ 的夾角.}\end{aligned}$$

(圖中的 $s:t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)



□

由引理 1 可知 ”定理 1”:

定理 1. 若給定的兩相似母圖 P 與 Q 為 n 邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 與 $B_1 B_2 \dots B_n$ 時, 則其生成之所有部份子圖 $G_{ij}(s, t)$ 均為平行四邊形.

定義 4. 令 $G_{ij}(s, t)$ 為平行四邊形 $E_{j(j+i)} E_{(j+1)(j+i)} E_{(j+1)(j+1+i)} E_{j(j+1+i)}$, 且當固定 D_j 時, 令

$$\left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{OC_j} + \frac{s}{s+t} \overrightarrow{OD_j} \text{ for some } C_j \in \overline{A_j A_{j+1}} \right\}$$

所形成的線段為 $\overline{A'_j A'_{j+1}}$; 當固定 C_j 時, 令

$$\left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{OC_j} + \frac{s}{s+t} \overrightarrow{OD_j} \text{ for some } D_j \in \overline{B_{i+j} B_{i+j+1}} \right\}$$

所形成的線段為 $\overline{B'_{i+j} B'_{i+j+1}}$.

由引理 1 知 $G_{ij}(s, t)$ 中

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_{j(j+i)} E_{(j+1)(j+i)}} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_j A_{j+1}}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)} E_{j(j+1+i)}} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_j B_{j+1}}, \end{cases}$$

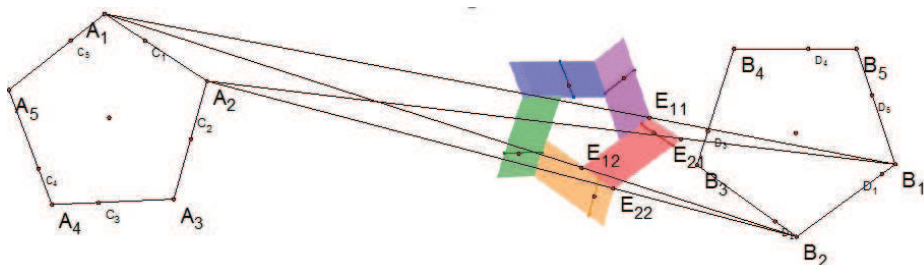
而

$$\text{其一內角 } \angle E_{j(j+1+i)} \text{ 為 } \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_j A_{j+1}} \text{ 與 } \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{j+i} B_{j+1+i}} \text{ 的夾角,}$$

$$\text{另一內角 } \angle E_{j(j+1+i)} \text{ 為 } \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_j A_{j+1}} \text{ 與 } \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{(j+1+i)(j+i)}} \text{ 的夾角,}$$

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots, (n-1), j = 1, 2, \dots, n.$$

例 7: 當圖形 P 、 Q 分別為正五邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 、 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$, 而 $s:t = \pi : \sqrt{2}$, $i = 0$ 時, $G_0(\pi, \sqrt{2})$ 如下圖所示.



定理 2. 令給定兩相似母圖 P 與 Q 之子圖為 G_i 且兩相似母圖 P 與 Q' 之子圖為 G'_i , 若母圖 Q 平移了一向量 $\vec{d}$ 到母圖 Q' , 則子圖 G_i 也會平移固定的向量 $\frac{s}{s+t}\vec{d}$ 到 G'_i .

證明. 根據定理 1, 平行四邊形 G_{ij} 的大小及角度由 P 與 Q 的邊長而定, 而此時只是將 Q 平移並沒改變其大小及角度, 因此「 G_{ij} 的圖形不變」. 不失一般性, 以下證明若 Q 平移了 $\vec{d}$ 則 G_{01} 平移了 $\frac{s}{s+t}\vec{d}$.

若今將 Q 平移了 $\vec{d}$ 則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_1M'_1} &= \frac{s}{s+t}\overrightarrow{C_1D_1} = \frac{s}{s+t}(\overrightarrow{C_1D_1} + \vec{d}) = \frac{s}{s+t}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{s}{s+t}\vec{d} \\ &= \overrightarrow{C_1M_1} + \frac{s}{s+t}\vec{d}\end{aligned}$$

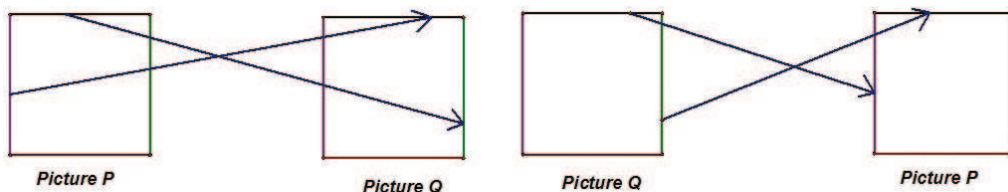
故

$$\overrightarrow{M_1M'_1} = \frac{s}{s+t}\vec{d},$$

所以 G_{01} 也平移了 $\frac{s}{s+t}\vec{d}$. □

定理 3. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為正 n 邊形且母圖 P 與 Q 為平移關係時, 則其第 i 階子圖與第 $n-i$ 階子圖 G_{n-i} 為對稱圖形, 且對稱方向為對稱母圖 P 與 Q 的一個對稱方向.

證明. 觀察母圖 P 與 Q 的第 i 階子圖即為母圖 Q 與 P 的第 $n-i$ 階子圖, 如下圖所示:



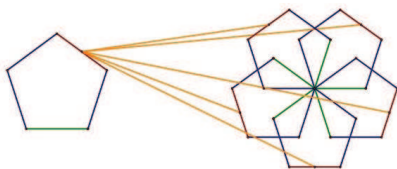
顯然可知母圖 P 與 Q 的第 i 階子圖 G_i 與其第 $n-i$ 階子圖 G_{n-i} 為對稱圖形, 且其對稱方向為母圖 P 與 Q 的一個對稱方向. □

由定理 3 易知 ”定理 4”:

定理 4. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為正 n 邊形且母圖 P 與 Q 為平移關係時, 則其階數 i 變動共可產生 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 種形式的圖形.

定理 5. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為正 n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 k 倍有向角 $\left[\frac{180(n-2)}{n} - 180 \right]^\circ$ 時, 則其第 i 階子圖共有 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 種形式的圖形.

證明. 由定理 2 可知平移母圖 Q 並不影響子圖 G_i 之形狀. 若圖形 Q 以任一頂點為中心旋轉有向角 $\left[\frac{180(n-2)}{n} - 180\right]^\circ$, 如下圖所示, 原本為第 i 階之子圖在經過旋轉 k 次後會全等於第 l 階之子圖, 其中 $(i+k) \equiv l \pmod{n}$.

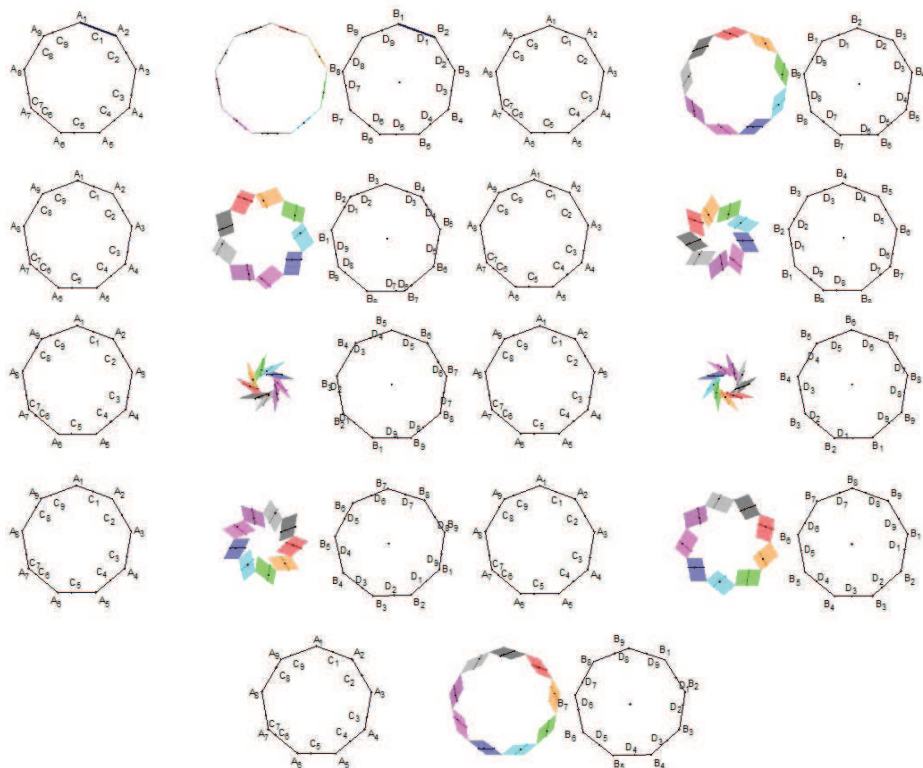


□

由 "定理 4" 與 "定理 5" 的結論, 可得到:

給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形時, 階數 i 不同所產生的子圖種類數與同階數 i 但經過旋轉 k 次有向角 $\left[\frac{180(n-2)}{n} - 180\right]^\circ$ 後產生的子圖種類數會同樣會有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 種, 所以階數 i 的概念在角度上會有較廣義的解釋, 當給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形, 且不論是平移關係或平移且旋轉關係時, 都會有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 種形式的圖形. 因此在 "正" 多邊形的研究中都可將階數 i 這個變因去除, 即不同的階數可視為是旋轉某特定角度, 故此時僅討論 0 階的情形.

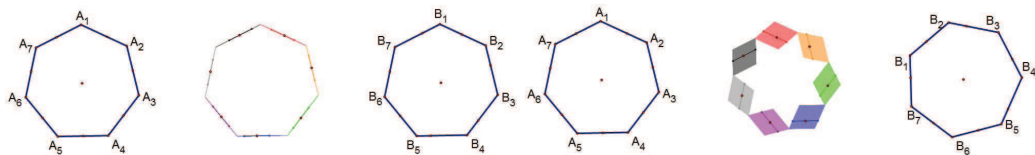
例 8: 當母圖 P 與 Q 分別為 "正" 九邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9$, 而 $s:t = 3:2$, 且旋轉有向角為 $\left[k\left(\frac{180(n-2)}{n} - 180\right)\right]^\circ$, k 分別為 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 時, 分別如下圖所示.



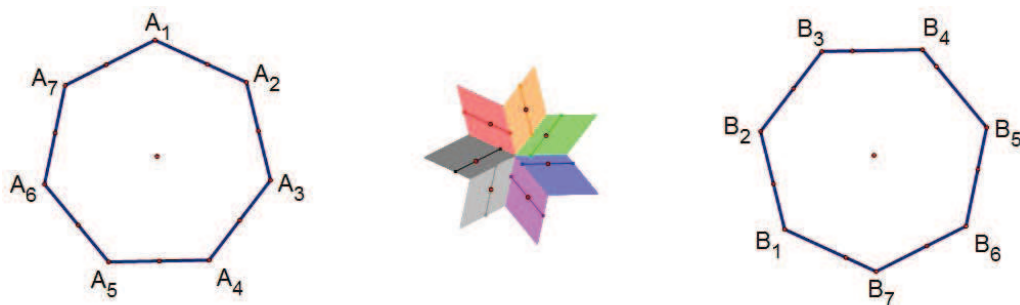
若圖形 P 、 Q 為全等的 "正" n 邊形, 且圖形 Q 為將圖形 P 平移後旋轉有向角 θ , 當 θ 變動時, 我們發現子圖 $G_0(s, t)$ 的現象與其鑲嵌性質如下:

1. 當 $0^\circ \leq \theta < \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ 時,

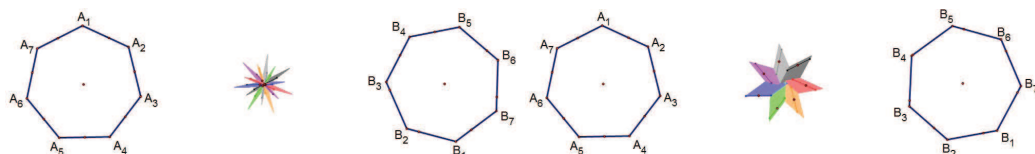
$G_0(1, 1)$ 的空缺逐漸縮小(內部的向量夾角變小, 外部的向量夾角變大);



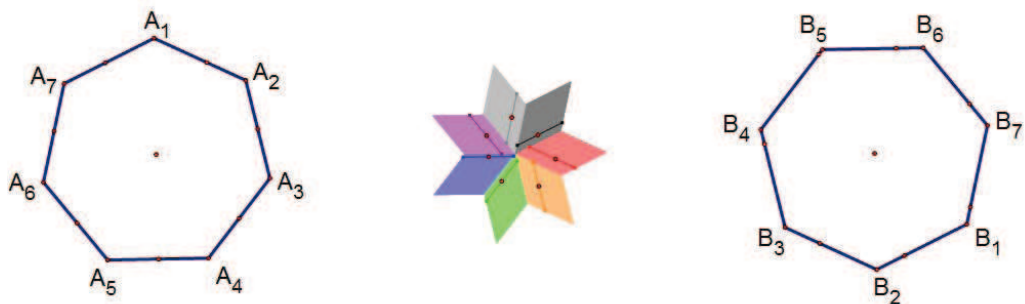
2. 當 $\theta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ 時, $G_0(1, 1)$ 為鑲嵌圖形;



3. 當 $\frac{180^\circ(n-2)}{n} < \theta < \frac{180^\circ(n+2)}{n}$ 時, $G_0(1, 1)$ 為拼貼圖形;

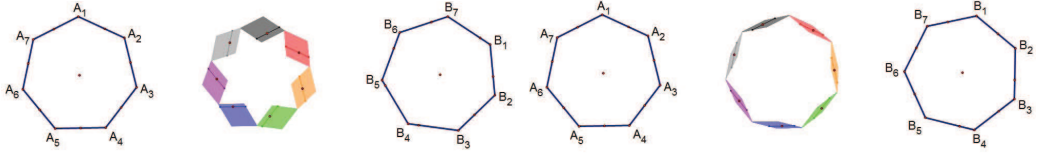


4. 當 $\theta = \frac{180^\circ(n+2)}{n}$ 時, $G_0(1, 1)$ 為鑲嵌圖形;



5. 當 $\frac{180^\circ(n+2)}{n} < \theta < 360^\circ$ 時,

$G_0(s, t)$ 的空缺逐漸擴大(原本內部的向量變成在外部且夾角變大, 而原本外部的向量變成在內部且夾角變小).



