以國中幾何角度看圓錐曲線

廖偉恩

國立台中第一高級中學

Abstract

In this project, we study the conic section by the method of elementary geometry. Surprisingly we finally achieve alternative proofs of the famous Brianchon's theorem and Pascal's theorem in projective geometry.

摘要: 本文以國中所學的幾何角度來探討圓錐曲線的性質. 出乎原本預期的, 我們成功重新證明出了攝影幾何中著名的 Brianchon 定理和 Pascal 定理.

1 研究動機

高二的課程中, 由一個單元在探討圓錐曲線. 然而和國中所學的幾何不太一樣, 高中的圓錐曲線完全是放在座標平面上, 以解析方法去研究. 所以我們以不同的觀點, 利用國中所學的幾何知識, 去推導圓錐曲線的各樣性質.

2 研究目的

對圓錐曲線的各種性質, 給出一般的幾何證明. 最終目標是以純幾何證明出 Brianchon 定理和 Pascal 定理 (不用投影, 射影幾何, 解析方法).

3 研究過程

先定義橢圓, 拋物線, 雙曲線. 橢圓, 拋物線. 雙曲線的定義有很多種, 這裡採用的定義如下:

1. 橢圓: 平面上到兩定點距離合為定值的點集合.
2. 拋物線: 平面上到一定點與一線距離相等的點集合.
3. 雙曲線: 平面上到兩定點距離差為定值的點集合.
4. 圓錐曲線的切線定義採用阿波羅尼斯的定義: 與圓錐曲線交於一點且全在圓錐曲線外的直線.

由於拋物線 (一焦點在無限遠處的橢圓), 雙曲線 (一焦點到無窮遠, 最後從另一邊繞回來的橢圓) 的情形皆和橢圓類似, 這裡的圓錐曲線以橢圓作代表來說明研究過程.

首先討論光學性質: 為何會有光學性質? 如圖 1, F_1, F_2 為兩交點. 過橢圓上一點 A 作切線. 由於切線上任一點 B 都在橢圓的外部 (定義), 因此:

$$F_1A + F_2A < F_1B + F_2B,$$

故知 A 是切線上到兩點 F_1, F_2 距離和最小的點, 因此滿足光學性質. (若一道光自 F_1 打到 A, 反射後的光線會過 F_2)

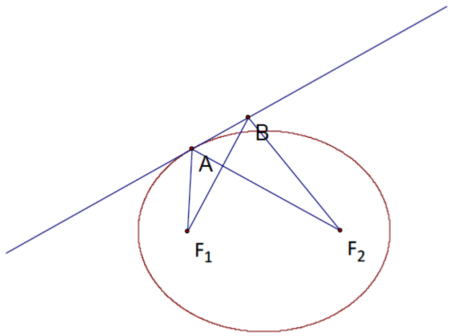

圖 1. 光學性質

如圖 2, 我們從極線和反演點的概念出發: 自圓錐曲線外部一個已知點 P 對橢圓作兩條切線, P 的極線即為這兩個切點 P_1, P_2 所在的直線上. 另外, 極線和連心線 (通過 P 和圓錐曲線中心 O 之直線, 拋物線時 O 在無窮遠, 故連心線視為過 P 且垂直準線的線, 以下皆同) 的交點 P' 稱為 P 的反演點 (注意: 目前只定義 P 在圓錐曲線外部的情況).

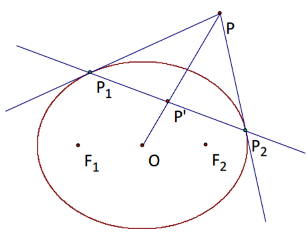

圖 2. 極線與反演點

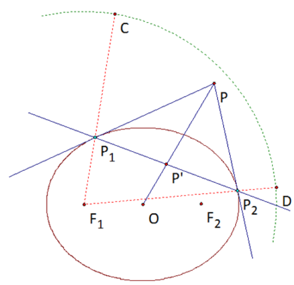

圖 3. 定理 3.1 的證明

首先, 我們有以下定理:

定理 3.1. 對於圓錐曲線外一點, 反演點平分兩切點所形成的線段.