將上述發生鑲嵌圖形的臨界角度一般化得到定理 6:

定理 6. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形, 滿足「 $st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ 或「 $st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}\right]$ 」. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $r = \left|\frac{s}{t}\right|$, 則其子圖 $G_0(s, t)$ 為鑲嵌圖形; 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $r \neq \left|\frac{s}{t}\right|$, 則其子圖 $G_0(s, t)$ 為準鑲嵌圖形.

證明. 由定理 4、5 可知, 在正 n 邊形的研究中, 階數 i 的變因可去除, 僅討論 0 階的情形即可, 令 $G_{0j}(s, t)$ 、 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 分別為平行四邊形 $E_{jj}E_{(j+1)j}E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}$, $E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}E_{(j+2)(j+2)}E_{(j+1)(j+2)}$, 因為平行四邊形有兩組對邊平行, 所以 $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 會有兩種鑲嵌接合的情況, 現將此兩種情況分開討論:

I、使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}}$ 、 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)(j+2)}}$ 同向:
因為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}} &= \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1}A_j}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)(j+2)}} &= \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}},\end{aligned}$$

又 $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 交於點 $E_{(j+1)(j+1)}$, 所以當 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)(j+2)}}$ 同向, 亦即 $t\overrightarrow{A_{j+1}A_j}$, $s\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 同向時, $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 會鑲嵌接合.

令 $\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 與 $\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 的夾角為 θ (母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\theta$), 則 $s\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 與 $t\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 的夾角也為 θ , 因為要使 $t\overrightarrow{A_{j+1}A_j}$ 與 $s\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 同向, 也就是要使 θ 為 $s\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 與 $t\overrightarrow{A_{j+1}A_j}$ 的夾角, 所以

$$\theta = \begin{cases} \frac{180^\circ(n-2)}{n}, & st > 0 \\ 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}, & st < 0. \end{cases}$$

而且因為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}} &= \frac{|t|}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1}A_j}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)(j+2)}} &= \frac{|s|}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}},\end{aligned}$$

因此對於 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 會有 n 條長度同為 $\left| \frac{|t|\overrightarrow{A_{j+1}A_j} - |s|\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}}{s+t} \right|$ 的邊圍成一個中空的正 n 邊形(相似於母圖), 故 $G_0(s, t)$ 為準鑲嵌圖形.

II、使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)j}}$ 、 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}}$ 同向：
因為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)j}} &= \frac{s}{s+t}\overrightarrow{B_{j+1}B_j}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}} &= \frac{t}{s+t}\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}},\end{aligned}$$

又 $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 交於點 $E_{(j+1)(j+1)}$ ，所以當 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)j}}$ 、 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}}$ 同向，亦即 $s\overrightarrow{B_{j+1}B_j}$ 、 $t\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 同向時， $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 會鑲嵌接合。

令 $\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 與 $\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 的夾角為 θ (母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 θ)，則 $t\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 與 $t\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 的夾角也為 θ ，因為要使 $s\overrightarrow{B_{j+1}B_j}$ 與 $t\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}$ 同向，也就是要使 θ 為 $s\overrightarrow{B_{j+1}B_j}$ 與 $t\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}$ 的夾角，所以

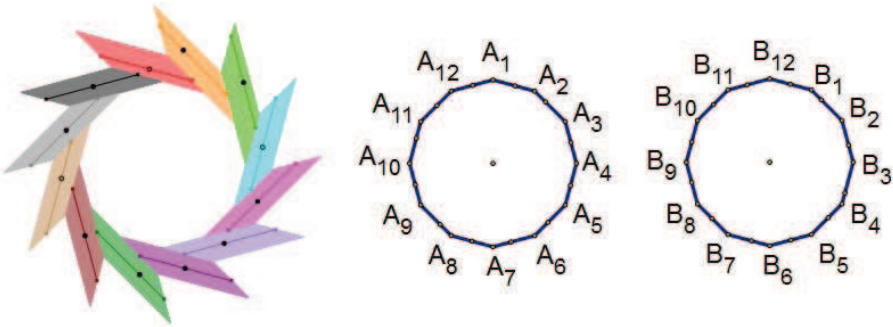
$$\theta = \begin{cases} \frac{180^\circ(n-2)}{n}, st > 0 \\ 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}, st < 0. \end{cases}$$

而且因為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)j}} &= \frac{|s|}{s+t}\overrightarrow{B_{j+1}B_j}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}} &= \frac{|t|}{s+t}\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}},\end{aligned}$$

因此對於 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 會有 n 條長度同為 $\left| \frac{|t|\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}} - |s|\overrightarrow{B_{j+1}B_j}}{s+t} \right|$ 的邊圍成一個中空的正 n 邊形(相似於母圖)，故 $G_0(s, t)$ 為準鑲嵌圖形。

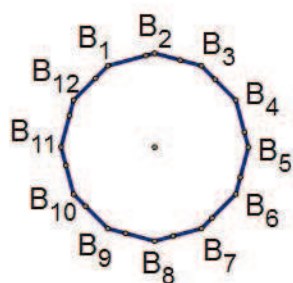
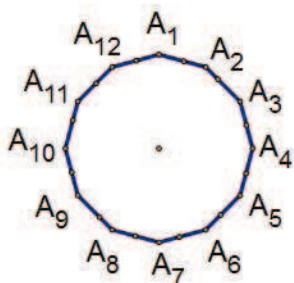
例 9: 當母圖 P 與 Q 分別為正十二邊形 $A_1A_2 \dots A_{12}$ 、 $B_1B_2 \dots B_{12}$ ，且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 -30° 時， $G_0(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ 如下圖所示。



例 10: 當母圖 P 與 Q 分別為正十二邊形 $A_1A_2 \dots A_{12}$ 、 $B_1B_2 \dots B_{12}$ ，且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 30° 時， $G_0(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ 如下圖所示。

然後我們由中空的正 n 邊形之邊長為

$$\left| \frac{|t|\overrightarrow{A_{j+1}A_j} - |s|\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}}{s+t} \right| \quad \text{or} \quad \left| \frac{|t|\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}} - |s|\overrightarrow{B_{j+1}B_j}}{s+t} \right|$$



得知子圖形態與 $\left| \frac{s}{t} \right|$ 有關，因此若令母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 r ，我們分 $r = \left| \frac{s}{t} \right|$, $r > \left| \frac{s}{t} \right|$, $r < \left| \frac{s}{t} \right|$ 討論之：

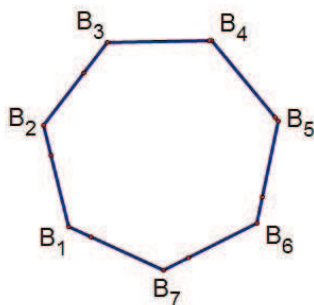
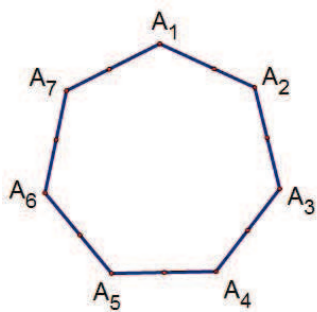
一、 $r = \left| \frac{s}{t} \right|$

此時母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$ ，則中空的正 n 邊形之邊長

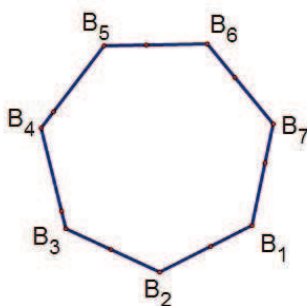
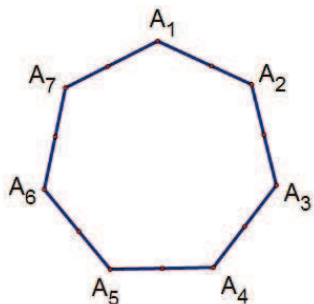
$$\left| \frac{|t| \overline{A_{j+1}A_j} - |s| \overline{B_{j+1}B_{j+2}}}{s+t} \right| \text{ or } \left| \frac{|t| \overline{A_{j+1}A_{j+2}} - |s| \overline{B_{j+1}B_j}}{s+t} \right| = 0$$

$\Rightarrow$ 子圖 $G_0(s, t)$ 為鑲嵌圖形

例 11: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ ，且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \frac{900^\circ}{7}$ 時， $G_0(1, 1)$ 如下圖所示。

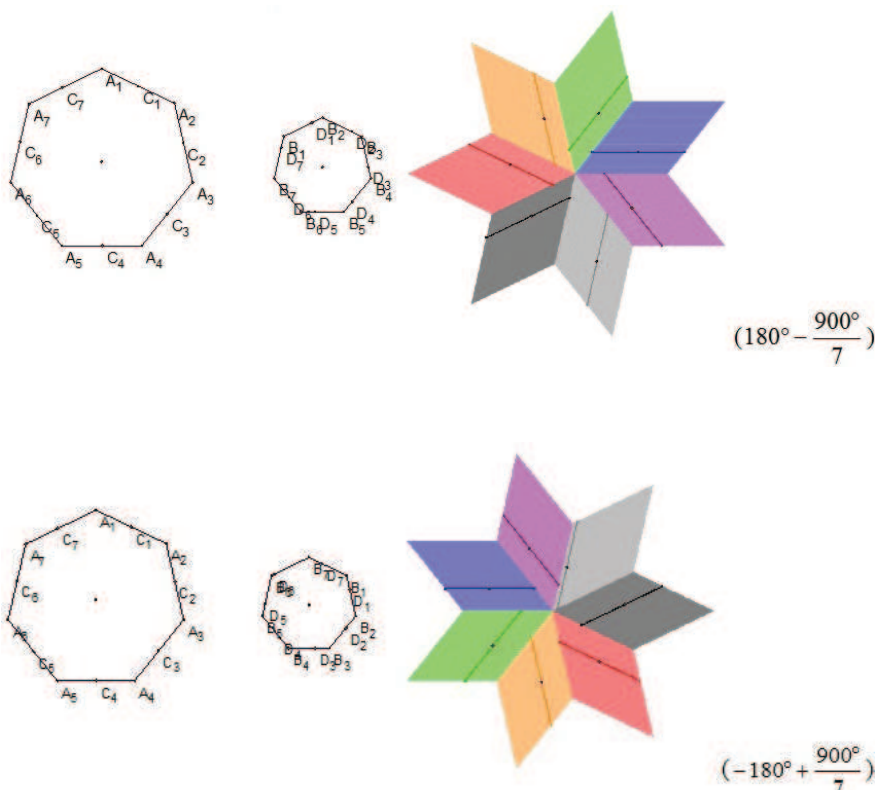


$$\left(\frac{900^\circ}{7} \right)$$



$$\left(-\frac{900^\circ}{7} \right)$$

例 12: 當母圖 P 與 Q 分別為正七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ (母圖 P 與 Q 的邊長比值為 $\frac{15}{8}$), 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left[180^\circ - \frac{900^\circ}{7}\right]$ 時, $G_0(15, -8)$ 如下圖所示.



二、 $r > \left| \frac{s}{t} \right|$

I、將 $\left| \frac{|t\overline{A_{j+1}A_j} - s\overline{B_{j+1}B_{j+2}}|}{s+t} \right|$ 除以 $|t|$ 並不影響正負, 且 $s+t > 0$, 所以可用 $\overline{A_{j+1}A_j} - \left| \frac{s}{t} \right| \overline{B_{j+1}B_{j+2}}$ 判別其正負, 且

$$\overline{A_{j+1}A_j} = r\overline{B_{j+1}B_{j+2}},$$

$$\overline{A_{j+1}A_j} - \left| \frac{s}{t} \right| \overline{B_{j+1}B_{j+2}} = \left(r - \left| \frac{s}{t} \right| \right) \overline{B_{j+1}B_{j+2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow |t\overline{A_{j+1}A_j}| > |s\overline{B_{j+1}B_{j+2}}|,$$

得知此時中空的正 n 邊形與母圖 P 相似且平移了一個向量.

II、將 $\left| \frac{|t\overline{A_{j+1}A_{j+2}} - s\overline{B_{j+1}B_j}|}{s+t} \right|$ 除以 $|t|$ 並不影響正負, 且 $s+t > 0$, 所以可用 $\overline{A_{j+1}A_{j+2}} - \left| \frac{s}{t} \right| \overline{B_{j+1}B_j}$ 判別其正負, 且

$$\overline{A_{j+1}A_{j+2}} = r\overline{B_{j+1}B_j},$$

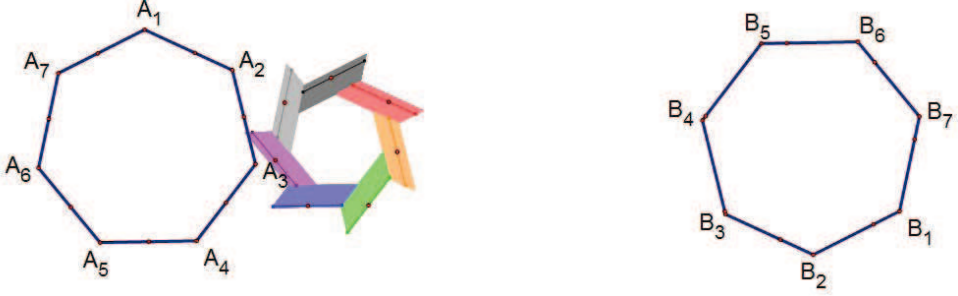
$$\overline{A_{j+1}A_{j+2}} - \left| \frac{s}{t} \right| \overline{B_{j+1}B_j} = \left(r - \left| \frac{s}{t} \right| \right) \overline{B_{j+1}B_j} > 0$$

$$\Leftrightarrow |t\overline{A_{j+1}A_{j+2}}| > |s\overline{B_{j+1}B_j}|,$$

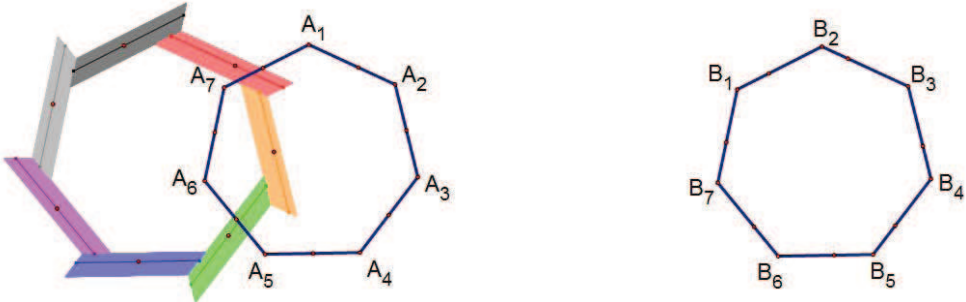
得知此時中空的正 n 邊形與母圖 P 相似且平移了一個向量.

總和 I、II 得 $r > \left| \frac{s}{t} \right|$ 時, 中空的正 n 邊形與母圖 P 相似且平移了一個向量.

例 13: 當母圖 P 與 Q 分別為正七邊形 $A_1A_2 \dots A_7$, $B_1B_2 \dots B_7$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\frac{900^\circ}{7}$ 時, $G_0(2, 5)$ 如下圖所示.



例 14: 當母圖 P 與 Q 分別為正七邊形 $A_1A_2 \dots A_7$, $B_1B_2 \dots B_7$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $180^\circ - \frac{900^\circ}{7}$ 時, $G_0(-3, 13)$ 如下圖所示.



三、 $r < \left| \frac{s}{t} \right|$
同上之推導得

I、

$$\overline{A_{j+1}A_j} - \left| \frac{s}{t} \right| \overline{B_{j+1}B_{j+2}} = \left(r - \left| \frac{s}{t} \right| \right) \overline{B_{j+1}B_{j+2}} < 0$$

$$\Leftrightarrow |t| \overline{A_{j+1}A_j} < |s| \overline{B_{j+1}B_{j+2}},$$

得知此時中空的正 n 邊形與母圖 Q 相似且平移了一個向量.

II、

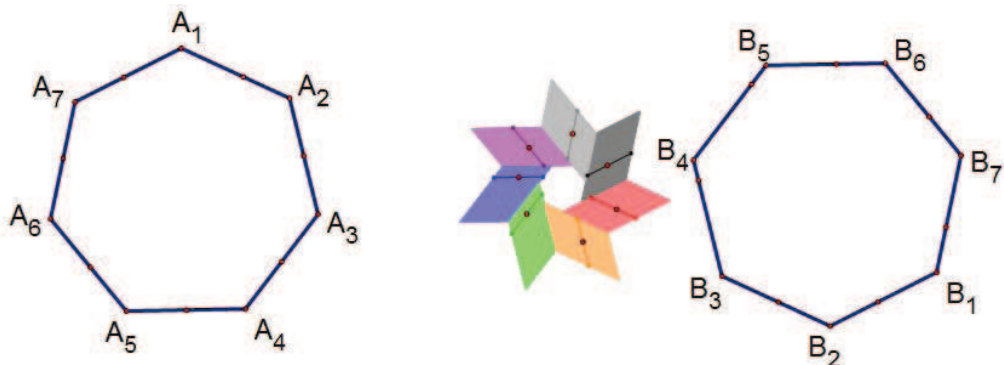
$$\overline{A_{j+1}A_{j+2}} - \left| \frac{s}{t} \right| \overline{B_{j+1}B_j} = \left(r - \left| \frac{s}{t} \right| \right) \overline{B_{j+1}B_j} < 0$$

$$\Leftrightarrow |t| \overline{A_{j+1}A_{j+2}} < |s| \overline{B_{j+1}B_j},$$

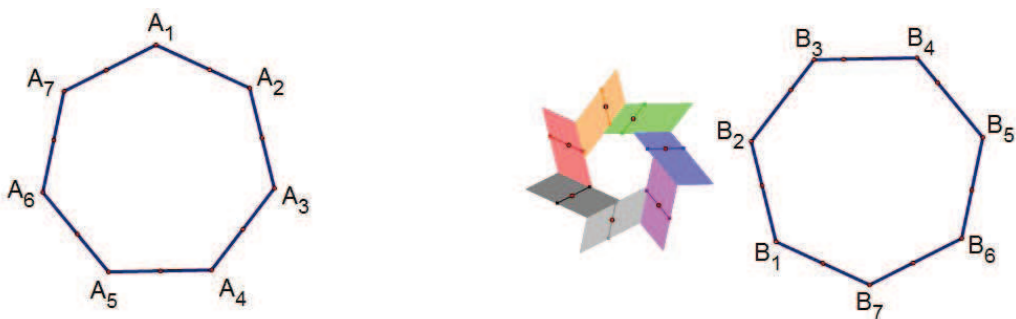
得知此時中空的正 n 邊形與母圖 Q 相似且平移了一個向量.

總和 I、II 得 $r < \left| \frac{s}{t} \right|$ 時, 中空的正 n 邊形與母圖 Q 相似且平移了一個向量.

例 15: 當母圖 P 與 Q 分別為正七邊形 $A_1A_2 \dots A_7$ 、 $B_1B_2 \dots B_7$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\frac{900^\circ}{7}$ 時, $G_0(10, 7)$ 如下圖所示。



例 16: 當母圖 P 與 Q 分別為正七邊形 $A_1A_2 \dots A_7$ 、 $B_1B_2 \dots B_7$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\frac{900^\circ}{7}$ 時, $G_0(13, 7)$ 如下圖所示。



□

接著我們將正多邊形母圖放寬為平行多邊形與凸多邊形。

定理 7. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "平行" n 邊形 (其中 n 為偶數), 滿足「 $st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm 180^\circ \mp \frac{360^\circ(1 \mp i)}{n}$ 」或「 $st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \frac{360^\circ(i \mp 1)}{n}$ 」, 其中 $\theta + \frac{180^\circ(n-2)}{n}i \neq 0^\circ, 180^\circ$. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖 $G_i(s, t)$ 為拼貼圖形 (含鑲嵌圖形)。

證明. I、使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{j(j+1+i)}}$ 、 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{(j+1)(j+2+i)}}$ 同向:
因為

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{j(j+1+i)}} &= \frac{|t|}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1}A_j}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{(j+1)(j+2+i)}} &= \frac{|s|}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1+i}B_{j+2+i}}, \end{aligned}$$

因此對於某一階而言, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 會有 n 條長度為

$$\left| \frac{|t| \overrightarrow{A_{j+1}A_j} - |s| \overrightarrow{B_{j+1+i}B_{j+2+i}}}{s+t} \right|$$

的邊長圍成一個中空的多邊形.

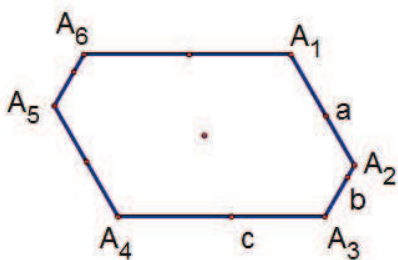
II、使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{(j+1)(j+i)}}$ 、 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{(j+2)(j+1+i)}}$ 同向:
因為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{(j+1)(j+i)}} &= \frac{|s|}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1+i}B_{j+i}}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{(j+2)(j+1+i)}} &= \frac{|t|}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}},\end{aligned}$$

因此對於某一階而言, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 會有 n 條長度為

$$\left| \frac{|t|\overrightarrow{A_{j+1}A_j} - |s|\overrightarrow{B_{j+1+i}B_{j+i}}}{s+t} \right|$$

的邊長圍成一個中空的多邊形.
不失一般性, 以平行六邊形為例:



設母圖 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的三種邊長為 a, b, c , 則母圖 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 的三種邊長為 $\left|\frac{t}{s}\right|a, \left|\frac{t}{s}\right|b, \left|\frac{t}{s}\right|c$,
當 $i = 0$ 時:

I:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{22}E_{12}} &= \frac{|t|}{s+t} \overrightarrow{A_2A_1} = \frac{|t|}{s+t}a, \\ \overrightarrow{E_{22}E_{23}} &= \frac{|s|}{s+t} \overrightarrow{B_2B_3} = \frac{|t|}{s+t}b,\end{aligned}$$

因為 $\frac{|t|}{s+t}a \neq \frac{|t|}{s+t}b$, 所以不可能為鑲嵌圖形, 但為拼貼圖形, 如下圖所示.



II:

$$\overline{E_{22}E_{21}} = \frac{|s|}{s+t} \overline{B_2B_1} = \frac{|t|}{s+t} a,$$

$$\overline{E_{22}E_{32}} = \frac{|t|}{s+t} \overline{A_2A_3} = \frac{|t|}{s+t} b,$$

因為 $\frac{|t|}{s+t} a \neq \frac{|t|}{s+t} b$, 所以不可能為鑲嵌圖形, 但為拼貼圖形, 如下圖所示.



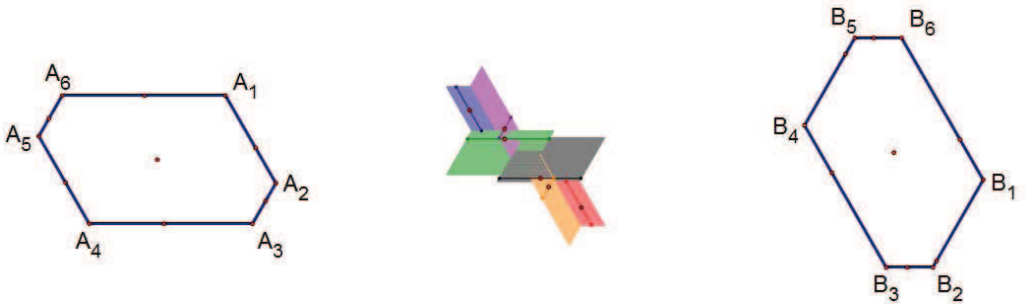
當 $i = 1$ 時:

I:

$$\overline{E_{23}E_{13}} = \frac{|t|}{s+t} \overline{A_2A_1} = \frac{|t|}{s+t} a,$$

$$\overline{E_{23}E_{24}} = \frac{|s|}{s+t} \overline{B_3B_4} = \frac{|t|}{s+t} c,$$

因為 $\frac{|t|}{s+t} a \neq \frac{|t|}{s+t} c$, 所以不可能為鑲嵌圖形, 但為拼貼圖形, 如下圖所示.

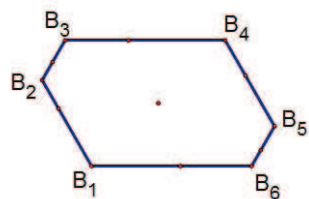
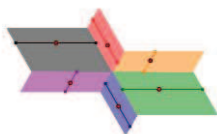
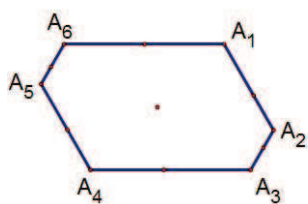


II:

$$\overline{E_{23}E_{22}} = \frac{|s|}{s+t} \overline{B_3B_2} = \frac{|t|}{s+t} b,$$

$$\overline{E_{23}E_{33}} = \frac{|t|}{s+t} \overline{A_2A_3} = \frac{|t|}{s+t} b,$$

因為 $\frac{|t|}{s+t} b = \frac{|t|}{s+t} b$, 所以為鑲嵌圖形, 如下圖所示.



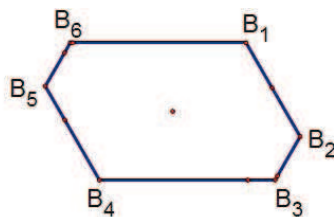
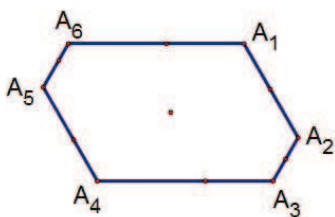
當 $i = 2$ 時:

I:

$$\overline{E_{24}E_{14}} = \frac{|t|}{s+t} \overline{A_2A_1} = \frac{|t|}{s+t} a,$$

$$\overline{E_{24}E_{25}} = \frac{|s|}{s+t} \overline{B_4B_5} = \frac{|t|}{s+t} a,$$

因為 $\frac{|t|}{s+t} a = \frac{|t|}{s+t} a$, 所以為鑲嵌圖形, 如下圖所示.

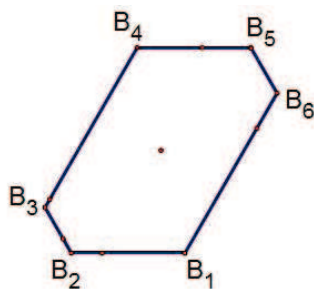
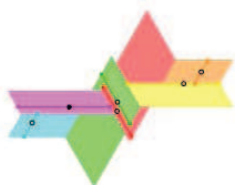
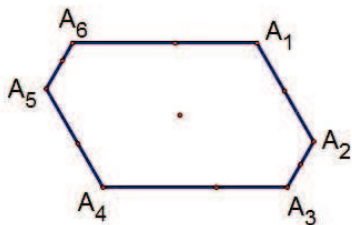


II:

$$\overline{E_{24}E_{23}} = \frac{|s|}{s+t} \overline{B_4B_3} = \frac{|t|}{s+t} c,$$

$$\overline{E_{24}E_{34}} = \frac{|t|}{s+t} \overline{A_2A_3} = \frac{|t|}{s+t} b,$$

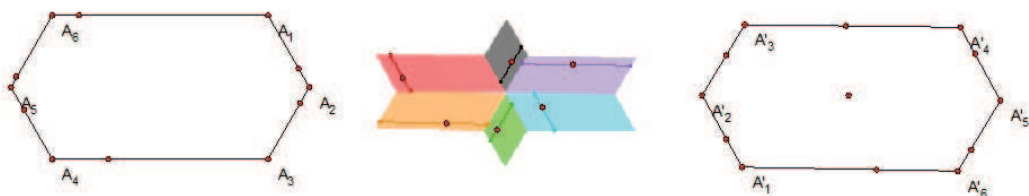
因為 $\frac{|t|}{s+t} c = \frac{|t|}{s+t} b$, 所以不可能為鑲嵌圖形, 但為拼貼圖形, 如下圖所示.