證明. 如圖 3, 假設橢圓的兩個焦點分別為 F_1, F_2, 以 F_1 為圓心, 長軸為半徑畫一圓. 設 F_1P_1 與 F_1P_2 分別交圓於 C 和 D, 則 C, D 分別為 F_2 對 PP_1 及 PP_2 的對稱點 (光學性質), 我們有:

$$S_{\triangle PP_1F_2} = S_{\triangle PP_1C}, \tag{1}$$
$$S_{\triangle PP_2F_2} = S_{\triangle PP_2D}. \tag{2}$$

另一方面, 考慮 $\triangle PP_1F_1$, $\triangle PP_1O$, $\triangle PP_1F_2$, 由於它們底邊相同, 高成等差數列 (如圖四), 因此

$$2S_{\triangle PP_1O} = (S_{\triangle PP_1F_1} + S_{\triangle PP_1F_2}). \tag{3}$$

同理我們有:

$$2S_{\triangle PP_2O} = (S_{\triangle PP_2F_1} + S_{\triangle PP_2F_2}). \tag{4}$$

結合 (1), (3) 式及 (2), (4) 式, 得

$$2S_{\triangle PP_1O} = (S_{\triangle PP_1F_1} + S_{\triangle PP_1F_2}) = (S_{\triangle PP_1F_1} + S_{\triangle PP_1C}) = S_{\triangle PF_1C},$$
$$2S_{\triangle PP_2O} = (S_{\triangle PP_2F_1} + S_{\triangle PP_2F_2}) = (S_{\triangle PP_2F_1} + S_{\triangle PP_2D}) = S_{\triangle PF_1D}.$$

又因為 $\triangle PF_1C \cong \triangle PF_1D$ (SSS) (如圖 5)

$$\Rightarrow S_{\triangle PF_1C} = S_{\triangle PF_1D},$$

$$\therefore S_{\triangle PP_1O} = S_{\triangle PP_2O},$$

即可推出

$$P_1P' = P_2P'. \qquad \square$$

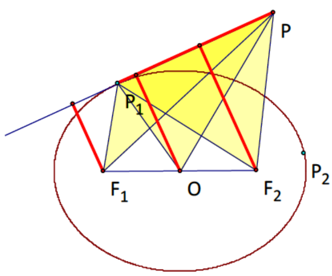

圖 4

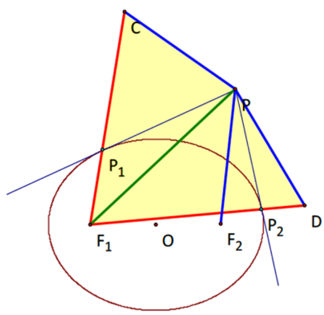

圖 5

如圖 6, 考慮 OP 與橢圓的一個交點 Q, 過 Q 的切線分別交 PP_1 於 PP_2 於 A, B, 令 A', B' 為其反演點 (可知 A' 為 AO 與 P_1Q 的交點且 B' 為 BO 與 P_2Q 的交點). 由定理 3.1 我們可知:

$$P_1A' = A'Q, \tag{5}$$
$$P_2B' = B'Q. \tag{6}$$

在三角形 PP_1Q 中考慮截線 AO, 由孟式定理得:

$$\frac{P_1A}{AP} \times \frac{PO}{OQ} \times \frac{QA'}{A'P_1} = 1.$$

配合 (5) 式得:

$$\frac{P_2B}{BP} = \frac{OQ}{PO}. \tag{7}$$

同理我們也有:

$$\frac{P_1A}{AP} = \frac{OQ}{PO}. \tag{8}$$

由 (7), (8) 我們得知$AB \| P_1P_2$, 即:

定理 3.2. P 的極線平行於過 Q 的切線.

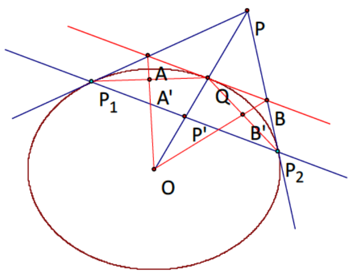

圖 6. $AB \parallel P_1P_2$

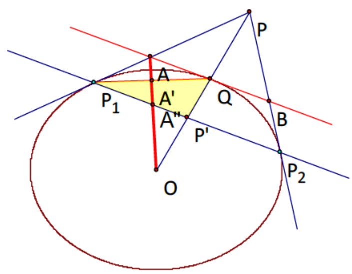

圖 7

另一方面 (如圖七), 由於 $AQ \| P_1A''$, 又 A'是線段 P_1Q 的點, 因此 $AP_1A''Q$ 為平行四邊形 (A'' 為 OA' 與 P_1P' 交點).

$$\begin{aligned}\frac{OQ}{PO} &= \frac{P_1A}{AP} \quad (\text{由 } (8)) \\ &= \frac{A''Q}{AP} \quad (\because AP_1A''Q \text{ 為平行四邊形}) \\ &= \frac{A''P'}{AQ} \quad (\triangle QA''P \sim \triangle PAQ) \\ &= \frac{OP'}{OQ},\end{aligned}$$

交叉相乘即得:

定理 3.3. $OQ^2 = OP' \times OP$.