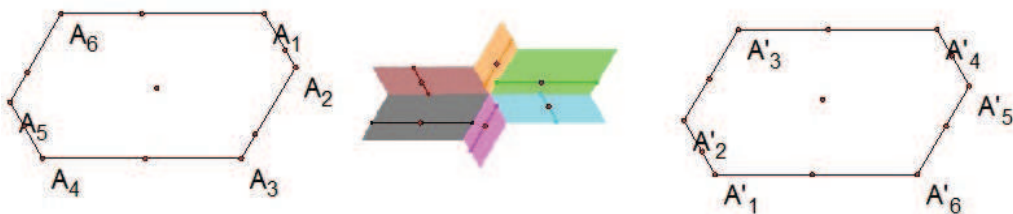
又因為為平行六邊形, 所以 $i = 4, 5, 6$ (即 0) 分別與 $i = 1, 2, 3$ 的子圖有一樣的鑲嵌性質. 注意當 $i = 0, \frac{n}{2}$ 時, 不可能為鑲嵌圖形, 但為拼貼圖形. $\square$

例 17: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的平行六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5A'_6$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\left(180 - \frac{360(i+1)}{n}\right)^\circ$.

而 $i = 1, 2$ 時, $G_i(1, 1)$ 分別如下圖所示. (因為 $\overline{A_1A_6} \neq \overline{A_1A_2}$, 所以 $|E_{11}E_{61}| \neq |E_{11}E_{21}|$)



(共有兩種邊長的 1 階子圖)



(共有三種邊長的 2 階子圖)

至於 $r \neq \left\lfloor \frac{s}{t} \right\rfloor$ 的情形則無明顯規律性. 因此以下研究皆以 $r = \left\lfloor \frac{s}{t} \right\rfloor$ 論.

若將圖形 P 、 Q 放寬為全等的凸 n 邊形 (圖形 Q 為將圖形 P 平移後旋轉其最大內角 θ), 當 θ 變動時, 我們發現子圖 $G_0(1, 1)$ 為拼貼圖形的臨界角度為 $\pm\theta$ (注意此時的階數 $i = 0$).

定理 8. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為凸 n 邊形 (其最大內角為 θ), 滿足母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm\theta$. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left\lfloor \frac{s}{t} \right\rfloor$, 則其子圖 $G_0(s, t)$ 為拼貼圖形.

證明. 不失一般性下, 證明 $G_0(1, 1)$ 為拼貼圖形.

令 $G_{0j}(1, 1)$ 為平行四邊形 $E_{jj}E_{(j+1)j}E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}$, 且 $G_{0(j+1)}(1, 1)$ 為平行四邊形 $E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}E_{(j+2)(j+2)}E_{(j+1)(j+2)}$, 則

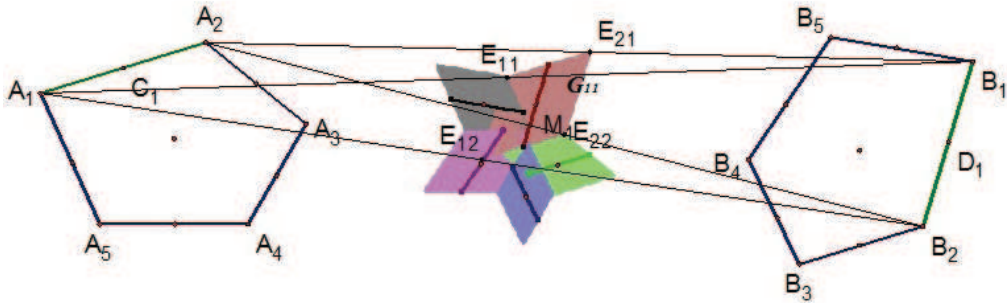
$$\begin{aligned} \overline{E_{jj}E_{(j+1)j}} & // \overline{A_jA_{j+1}}, \\ \overline{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)(j+2)}} & // \overline{A_{j+1}A_{j+2}}, \end{aligned}$$

又 $G_{0j}(1, 1)$ 與 $G_{0(j+1)}(1, 1)$ 交於點 $E_{(j+1)(j+1)}$, 所以當

$\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}}$ 同向時, $G_{0j}(1, 1)$ 與 $G_{0(j+1)}(1, 1)$ 為拼貼圖形.

而若要使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}}, \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+2)}}$ 同向, 必須將其中一個母圖旋轉 $\angle A_j A_{j+1} A_{j+2}$. 但現在每個內角不全部相等, 因此不可能同時達到鑲嵌, 所以不會有鑲嵌子圖產生. 如果只求子圖為拼貼圖形, 即要使最難達成的那組邊(夾角最大的兩邊)恰好重合, 就必須將其中一個母圖旋轉此 n 邊形之最大內角. $\square$

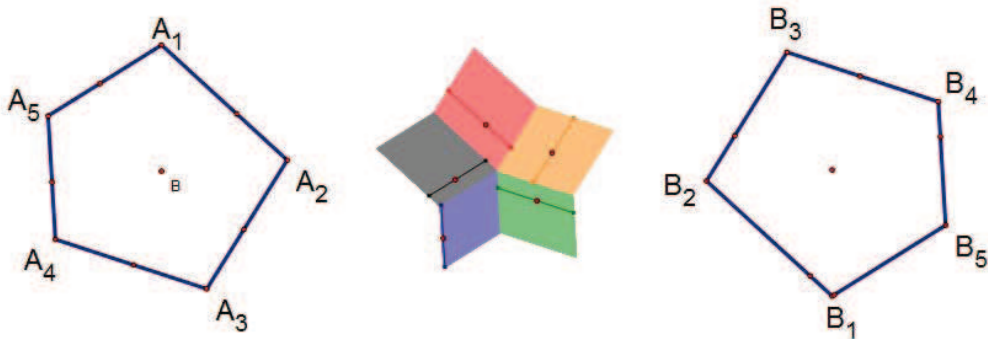
例 18: 當母圖 P 與 Q 分別為五邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 、 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後順時針旋轉其最大內角時, $G_0(1, 1)$ 如下圖所示.



當階數 $i = 1$ 時, 同定理 8 可得:

定理 9. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為凸 n 邊形, 滿足「 $st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 θ 」或「 $st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $180^\circ - \theta$ 」, 其中「 $\theta = \min \{-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_n\}$ (而 θ_j 為 $\overrightarrow{A_{j+1}A_j}$ 與 $\overrightarrow{B_{j+2}B_{j+3}}$ 的夾角)」或「 $\theta = 180^\circ$ (此時 $\overrightarrow{A_j A_{j+1}}$ 與 $\overrightarrow{B_{j+1}B_j}$ 的夾角為定值 180°)」. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖 $G_i(s, t)$ 為拼貼圖形.

例 19: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的凸五邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 、 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 180° 時, $G_1(11)$ 如下圖所示.



由定理 8 與定理 9 可知對於任意凸多邊形, 不同的階數就有不同的發生鑲嵌圖形的臨界角度, 而我們並未將其一般化至任意的階數 i .

上述的研究是在找發生鑲嵌圖形的臨界角度, 那如果我們將所有角度連續變換所生成的各子圖聯集起來, 可以看到什麼現象? 答案是會形成一種類似於甜甜圈的圖形(當邊長比例特定時會是圓形). 這似乎是一個無趣的現象, 但由定理 5 可知階數可視為旋轉特定角度, 因此接下來我們探討所有階數的子圖聯集之意義: 兩動點在兩母圖的所有邊上跑動時, M 點所形成的軌跡. 但可知 M 點必會重複出現, 因此我們問一個問題, 最少要幾階的子

圖可以鋪滿此所有階數子圖聯集所生成的區域? 答案其實就是下列定理中將介紹的層數 $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

定理 10. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為"正" n 邊形, 滿足「 $st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left(\frac{180^\circ(n-2)}{n} \right)$ 」或「 $st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} \right]$ 」。當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil - 1\right)}(s, t)$$

為鑲嵌圖形; 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值不為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil - 1\right)}(s, t)$$

為準鑲嵌圖形, 其中 $G_i(s, t) = G_l(s, t)$, for $i \equiv l \pmod{n}$. (共 $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 圈)

證明. 由定理 6, 第一圈子圖 $G_0(s, t)$ 為準鑲嵌圖形, 為了使各圈子圖鑲嵌, 第二圈子圖必恰好填滿第一圈子圖所形成的「空缺」, 第三圈填滿第二圈的「空缺」, $\cdots$, 直到無法滿足此條件. 我們分四種情況討論:

I、 $st > 0$, 母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left(\frac{180^\circ(n-2)}{n} \right)$:

若第一圈子圖中 $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 的

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}}, \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)(j+2)}} \text{ 同向} \\ & \text{且 } \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)j}}, \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+2)(j+1)}} \text{ 的夾角 } < 180^\circ, \end{aligned}$$

則要畫出第二圈子圖與第一圈子圖鑲嵌即要使旋轉後的第二圈某部分子圖邊長之兩向量與此兩向量同向, 因為是旋轉母圖 Q , 所以部分子圖邊長之兩向量中只會有一向量是變動的, 又因為 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+2)(j+1)}}$ 與 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+2)(j+1)}}$ 必同向, 所以要使 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{j(j+1)}}$ 和 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)j}}$ 同向.

令第 $y+1$ 圈不合, 則此子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+(y-1)}(s, t)$$

為準鑲嵌圖形, 平行四邊形 $E_{jj} E_{(j+1)j} E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}$,

$E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+2)(j+1)} E_{(j+2)(j+2)} E_{(j+1)(j+2)}$ 所形成的「空缺」是由有共同起點 $E_{(j+1)(j+1)}$ 的兩向量 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)j}}$, $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+2)(j+1)}}$ 所張出的平行四邊形. 又因為

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+2)(j+1)}} &= \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1} A_{j+2}}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)j}} &= \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1} B_j} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{(j+2)-1} B_{(j+1)-1}}, \end{aligned}$$

所以此平行四邊形等於向量 $\frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{(j+2)-1} B_{(j+1)-1}}$ 與 $\frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_{(j+1)} A_{(j+2)}}$ 所形成之部份子圖 $G_{(n-1)(j+1)}(s, t)$, 則新的空缺是由 $G_{(n-1)j}(s, t)$, $G_{(n-1)(j+1)}(s, t)$ 兩向量 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+1)j}}$, $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+2)(j+1)}}$ 所張出的平行四邊形. 以此類推的操作,

直到第 $y + 1$ 圈的相鄰兩子圖 $G_{(n-y+1)j}(s, t)$, $G_{(n-y+1)(j+1)}(s, t)$ 的夾角 $\geq 180^\circ$, 所以構成第二圈的向量夾角為 $2 \times \frac{360^\circ}{n}$, 且每增加一圈就會增加一個 $\frac{360^\circ}{n}$, 因此若第 $y + 1$ 圈不合, 則

$$\left((y + 1) \times \frac{360^\circ}{n} \right) \geq 180^\circ \text{ 且 } \left(y \times \frac{360^\circ}{n} \right) < 180^\circ,$$

可得不等式 $\frac{n}{2} \geq y \geq \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$. 所以 $y = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 即最多有 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 圈使子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}(s, t) \text{ 為準鑲嵌圖形.}$$

II、 $st < 0$, 母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}\right]$:

由 I, 新的空缺是由 $G_{(n-1)j}(s, t)$, $G_{(n-1)(j+1)}(s, t)$ 兩向量 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+1)j}}$, $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+2)(j+1)}}$ 所張出的平行四邊形. 所以構成第二圈的向量夾角為 $2 \times \frac{360^\circ}{n}$, 且每增加一圈就會增加一個 $\frac{360^\circ}{n}$, 所以 $y = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 即最多有 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 圈使子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}(s, t)$$

為準鑲嵌圖形.

III、 $st > 0$, 母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$:

若 $G_{0j}(s, t)$ 與 $G_{0(j+1)}(s, t)$ 的 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)(j+2)}}$ 同向且 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)(j+2)}}$ 的夾角 $< 180^\circ$, 則要畫出第二圈子圖與第一圈子圖鑲嵌即要使旋轉後的第二圈某部分子圖邊長之兩向量與此兩向量同向, 因為是旋轉母圖 Q , 所以部分子圖邊長之兩向量中只會有一向量是可變動的, 又因為 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{j(j+1)}}$ 與 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}}$ 必同向, 所以要使 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+1)j}}$ 和 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)(j+2)}}$ 同向. 令第 $y + 1$ 圈不合, 則此子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n-1}(s, t) \cup G_{n-2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n-(y-1)}(s, t)$$

為準鑲嵌圖形, 平行四邊形 $E_{jj} E_{(j+1)j} E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}$, $E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+2)(j+1)} E_{(j+2)(j+2)} E_{(j+1)(j+2)}$ 所形成的「空缺」是由有共同起點 $E_{(j+1)(j+1)}$ 的兩向量 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)(j+2)}}$ 所張出的平行四邊形. 又因為

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{j(j+1)}} &= \frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1} A_j}, \\ \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)} E_{(j+1)(j+2)}} &= \frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1} B_{j+2}} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{B_{(j+1)+1} B_{(j+1)+1}}, \end{aligned}$$

所以此平行四邊形等於向量 $\frac{s}{s+t} \overrightarrow{B_{j+1} B_{j+2}}$ 與 $\frac{t}{s+t} \overrightarrow{A_{j+1} A_j}$ 所形成之部份子圖 $G_{(n+1)j}(s, t)$, 則新的空缺是由 $G_{(n+1)j}(s, t)$, $G_{(n+1)(j+1)}(s, t)$ 兩向量 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)} E'_{(j+1)(j+2)}}$ 所張出的平行四邊形. 以此類推的操作, 直到第 $y + 1$ 圈的相

鄰兩子圖 $G_{(n+y-1)j}(s, t)$, $G_{(n+y-1)(j+1)}(s, t)$ 的夾角 $\geq 180^\circ$, 所以構成第二圈的向量夾角為 $2 \times \frac{360^\circ}{n}$, 且每增加一圈就會增加一個 $\frac{360^\circ}{n}$, 因此若第 $y+1$ 圈不合, 則

$$\left((y+1) \times \frac{360^\circ}{n} \right) \geq 180^\circ \text{ 且 } \left(y \times \frac{360^\circ}{n} \right) < 180^\circ,$$

可得不等式 $\frac{n}{2} \geq y \geq \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$. 所以 $y = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 即最多有 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 圈使子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n-1}(s, t) \cup G_{n-2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n-(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}(s, t)$$

為準鑲嵌圖形.