現在我們引進共軛直徑的概念. 由定理二可知, 考慮圓錐曲線內任一條弦 AB, 此弦中點的與圓錐曲線中心的連線交圓錐曲線於 C, 則弦 AB 必平行於過 C 之切線. 亦即:

定理 3.4. 圓錐曲線內所有平行的弦, 其中點都在同一條直線上.

稱此線為這些平行弦的共軛直徑. (如圖 8)

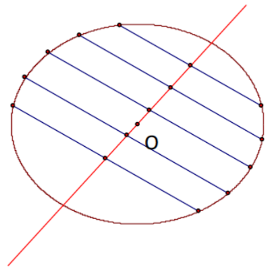

圖 8. 共軛直徑

再配合定理 3.3, 我們可以定義反演點與極線, 當給定點在圓錐曲線內的情況: 給定圓錐曲線內一點 P, 其反演點 P' 為 $\overrightarrow{OP}$ 上滿足 $OP \times OP' = OQ^2$ 的點 (其中 Q 為直線 OP 與橢圓的交點, 若為拋物線則為 $PQ = QP'$). 而極線即為過反演點 P' 且平行於 OP 共軛直徑的直線. 可知, 若 P 的反演點為 P', 則 P' 的反演點為亦為 P. 特別的, 當 P 在圓錐曲線周上時, P 的反演點就是自己, 極線就是過 P 的切線.

定理 3.5. 若 P 的極線過 Q, 則 Q 的極線也過 P.

在證明定理 3.5 之前, 先證明一個引理 (如圖 9):

引理. 若圓錐曲線與三角形的三邊都相切, 則分別將三個頂點與其對應邊上的切點相連, 此三線共點.

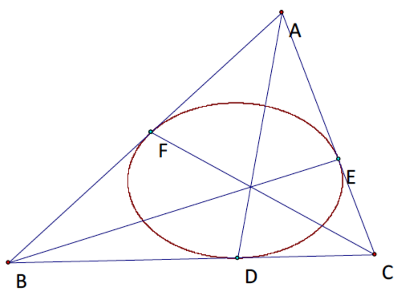

圖 9. AD, BE, CF 共點

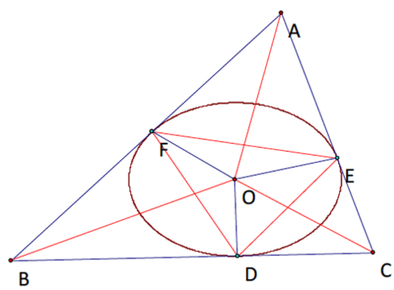

圖 10. 引理的證明

引理的證明 (如圖 10): D, E, F 分別為 BC, CD, AB 上的切點. 由於 OA 過 FE 之中點, 因此:

$$S_{AOF} = S_{AOE}.$$

同理我們也有:

$$S_{BOD} = S_{BOF},$$
$$S_{COE} = S_{COD}.$$

考慮西瓦定理:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = \frac{S_{AOF}}{S_{BOF}} \times \frac{S_{BOD}}{S_{COD}} \times \frac{S_{COE}}{S_{AOE}} = 1,$$

故 AD, BE, CF 三線共點, 引理得證.

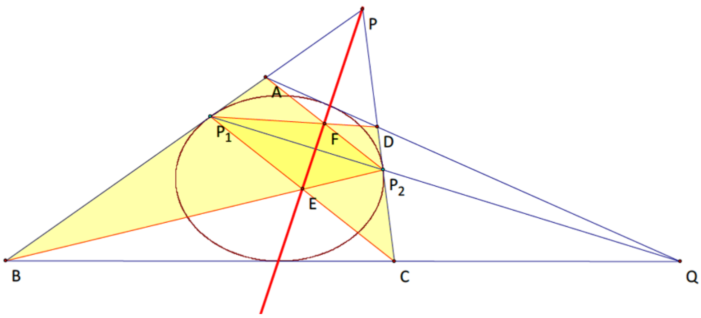

圖 11. E, F, P 三點共線

回到定理 3.5 (如圖 11), Q 為 P 的極線 P_1P_2 上一點, Q 的兩條切線交 PP_1 於A, B, 交 PP_2 於 C, D. 考慮三角形 AP_2B 與三角形 DP_1C, 因為 AD, P_2P_1, BC 交於一點 (Q), 由笛沙格定理得: E, F, P 三點共線.