IV、 $st < 0$, 母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}$:

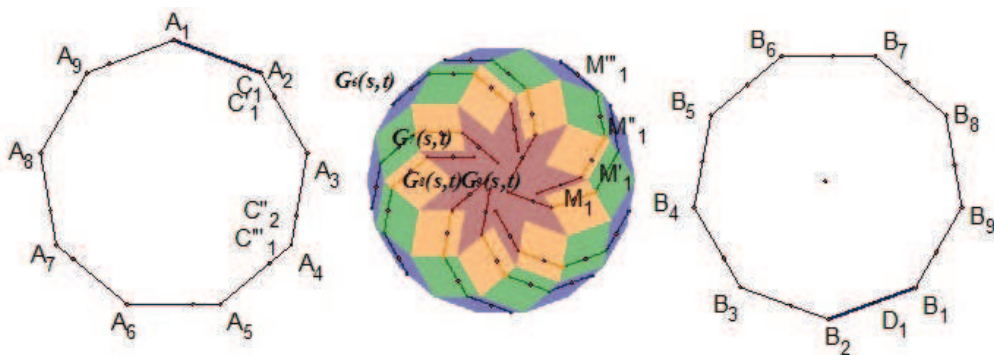
由 III, 新的空缺是由 $G_{(n+1)j}(s, t)$, $G_{(n+1)(j+1)}(s, t)$ 兩向量 $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)}E'_{j(j+1)}}$, $\overrightarrow{E'_{(j+1)(j+1)}E'_{(j+1)(j+2)}}$ 所張出的平行四邊形. 所以構成第二圈的向量夾角為 $2 \times \frac{360^\circ}{n}$, 且每增加一圈就會增加一個 $\frac{360^\circ}{n}$, 所以 $y = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 即最多有 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 圈使子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n-1}(s, t) \cup G_{n-2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n-(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}(s, t)$$

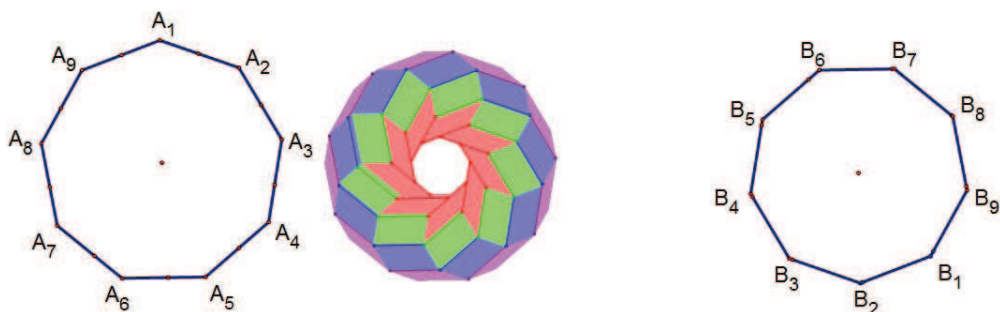
為準鑲嵌圖形.

□

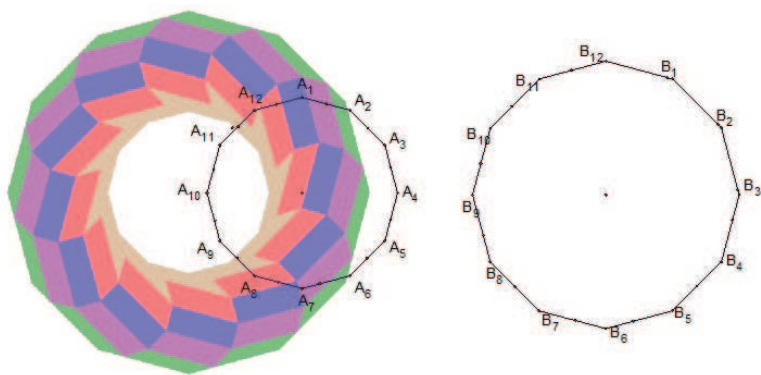
例 20: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正九邊形 $A_1A_2 \cdots A_9$ 、 $B_1B_2 \cdots B_9$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left(\frac{180^\circ(n-2)}{n}\right) = -140^\circ$, 而 $s:t = 1:1$ 時, 此時 $G_9(1,1) \cup G_8(1,1) \cup G_7(1,1) \cup G_6(1,1)$ 為鑲嵌圖形, 如下圖所示.(共 $\left\lfloor \frac{9-1}{2} \right\rfloor = 4$ 圈)



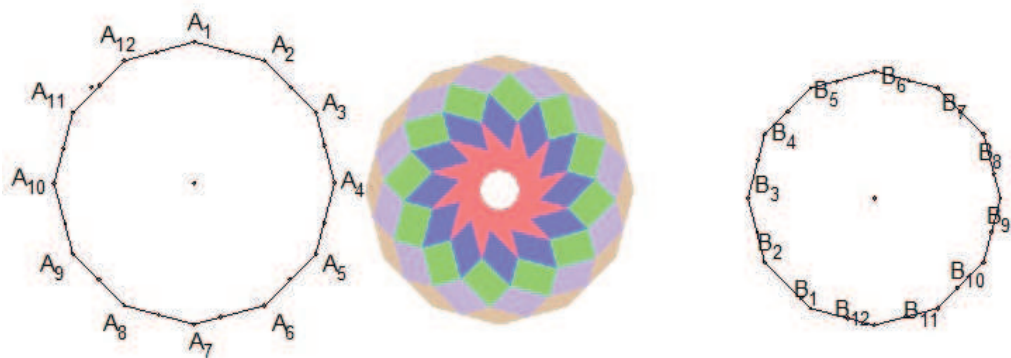
例 21: 當母圖 P 與 Q 分別為正九邊形 $A_1A_2 \cdots A_9$ 、 $B_1B_2 \cdots B_9$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left(\frac{180^\circ(n-2)}{n}\right) = -140^\circ$ 時, $G_9(2,3) \cup G_8(2,3) \cup G_7(2,3) \cup G_6(2,3)$ 如下圖所示. (共 $\left\lfloor \frac{9-1}{2} \right\rfloor = 4$ 圈)



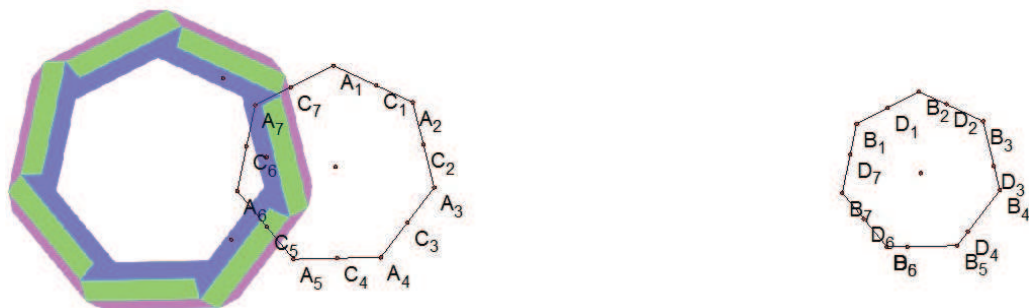
例 22: 當母圖 P 與 Q 分別為正十二邊形 $A_1A_2\cdots A_{12}$ 、 $B_1B_2\cdots B_{12}$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}\right] = -30^\circ$ 時, $G_0(-3, 11) \cup G_1(-3, 11) \cup \cdots \cup G_4(-3, 11)$ 如下圖所示. (共 $\left[\frac{12-1}{2}\right] = 5$ 圈)



例 23: 當母圖 P 與 Q 分別為正十二邊形 $A_1A_2\cdots A_{12}$ 、 $B_1B_2\cdots B_{12}$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\left(\frac{180^\circ(n-2)}{n}\right) = 150^\circ$ 時, $G_0(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cup G_1(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cup \cdots \cup G_4(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 如下圖所示. (共 $\left[\frac{12-1}{2}\right] = 5$ 圈)



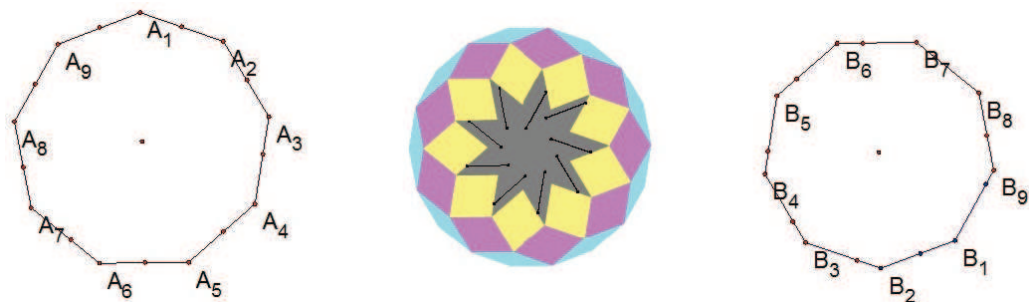
例 24: 當母圖 P 與 Q 分別為正七邊形 $A_1A_2\cdots A_7$ 、 $B_1B_2\cdots B_7$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}\right] = 180^\circ - \frac{900^\circ}{7}$ 時, $G_7(-3, 13) \cup G_6(-3, 13) \cup G_5(-3, 13)$ 如下圖所示. (共 $\left[\frac{7-1}{2}\right] = 3$ 圈)



由定理 6 可知, 若母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left|\frac{s}{t}\right|$, 則其子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n \mp 1}(s, t) \cup G_{n \mp 2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n \mp ([\frac{n-1}{2} - 1])}(s, t) \text{ 為鑲嵌圖形.}$$

例 25: 當母圖 P 與 Q 分別為正九邊形 $A_1A_2\cdots A_9$ 、 $B_1B_2\cdots B_9$ (母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\frac{2}{3}$), 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left(\frac{180^\circ(n-2)}{n}\right) = -140^\circ$ 時, $G_9(2, 3) \cup G_8(2, 3) \cup G_7(2, 3) \cup G_6(2, 3)$ 如下圖所示. (共 $\left[\frac{9-1}{2}\right] = 4$ 圈)



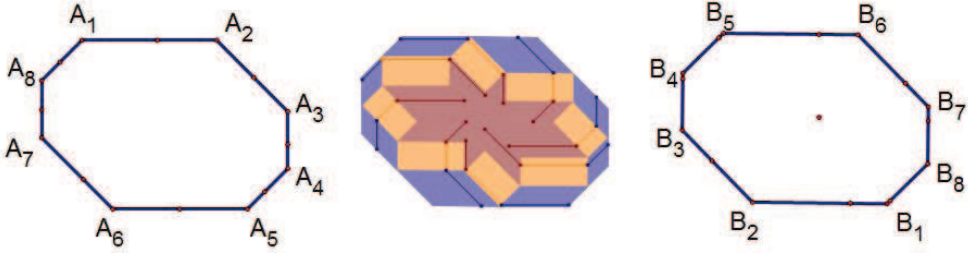
同定理 10 之證明可得:

定理 11. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為“平行” n 邊形(其中 n 為偶數), 滿足「 $st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm 180^\circ \mp \frac{360^\circ(1 \mp i)}{n}$ 」或「 $st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm \frac{360^\circ(i \mp 1)}{n}$ 」, 其中 $\theta + \frac{180^\circ(n-2)}{n}i \neq 0^\circ, 180^\circ$, 則

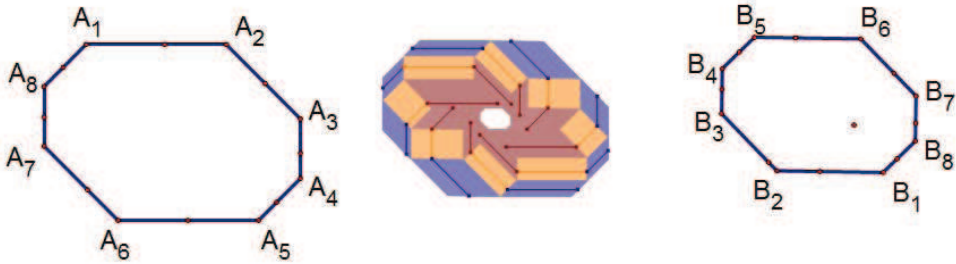
$$G_i(s, t), G_{i \pm 1}(s, t), G_{i \pm 2}(s, t), \dots, G_{i \pm ([\frac{n-1}{2} - 1])}(s, t)$$

依序互相鑲嵌, 其中 $G_i(s, t) = G_l(s, t)$, $i \equiv l \pmod{n}$. (共 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 圈)

例 26: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的平行八邊形 $A_1A_2\cdots A_8$ 、 $B_1B_2\cdots B_8$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\left(180 - \frac{360(1-1)}{8}\right)^\circ$ 時, $G_1(1,1) \cup G_2(1,1) \cup G_3(1,1)$ 為鑲嵌圖形, 如下圖所示.



但母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $-\left(180 - \frac{360(1+1)}{8}\right)^\circ$ 時, $G_1(1,1)$ 為準鑲嵌圖形而 $G_1(1,1), G_2(1,1), G_3(1,1)$ 依序互相鑲嵌, 如下圖所示. (共 $\left\lceil \frac{8-1}{2} \right\rceil = 3$ 圈)



二、多母圖取分點所生成子圖軌跡之鑲嵌性質

接下來我們試著把母圖數推廣到任意 N 個母圖. 由定理 5 可知階數 i 只是旋轉特定角度, 因此就 $N \geq 3$ 而言, 先討論全等母圖與 0 階的情形.