又由引理知: PF 過 AD 上的切點, PE 過 BC 上的切點. 因此知道 EF 就是 Q 的極線, 所以 Q 的極線過 P, 定理 3.5 得證. (事實上, 上述只證了 Q 在圓錐曲線外部之情況, 再配和笛沙格定理可知 Q 在圓錐曲線內部也成立)

由於 AP_1P_2DPQ 構成完全四邊形, 立即可得: QGP_1P_2 成調和四元組, 因此我們得到:

定理 3.6. 過一點 P 作一直線與圓錐曲線交於 A, B, AB 和 P 的極線相交於 Q, 則 P, Q 調和分割 A, B.

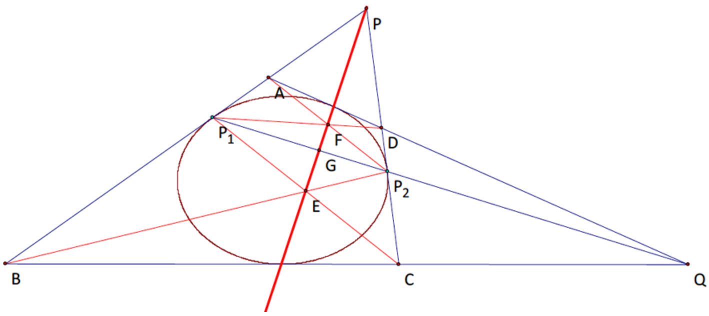

圖 12. QGP_1P_2 成調和四元組

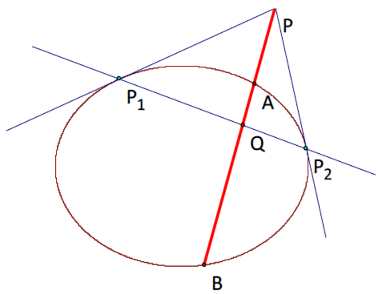

圖 13. 定理 3.6

利用定理 3.6, 我們可以證明定理 3.7:

定理 3.7. 過圓錐曲線外一點 P 作兩直線與圓錐曲線分別交於 A, B 和 C, D, AC 和 BD 交於 S, AC 和 BD 交於 R, 則 RS 為 P 的極線 (如圖 13).

證明. 考慮完全四邊形 $ABCDPS$, 我們有:

$$PEAB \text{ 為調和四元組,}$$
$$PFDC \text{ 為調和四元組.}$$

由定理六知 E, F 皆在 P 的極線上, 故 RS 為 P 的極線. □

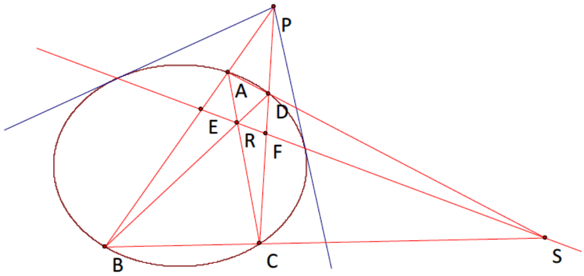

圖 14. 定理 3.7

定理 3.7 直接給出了高斯作切線的方法的證明了: 如何只用直尺作出圓錐曲線外一點對圓錐曲線的切線?

另外一方面, 配合定理五及定理七, 我們還有以下結論:

定理 3.8. 若一個圓錐曲線與四邊形 $ABCD$ 四邊都相切, 切點分別為 E, F, G, H, 則 AC, BD, EG, HF 四線共點.

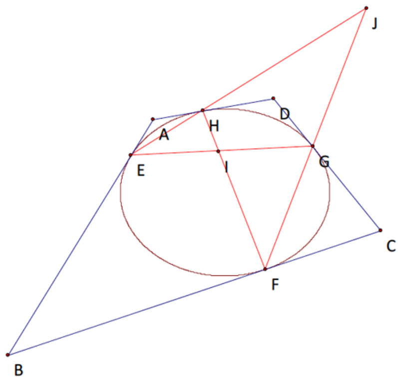

圖 15. 定理 3.8

證明. (如圖 15) 設 I 為 EG 和 FH 的交點. 延長 EH, FG 交於 J, 由定理七得知 I 在 J 的極線上. 又由於 A 的極線 EH 和 C 的極線 FG 皆過 J, 由定理五知 AC 為 J 的極線, 故 I 在直線 AC 上. 同理可得 I 在直線 BD 上, 故定理 3.8 得證. □

由定理 3.8, 我們就可以證明著名的 Brianchon 定理了!

定理 3.9. Brianchon 定理: 圓錐曲線外切六邊形三條對角線必共點.