定義 5. 給定 N 個全等圖形 $P_1, P_2, \dots, P_N$, 其頂點分別為 $A_1^1, A_2^1, A_3^1, \dots, A_n^1, A_1^2, A_2^2, A_3^2, \dots, A_n^2, \dots, A_1^N, A_2^N, A_3^N, \dots, A_n^N$, 且分別在 $\overline{A_1^k A_2^k}, \overline{A_2^k A_3^k}, \dots, \overline{A_n^k A_1^k}$ 上取動點 $C_{12}^k, C_{23}^k, C_{34}^k, \dots, C_{n1}^k$, $k = 1, 2, \dots, N$. 給定實數 $s_1, s_2, \dots, s_N$, 使得

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_N = 1,$$

然後考慮凸多邊形 $C_{j(j+1)}^1 C_{j(j+1)}^2 C_{j(j+1)}^3, \dots, C_{j(j+1)}^N$ (其中 $C_{n(n+1)}^k = C_{n1}^k, k = 1, 2, \dots, N$), 取點 M_j 使得

$$\overrightarrow{OM_j} = \sum_{k=1}^N s_k \overrightarrow{OC_{j(j+1)}^k}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

令 $G_j(s_1, s_2, s_3, \dots, s_N) = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^N s_k \overrightarrow{OC_{j(j+1)}^k} \text{ for some } C_{j(j+1)}^k \in \overline{A_j^k A_{j+1}^k} \forall k \right\}$,

for all $j = 1, 2, \dots, n$. 且

$$\begin{aligned} & G(s_1, s_2, s_3, \dots, s_N) \\ &= G_1(s_1, s_2, s_3, \dots, s_N) \cup G_2(s_1, s_2, s_3, \dots, s_N) \cup \cdots \cup G_n(s_1, s_2, s_3, \dots, s_N). \end{aligned}$$

對於 N 個正 n 邊形母圖, 我們觀察到一有趣的現象, 先概述如下:

平行四邊形檢查法 $\left\{ \begin{array}{l} 1. N \text{ 為奇數: } \text{因為相鄰母圖兩兩不可能全部同時} \\ \text{產生鑲嵌的子圖, 所以最多只能形成} \\ \text{準鑲嵌圖形.} \\ 2. N \text{ 為偶數: } \text{因為相鄰母圖兩兩有可能全部同時} \\ \text{產生鑲嵌的子圖, 所以有可能形成} \\ \text{鑲嵌圖形.} \end{array} \right.$

定理 12. 給定 N 個(其中 N 為奇數)全等圖形 P_1, P_2, P_N , 若有旋轉角使得兩母圖 P_k, P_{k+1} 所生成之子圖為鑲嵌圖形, 則此 N 個全等圖形 P_1, P_2, P_N 所生成的子圖 $G(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ 為準鑲嵌圖形(因為中空了一個正 n 邊形).

證明. 不失一般性下, 以 $N = 3$ 為例, 考慮 3 個全等圖形 P_1, P_2, P_3 .

因為一凸多邊形的重心會等於此凸多邊形各邊之中點連線所生成的新圖形之重心, 如下圖 1 $\triangle DEF$ 與 $\triangle GHI$ 之重心重合. 因此在圖形 P_1, P_2, P_3 之各子圖上取一動點(如 G, H, I), 再求得 $\triangle GHI$ 之重心軌跡即為子圖 $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 且其邊與圖形 P_1, P_2, P_3 之某部分子圖的某個邊平行, 當圖形 P_1, P_2, P_3 的子圖有一個為鑲嵌圖形時, 則 $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 為準鑲嵌圖形, 如下圖 2 所示:

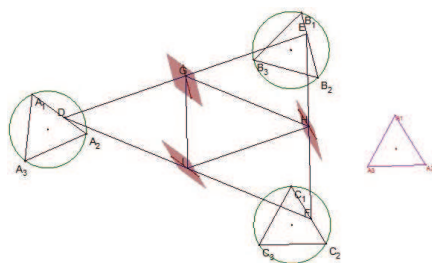


圖 1

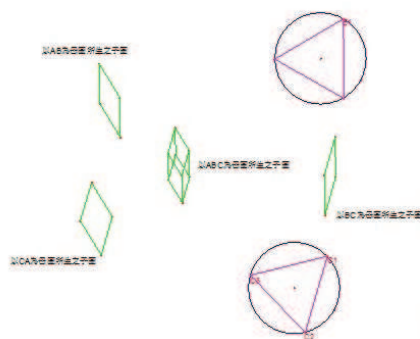


圖 2

將圖 2 之其他兩個部份子圖畫出, 如下圖 3、4:

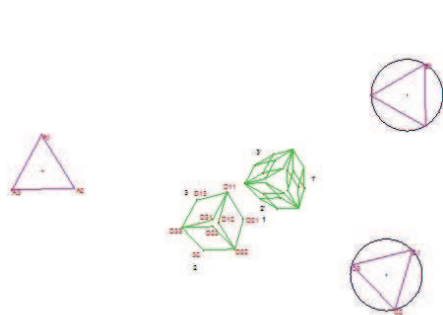


圖 3

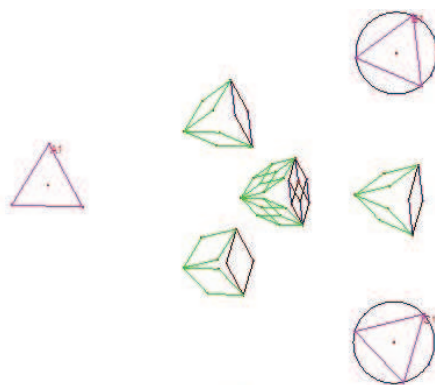


圖 4

又由定理 6 得知此時某兩相鄰母圖有一特定角

$$-\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^{\circ} = -\left(\frac{180(3-2)}{3}\right)^{\circ} = -60^{\circ}$$

的旋轉關係時, 如下圖 5、6 所示:

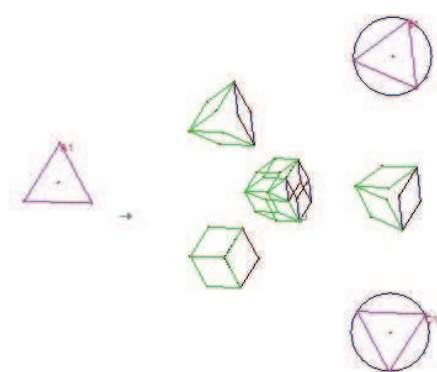


圖 5

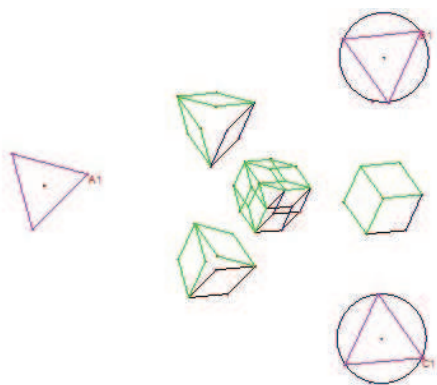


圖 6

而母圖間所旋轉的角度有規律性說明如下: (如不以此規律進行, 必有矛盾處.)

$$\begin{array}{l} P_1 \xrightarrow{-\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ} P_2 \xrightarrow{\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ} P_3 \xrightarrow{-\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ} P_4 \xrightarrow{+\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ} P_5 \xrightarrow{-\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ} \\ P_6 \xrightarrow{+\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ} P_7 \dots \end{array}$$

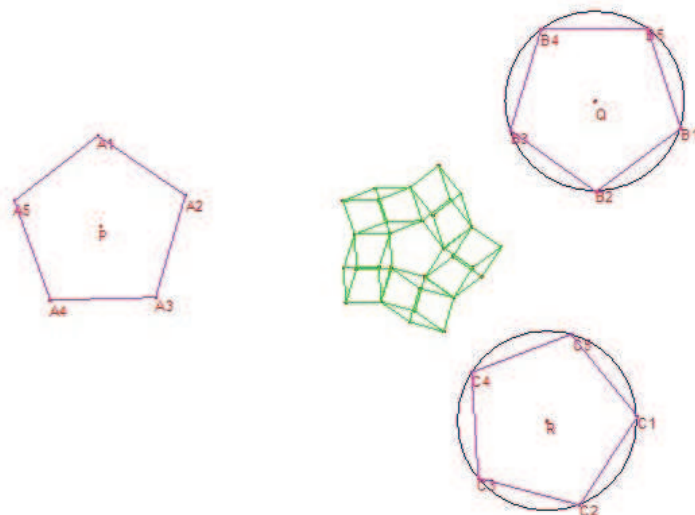
例如上面例子, 若

$$P_1 \xrightarrow{-60^\circ} P_2, P_2 \xrightarrow{-60^\circ} P_3,$$

則此時 $P_1 \xrightarrow{-120^\circ} P_3$, 所以 P_1, P_3 所生成之子圖重疊, 和條件矛盾. 因此, 若 N 為奇數, 則此規律必被破壞, 所以相鄰母圖兩兩不可能全部同時產生鑲嵌的子圖.

綜合以上可得結論: 當其中有一對相鄰母圖的旋轉角等於其最大內角 $-\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ = -60^\circ$ 時, 則其子圖 $G\left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$ 為準鑲嵌圖形(因為中空了一個正 n 邊形). $\square$

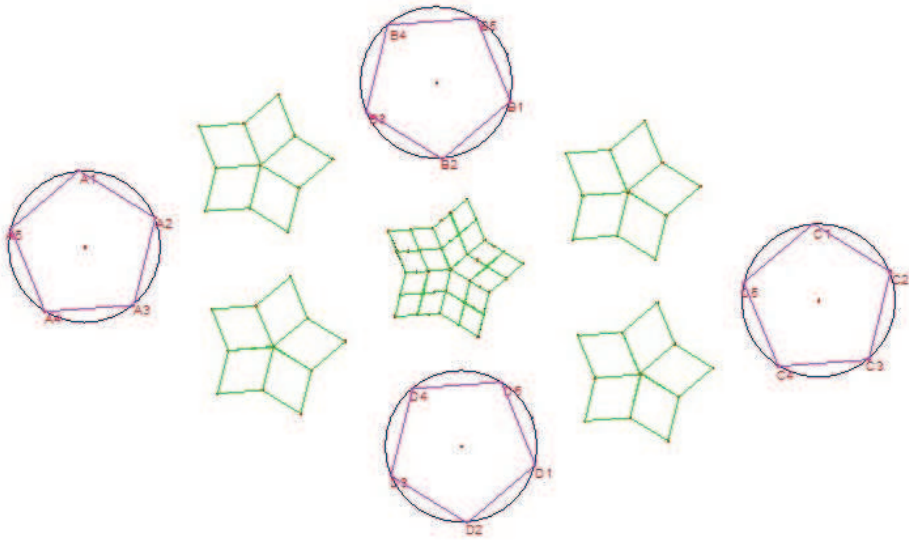
例 27: 當圖形 P_1, P_2, P_3 分別為全等的正五邊形 $A_1^1 A_2^1 \dots A_5^1$ 、 $A_1^2 A_2^2 \dots A_5^2$ 和 $A_1^3 A_2^3 \dots A_5^3$ 時, $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 如下圖所示.



定理 13. 給定 N 個(其中 N 為偶數)全等圖形 $P_1, P_2, \dots, P_N$, 若所有相鄰兩母圖 P_k, P_{k+1} 所生成之子圖為鑲嵌圖形, 則此 N 個全等圖形 $P_1, P_2, \dots, P_N$ 所生成的子圖 $G(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ 為鑲嵌圖形.

證明. 由上述定理 12 的規律性可知, 若 N 為偶數, 則此規律可保持完整, 使相鄰母圖兩兩有可能全部同時產生鑲嵌的子圖, 故其子圖 $G(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ 為鑲嵌圖形. $\square$

例 28: 當圖形 P_1, P_2, P_3, P_4 分別為全等的正五邊形 $A_1^1 A_2^1 \dots A_5^1$ 、 $A_1^2 A_2^2 \dots A_5^2$ 、 $A_1^3 A_2^3 \dots A_5^3$ 和 $A_1^4 A_2^4 \dots A_5^4$ 時, $G(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 如下圖所示.



三、兩母圖線性變換所生成子圖軌跡之鑲嵌性質

最後, 我們再注意一開始的定義:

$$G_{ij}(s, t) = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \frac{t}{s+t} \overrightarrow{OC_j} + \frac{s}{s+t} \overrightarrow{OD_j} \text{ for some } C_j \in \overline{A_j A_{j+1}}, D_j \in \overline{B_{j+1} B_{j+1+i}} \right\}$$

我們可以將上式改寫成:

$$G_{ij}(s, t) = \left\{ M \mid \overrightarrow{C_j M} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{C_j D_j} \text{ for some } C_j \in \overline{A_j A_{j+1}}, D_j \in \overline{B_{j+1} B_{j+1+i}} \right\}$$

由此我們可以看出這種取 M_j 的方式, 其實是以 C_j 為變換中心, 對 $\overrightarrow{C_j D_j}$ 作伸縮變換, 因此我們試著把取分點的方式, 一般化成以 C_j 為變換中心, 對 $\overrightarrow{C_j D_j}$ 作線性變換.

定義 6. 給定一線性變換矩陣 $T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, 以 C_j 為變換中心, 對 $\overrightarrow{C_j D_j}$ 作線性變換 T , 令所形成的部分子圖為

$$G_{ij}(T) = \left\{ M \mid \exists C_j \in \overline{A_j A_{j+1}}, D_j \in \overline{B_{j+1} B_{j+1+i}} \text{ s.t. } \overrightarrow{C_j M} = \overrightarrow{C_j D_j} T^t \right\},$$

其中 T^t 為 T 的轉置矩陣.

引理 2. 若給定線段 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overrightarrow{B_1B_2}$, 且線性變換 T 與 $I - T$ 均為可逆, 則其生成之子圖 $G_{01}(T)$ 為平行四邊形 $E_{11}E_{21}E_{22}E_{12}$, 其中

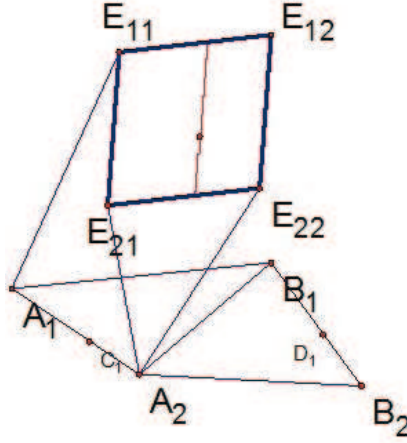
$$\overrightarrow{A_kE_{kl}} = \overrightarrow{A_kB_l}T^t, \forall k, l \in \{1, 2\},$$

且

$$\overrightarrow{E_{11}E_{21}} = \overrightarrow{A_1A_2}(I - T)^t, \quad \overrightarrow{E_{11}E_{12}} = \overrightarrow{B_1B_2}T^t,$$

因此其一內角 $\angle E_{11}$ 為 $\overrightarrow{A_1A_2}(I - T)^t$ 與 $\overrightarrow{B_1B_2}T^t$ 的夾角, 另一內角 $\angle E_{12}$ 為 $\overrightarrow{A_2A_1}(I - T)^t$ 與 $\overrightarrow{B_1B_2}T^t$ 的夾角.