證明. (如圖 16) 設六個頂點分別為 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 六個切點分別為 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. 由定理 3.8 知道 B_2B_3, B_1B_4, A_2A_4 共點 (令為 P). 考慮 $\triangle A_2B_2C$ 和 $\triangle A_4B_3D$, 由笛沙格定理的 A, Q, E 共線, 及 Brianchon 定理得證. □

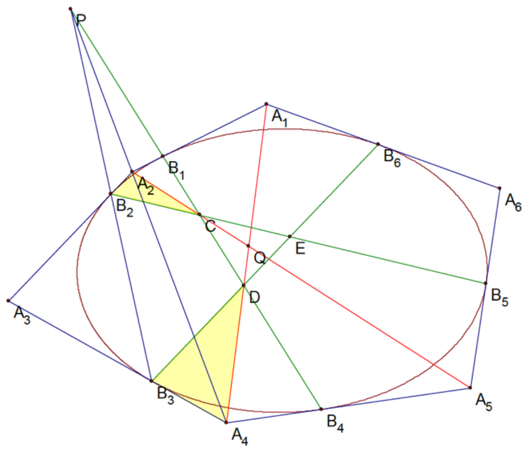

圖 16. Brianchon 定理

再由 Brianchon 定理來導 Pascal 定理: 對六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 來說, 三組對邊的交點 P_1, P_2, P_3 分別為 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 三條對角線的極點. 舉例來說, P_1 為 B_2B_3 和 B_5B_6 的交點, 因 A_3 的極線 B_2B_3 過 P_1, A_6 的極線 B_5B_6 也過 P_1, 所以 A_3A_6 為 P_1 的極線. Brianchon 定理說 A_3A_6, A_1A_4, A_2A_5 共點 (Q), 所以 P_1, P_2, P_3 共線 (Q 的極線).

定理 3.10. Pascal 定理: (圓錐曲線) 內接六邊形中, 三條對邊的交點共線.

因此我們成功的以國中幾何的方法證明出了 Brianchon 定理和 Pascal 定理! (用到的迪沙格定理可用孟氏定理證明.)

4 未來展望

此處證明了射影幾何中重要的 Brianchon 定理和 Pascal 定理, 我想繼續探討是否亦可以用國中幾何的方法來證明彭賽列閉合原理. 在三天的競賽過程中, 對彭賽列閉合原理的證明有了一些進展, 我們已經可以證明出最基本的三角形情況!而多邊形情形還有待探討.

對彭賽列閉合原理三角形的情況：如圖 17. 設 A, B, C 皆在圓錐曲線 c_1 上, 且其三邊分別與圓錐曲線 c_2 相切. 對於圓錐曲線 x_1 上另外三點 D, E, F, DE, EF 與圓錐曲線 c_2 相切, 我們要證明 DF 也與圓錐曲線 c_2 相切.

首先由帕斯卡定理得 J_2, J_3, J_5 共線. 接著, 由帕普斯定理得 J_2, J_4, J_5 共線. 再一次帕普斯定理得 J_2, J_4, J_1 共線. 合併上三式得 J_2, J_3, J_1 共線. 最後, 對六邊形$I_1I_2J_3I_4I_3I_2$, 因布里昂雄定理, DF 也與圓錐曲線 c_2 相切. 這就證明了彭賽列閉 合原理三角形的情況. 期待多邊形的情況也可用類似解法做出來.

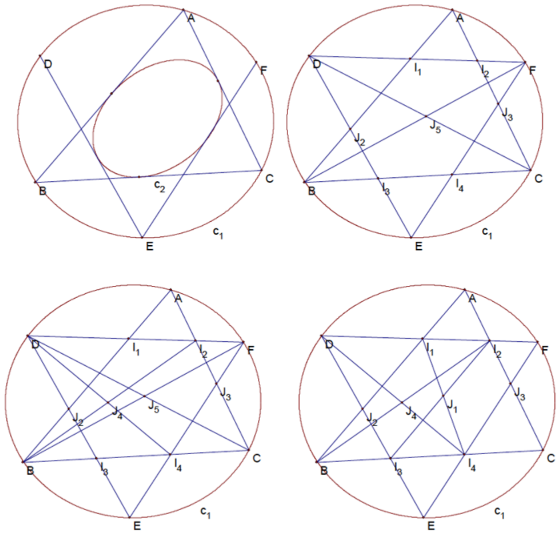

圖 17. 彭賽列閉合原理

參考文獻

[1] 黃家禮; 《幾何明珠》, 2000 年, pp. 224-236.

[2] 海因里希-德里; 《100個初等數學問題》, 1999 年.