證明. 因為 $\overrightarrow{E_{21}E_{22}} = \overrightarrow{A_2E_{22}} - \overrightarrow{A_2E_{21}} = \overrightarrow{A_2B_2}T^t = (\overrightarrow{A_2B_2} - \overrightarrow{A_2B_1})T^t = \overrightarrow{B_1B_2}T^t$,



同理 $\overrightarrow{E_{11}E_{12}} = \overrightarrow{B_1B_2}T^t$, 又因為

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{11}E_{21}} &= \overrightarrow{E_{11}A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2E_{21}} = \overrightarrow{E_{11}A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{E_{21}A_2} \\ &= \overrightarrow{B_1A_1}T^t + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{B_1A_2}T^t = (\overrightarrow{B_1A_1} - \overrightarrow{B_1A_2})T^t + \overrightarrow{A_1A_2} \\ &= (\overrightarrow{A_2A_1})T^t + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_2}(I - T)^t, \end{aligned}$$

同理 $\overrightarrow{E_{12}E_{22}} = \overrightarrow{A_1A_2}(I - T)^t$, 故得證. □

引理 2 為引理 1 的一般化, 當線性變換 T 為伸縮變換 $\begin{bmatrix} \frac{s}{s+t} & 0 \\ 0 & \frac{s}{s+t} \end{bmatrix}$ 時,

$$I - T = \begin{bmatrix} \frac{t}{s+t} & 0 \\ 0 & \frac{t}{s+t} \end{bmatrix}, \text{ 此時引理 2 即為引理 1.}$$

由引理 2 可知 ”定理 14”:

定理 14. 若給定的兩相似母圖 P 與 Q 為 n 邊形 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 與 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 時, 則其生成之所有部份子圖 $G_{ij}(T)$ 均為平行四邊形.

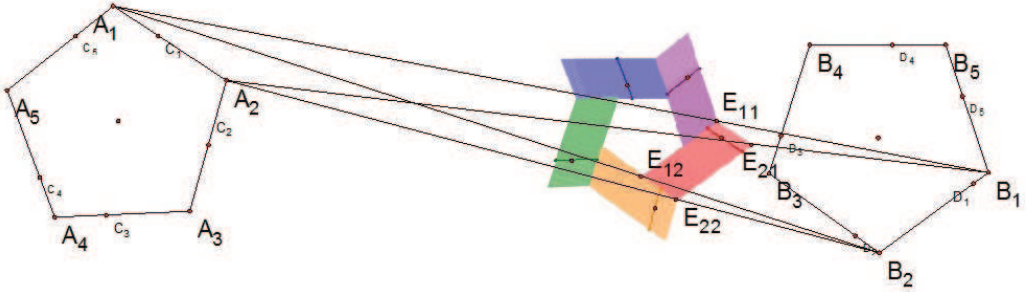
定義 7. 令 $G_{ij}(T)$ 為平行四邊形 $E_{j(j+i)}E_{(j+1)(j+i)}E_{(j+1)(j+1+i)}E_{j(j+1+i)}$.

由引理 2 知 $G_{ij}(T)$ 中

$$\overrightarrow{E_{j(j+i)}E_{(j+1)(j+i)}} = \overrightarrow{A_jA_{(j+1)}}(I-T)^t, \quad \overrightarrow{E_{(j+1)(j+1+i)}E_{j(j+1+i)}} = \overrightarrow{B_jB_{(j+1)}}T^t,$$

而其一內角 $\angle E_{j(j+i)}$ 為 $\overrightarrow{A_jA_{(j+1)}}(I-T)^t$ 與 $\overrightarrow{B_jB_{(j+1)}}T^t$ 的夾角, 另一內角 $\angle E_{j(j+1+i)}$ 為 $\overrightarrow{A_jA_{(j+1)}}(I-T)^t$ 與 $\overrightarrow{B_{j+1+i}B_{(j+i)}}T^t$ 的夾角, $\forall i = 0, 1, \dots, (n-1), j = 1, 2, \dots, n$.

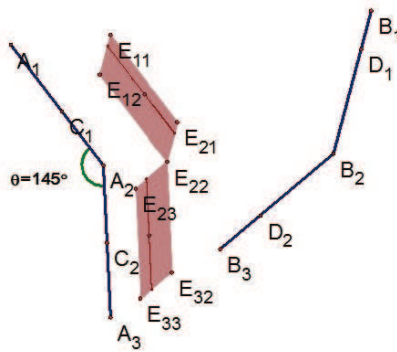
例 29: 當圖形 P 、 Q 分別為正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$, 而 $T = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 時, $G_0(T)$ 如下圖所示。



引理 3. 給定兩相似母圖 P 與 Q 為 n 邊形, 則其生成之所有相鄰的部份子圖 $G_{ij}(T)$ 與 $G_{i(j+1)}(T)$ 必至少有 1 個交點為 $E_{(j+1)(j+1)}$, 因此共至少有 n 個交點。

證明. 以下圖為例(其中 $T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}$), 因為 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ 中共有一點 A_2 ;

$\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$ 中共有一點 B_2 , 顯然兩相鄰部份子圖至少有一交點 E_{22} , 所以至少共有 n 個交點。□



定理 15. 給定兩全等母圖 P 與 Q 為“正” n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 θ . 當

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

(其中 $\phi = \pm \frac{180^\circ(n-2)}{n} - \theta$) 時, 則其子圖 $G_0(T)$ 為鑲嵌圖形.

證明. I、因為要使 $\overrightarrow{E_{22}E_{12}} = \overrightarrow{E_{22}E_{23}}$, 即要使 $\overrightarrow{A_2A_1}(I-T)^t = \overrightarrow{B_2B_3}T^t$,
令 $\overrightarrow{A_2A_1} = (w, z)$ $\overrightarrow{B_2B_3} = (x, y)$, 則

$$\begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = (I-T)\overrightarrow{A_2A_1}^t = T\overrightarrow{B_2B_3}^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

又因為 $|\overrightarrow{A_2A_1}| = |\overrightarrow{B_2B_3}|$, 所以 $\phi = -\frac{180^\circ(n-2)}{n} - \theta$ 滿足關係式 $\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$, 故

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

且 (x, y) 為一正多邊形的各邊向量, 因此必有 (x', y') 與 (x, y) 不平行, 也滿足此關係式, 因此我們可宣稱

$$\begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi - a \cos \phi - c \sin \phi & -\sin \phi + a \sin \phi - \cos \phi \\ -b \cos \phi + \sin \phi - d \sin \phi & b \sin \phi + \cos \phi - d \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \cos \phi - a \cos \phi - c \sin \phi &= a \Rightarrow a = \frac{\cos \phi - c \sin \phi}{1 + \cos \phi}, \\ -\sin \phi + a \sin \phi - \cos \phi &= c \Rightarrow c = \frac{\sin \phi(a-1)}{1 + \cos \phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + \cos \phi)a &= \cos \phi - \frac{\sin^2 \phi(a-1)}{1 + \cos \phi} \\ \Rightarrow (1 + \cos \phi)^2 a &= \cos \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi - a \sin^2 \phi \\ \Rightarrow 2a + 2 \cos \phi &= 1 + \cos \phi \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

代回求得 $c = -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)}$, 且同理能求出

$$b = \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)}, d = \frac{1}{2},$$

因此子圖 $G_0(T)$ 若為某特定形式的鑲嵌圖形, 則矩陣

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \tan \frac{\phi}{2} \\ \frac{1}{2} \tan \frac{\phi}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

反之, 亦可驗證若矩陣

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix},$$

則子圖 $G_0(T)$ 為此特定形式的鑲嵌圖形.

II、因為要使 $\overrightarrow{E_{22}E_{21}} = \overrightarrow{E_{22}E_{32}}$, 即要使 $\overrightarrow{A_2A_3}(I - T)^t = \overrightarrow{B_2B_1}T^t$, 令 $\overrightarrow{A_2A_3} = (w, z)$, $\overrightarrow{B_2B_1} = (x, y)$, 則

$$\begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = (I - T)\overrightarrow{A_2A_3}^t = T\overrightarrow{B_2B_1}^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

又因為 $|A_2A_3| = |B_2B_1|$, 所以 $\phi = \frac{180^\circ(n-2)}{n} - \theta$ 滿足關係式

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-a & -c \\ -b & 1-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

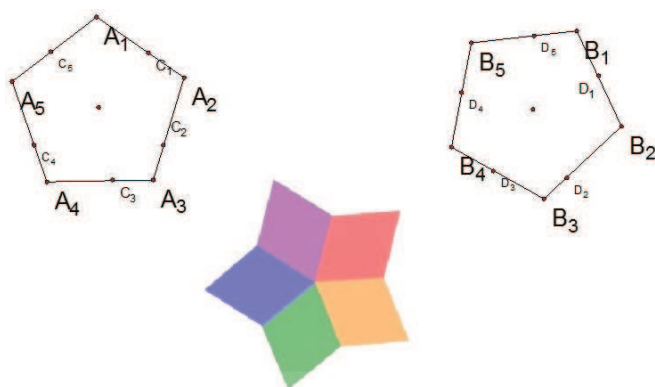
以下同理可證, 子圖 $G_0(T)$ 若為某特定形式的鑲嵌圖形的充要條件為矩陣

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \tan \frac{\phi}{2} \\ \frac{1}{2} \tan \frac{\phi}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

註: 由定理 15 的證明知, 此矩陣 T 為某特定形式的鑲嵌圖形的充要條件, 唯無法證明無其他形式的鑲嵌圖形(觀察結果並無其他形式), 因此僅以充分條件表示.

例 30: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = -30^\circ$ 時, $G_0 \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1+\cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1+\cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$ (其中 $\phi = -78^\circ$) 如下圖所示.



值得注意的是: 當 $\phi = 0^\circ \Leftrightarrow \theta = \mp \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ 時, 則

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1+\cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1+\cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

此時 T 就是伸縮變換矩陣, 且 $G_0(T) = G_0(1, 1)$, 因此這告訴我們取中點的伸縮變換矩陣為此矩陣 T 之一特例. 至於一般的分點比例 $s : t$, 都可用調整母圖的邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 使其子圖 $G_0(s, t)$ 仍為鑲嵌圖形.

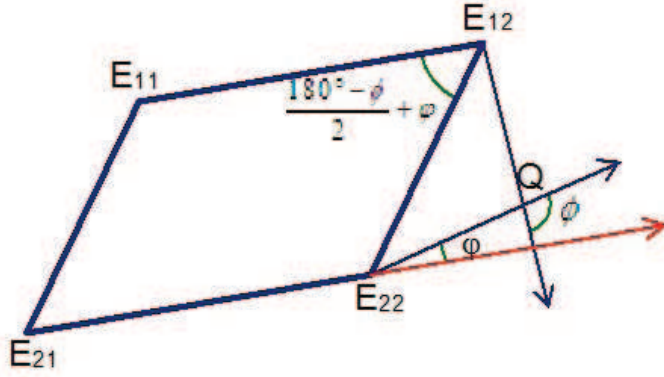
定理 16. 給定兩全等母圖 P 與 Q 為“正” n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 $\theta = \pm \frac{360^\circ}{n} + 60^\circ$. 當 T 為旋轉變換矩陣 $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ 時, 則其子圖 $G_i(T)$ 為鑲嵌圖形.

證明. 設 $T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$, 以下圖為例, 令 $\overrightarrow{A_2A_1} = \vec{u}$, 則

$$\overrightarrow{E_{22}Q} = \vec{u}T^t, \quad \overrightarrow{QE_{12}} = \vec{u}(-I)^t, \quad (|\overrightarrow{E_{21}Q}| = |\overrightarrow{QE_{11}}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|)$$

且令 $\varphi = |180^\circ - \theta|$, 因為 $\triangle E_{22}QE_{12}$ 為等腰三角形, 所以

$$\angle E_{22}QE_{12} = \phi \Leftrightarrow \angle E_{12}E_{22}Q = \frac{180^\circ - \phi}{2},$$



且 $\angle E_{11}E_{12}E_{22} = \frac{180^\circ - \phi}{2} + \varphi$. 若要鑲嵌, 則 $\angle E_{12}E_{11}E_{21} = \frac{180^\circ - \phi}{2} + \varphi$ 要為母圖之一內角 $\frac{360^\circ}{n}$, 即 $\frac{180^\circ - \phi}{2} + \varphi = \frac{360^\circ}{n}$, 且滿足

$$\overline{E_{11}E_{21}} = \overline{E_{21}E_{22}} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_1A_2} = \overline{E_{11}Q} = \overline{QE_{12}}, \text{ 即 } \phi = 60^\circ,$$

I、使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)j}}$ 與 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+2)(j+1)}}$ 相等, 即使 $\overrightarrow{B_{j+1}B_j}T^t$ 與 $\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}(I-T)^t$ 重合, 故

$$\overrightarrow{B_{j+1}B_j}T^t = \overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}I^t + \overrightarrow{A_{j+2}A_{j+1}}T^t.$$

又因為 T 是旋轉矩陣, 所以

$$|\overrightarrow{B_{j+1}B_j}T^t| = |\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}I^t| = |\overrightarrow{A_{j+2}A_{j+1}}T^t| \Rightarrow \overrightarrow{B_{j+1}B_j}T^t \text{ 與 } \overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}I^t \text{ 的夾角為 } 0^\circ,$$

故要將母圖 Q 旋轉 $-\left(\frac{360^\circ}{n} - 60^\circ\right) = -\frac{360^\circ}{n} + 60^\circ$.

II、使 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{j(j+1)}}$ 與 $\overrightarrow{E_{(j+1)(j+1)}E_{(j+1)(j+2)}}$ 相等, 即使 $\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}T^t$ 與 $\overrightarrow{A_{j+1}A_j}(I-T)^t$ 重合, 故

$$\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}T^t = \overrightarrow{A_{j+1}A_j}I^t + \overrightarrow{A_jA_{j+1}}T^t.$$

又因為 T 是旋轉矩陣, 所以

$$|\overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}T^t| = |\overrightarrow{A_{j+1}A_j}I^t| = |\overrightarrow{A_jA_{j+1}}T^t| \Rightarrow \overrightarrow{B_{j+1}B_{j+2}}T^t \text{ 與 } \overrightarrow{A_{j+1}A_j}I^t \text{ 的夾角為 } 60^\circ,$$

故要將母圖 Q 旋轉 $\frac{360^\circ}{n} + 60^\circ$.

□

註: 由定理 16 的證明知, 旋轉矩陣 T 的旋轉角 60° 為某特定形式的鑲嵌圖形的充要條件, 唯無法證明無其他形式的鑲嵌圖形(觀察結果並無其他形式), 因此僅以充分條件表示.

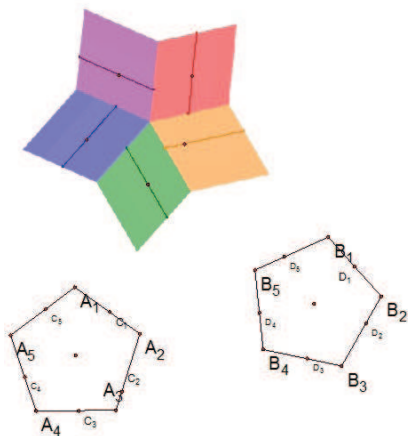
注意定理 15 中, 取

$$\phi = 120^\circ \Rightarrow 120^\circ = \pm \frac{180^\circ(n-2)}{n} - \theta \Rightarrow \theta = \mp \frac{360^\circ}{n} + 60^\circ,$$

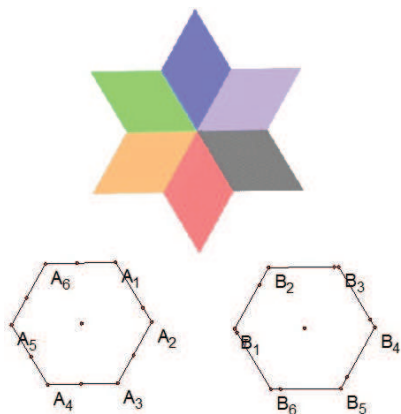
$$\text{且 } T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1+\cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1+\cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix},$$

即為定理 16.

例 31: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = -12^\circ$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$ 如下圖所示.



例 32: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = 120^\circ$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$ 如下圖所示.



相對於定理 15 與 16, 我們經由初步的分析與觀察發現以下之現象:
 給定兩全等母圖 P 與 Q 為”正” n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 θ .

I、 $\forall$ 旋轉角 θ , 當 T 或 $I - T$ 為不可逆的線性變換矩陣時, 則其子圖 $G_0(T)$ 不為鑲嵌圖形. 所以 $\forall$ 旋轉角 θ ,

- (1) 當 T 為伸縮變換矩陣 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ (其中 $h \neq 1, k \neq 1$) 時, 則其子圖 $G_0(T)$ 不為鑲嵌圖形;
- (2) 當 T 為推移變換矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}$ (其中 $h \neq 0, k \neq 0$) 時, 則其子圖 $G_0(T)$ 不為鑲嵌圖形;
- (3) 當 T 為鏡射變換矩陣 $\begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}$ 時, 則其子圖 $G_0(T)$ 不為鑲嵌圖形.

II、 $\forall$ 旋轉角 θ , 當 T 為伸縮變換矩陣 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ (其中 $h \neq k$) 時, 則其子圖 $G_0(T)$ 不為鑲嵌圖形。

I 的說明:

由引理 2, $G_{0j}(T)$ 的

$$\overrightarrow{E_{jj}E_{(j+1)j}} = \overrightarrow{j(j+1)E_{(j+1)(j+1)}} \text{ 或 } \overrightarrow{E_{jj}E_{j(j+1)}} = \overrightarrow{E_{(j+1)j}E_{(j+1)(j+1)}}$$

均互相平行, 且由引理 3, 相鄰的部份子圖 $G_{0j}(T)$ 與 $G_{0(j+1)}(T)$ 的交點 $E_{(j+1)(j+1)}$ 與相鄰的部份子圖 $G_{0(j+1)}(T)$ 與 $G_{0(j+2)}(T)$ 的交點 $E_{(j+2)(j+2)}$ 為 $G_{0(j+1)}(T)$ 對角線的兩端點, 而且這些對角線必連成一 n 邊形, 因此

$$\overrightarrow{E_{jj}E_{(j+1)j}} = \overrightarrow{E_{j(j+1)}E_{(j+1)(j+1)}} \text{ 或 } \overrightarrow{E_{jj}E_{j(j+1)}} = \overrightarrow{E_{(j+1)j}E_{(j+1)(j+1)}}$$

所形成的 $G_{0j}(T)$ 在大部分的情況下會有所拼貼, 此時其子圖 $G_0(T)$ 不為鑲嵌圖形。

註: 因為矩陣

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

為某特定形式的鑲嵌圖形的充要條件, 而 $\det T = \frac{1}{2(1 + \cos \phi)} \neq 0 (\phi \neq 180^\circ)$, 且

$$\det(I - T) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \det(T),$$

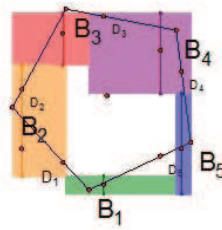
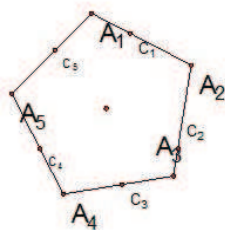
所以 T 與 $I - T$ 必為可逆矩陣, 故不可逆矩陣不會產生此特定形式的鑲嵌圖形。

同理, 若 T 為一鏡射矩陣

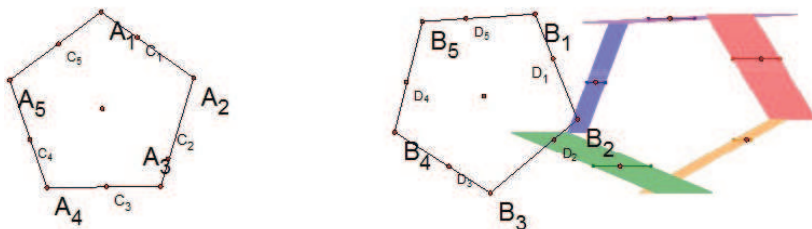
$$\begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

則 $\cos 2\phi = \frac{1}{2} = -\cos 2\phi$, 得到矛盾, 因此鏡射矩陣也不會產生此特定形式的鑲嵌圖形。

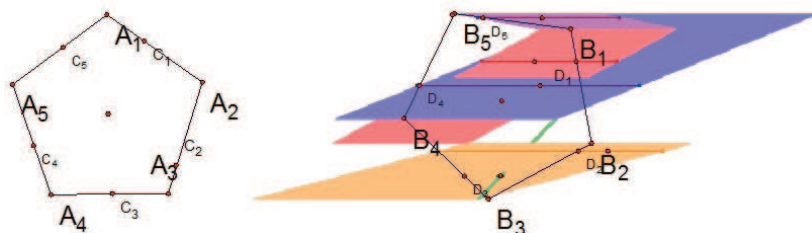
例 33: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 如下圖所示。



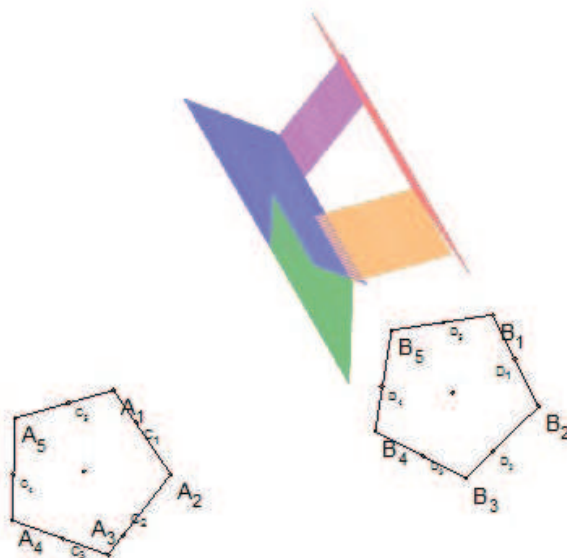
例 34: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 如下圖所示.



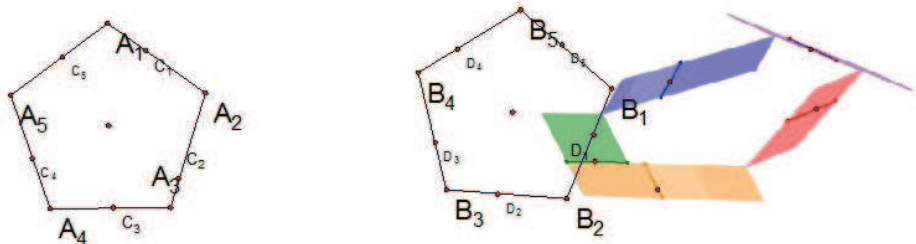
例 35: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 如下圖所示.



例 36: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix}$ 如下圖所示.



例 37: 當母圖 P 與 Q 分別為全等的正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 時, $G_0 \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$ 如下圖所示.



因此我們猜測:

給定兩全等母圖 P 與 Q 為凸 n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 θ . 當 T 或 I_T 為不可逆的線性變換矩陣時, 則其子圖 $G_i(T)$, $\forall i$ 不為鑲嵌圖形.

4 結論

- 一、給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形, 滿足 $\lceil st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ 或 $\lceil st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} \right]$. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $r = \left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖 $G_0(s, t)$ 為鑲嵌圖形; 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $r \neq \left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖 $G_0(s, t)$ 為準鑲嵌圖形.
- 二、給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "平行" n 邊形(其中 n 為偶數), 滿足 $\lceil st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm 180^\circ \mp \frac{360^\circ(1 \mp i)}{n}$ 或 $\lceil st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm \frac{360^\circ(i \mp 1)}{n}$, 其中 $\theta + \frac{180^\circ(n-2)}{n}i \neq 0^\circ, 180^\circ$. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖 $G_i(s, t)$ 為拼貼圖形(含鑲嵌圖形).
- 三、給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形, 滿足 $\lceil st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left(\frac{180^\circ(n-2)}{n} \right)$ 或 $\lceil st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\pm \left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} \right]$. 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+([\frac{n-1}{2}-1])}(s, t)$$

為鑲嵌圖形; 當母圖 P 與 Q 的對應邊長比值不為 $\left| \frac{s}{t} \right|$, 則其子圖的聯集

$$G_n(s, t) \cup G_{n+1}(s, t) \cup G_{n+2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{n+([\frac{n-1}{2}-1])}(s, t)$$

為準鑲嵌圖形, 其中 $G_i(s, t) = G_l(s, t)$, $i \equiv l \pmod{n}$. (共 $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 圈)

- 四、給定兩相似母圖 P 與 Q 為 "平行" n 邊形(其中 n 為偶數), 滿足「 $st > 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm 180^\circ \mp \frac{360^\circ(1 \mp i)}{n}$ 」或「 $st < 0$, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉 $\theta = \pm \frac{360^\circ(i \mp 1)}{n}$ 」, 其中 $\theta + \frac{180^\circ(n-2)}{n}i \neq 0^\circ, 180^\circ$, 則

$$G_i(s, t) \cup G_{i \pm 1}(s, t) \cup G_{i \pm 2}(s, t) \cup \cdots \cup G_{i \pm (\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}(s, t)$$

依序互相鑲嵌, 其中 $G_i(s, t) = G_l(s, t)$, $i \equiv l \pmod{n}$. (共 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 圈)

- 五、給定 N 個全等圖形 $P_1, P_2, \dots, P_N$,

1. 當 N 為奇數: 若有旋轉角使得兩母圖 P_k, P_{k+1} 所生成之子圖為鑲嵌圖形, 則此 N 個全等圖形 $P_1, P_2, \dots, P_N$ 所生成的子圖 $G\left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$ 為準鑲嵌圖形.
2. 當 N 為偶數: 若所有相鄰兩母圖 P_k, P_{k+1} 所生成之子圖為鑲嵌圖形, 則此 N 個全等圖形 $P_1, P_2, \dots, P_N$ 所生成的子圖 $G\left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$ 為鑲嵌圖形.

- 六、給定兩全等母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 θ . 當

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

(其中 $\phi = \pm \frac{180^\circ(n-2)}{n} - \theta$) 時, 則其子圖 $G_0(T)$ 為鑲嵌圖形.

- 七、給定兩全等母圖 P 與 Q 為 "正" n 邊形, 且母圖 Q 為將母圖 P 平移後旋轉有向角 $\theta = \pm \frac{360^\circ}{n} + 60^\circ$. 當 T 為旋轉變換矩陣 $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ 時, 則其子圖 $G_i(T)$ 為鑲嵌圖形.

5 討論與未來展望

- 一、當母圖數為 N 個($N \geq 3$), 且 $(s_1, s_2, \dots, s_N) \neq (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ 時, 是否有類似的鑲嵌性質.
- 二、在一般的線性變換討論中, 我們經由代數運算得到: 當

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} \\ \frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

時, 兩正多邊形母圖的子圖 $G_0(T)$ 為鑲嵌圖形, 而能否從幾何的角度推得此矩陣

$$T = \frac{1}{2} \sec \frac{\phi}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix};$$

並且希望能進一步探討兩圈以上子圖之鑲嵌.

- 三、現在的研究只討論平面上的母圖和子圖之關係, 因此在之後的研究, 希望可以將此研究的範圍擴展至空間中.

參考文獻

- [1] 單墀,《十個有趣的數學問題》,上海教育出版社,第 105-129 頁.
- [2] 蔣聲,《數學引導集 2——幾何變換》,凡異出版社.
- [3] Stephen H. Friedberg 等著,簡國清譯,《線性代數》,東華書局.