點到“圍”止 — 矩形方格染色的探討

李佳晉

臺北市立建國高級中學

Abstract

The purpose of this research is to investigate a chessboard coloring problem: Given an $n \times n$ chessboard, we try to color its blocks as many as possible such that any 4 colored blocks do not form a rectangle with its sides parallel to the edge of the chessboard. The maximal number of such colored blocks is defined as $S(n)$. Some property and limits of chessboard coloring are discussed first and that gives the general upper-bound of $S(n)$. Furthermore, some special cases are defined and discussed via two models – Block design and Ring coloring, with which partial conclusions are proved. For general n, methods of constructing lower-bound of $S(n)$ are designed.

摘要: 本作品在探討棋盤上矩形方格染色問題: 對於一個 $n \times n$ 的棋盤, 盡可能在上面染色, 並使得任意四個染色格都不為一個邊平行於格線的矩形的四個頂點, 定義所得到的最大染色數為 $S(n)$. 首先探討了棋盤染色的基本限制與性質, 得到了最大染色數 $S(n)$ 的上界. 定義 n 的特殊情況, 並以區組設計 (Block design) 及輪換排列法討論之, 得到了部分的結論. 對於一般情況的 n 則找出並證明了幾個例子, 並嘗試設計染色方法以求出一般 $S(n)$ 的下界.

1 簡介

1.1 研究動機

在高中排列組合問題中, 有一道 “方格中的紅點矩形問題”, 題目敘述如下: “7×7 的正方形棋盤中, 將 S 個方格染成紅色, 使得其中任意 4 個紅點都不是一個邊平行於格線的矩形的 4 個頂點, 求 S 的最大值?” 我決定要將題目推廣至 $n \times n$ 棋盤的染色問題, 將題目定義為: “在 $n \times n$ 的正方形棋盤中, 將 S 個方格染色, 並且使得任意 4 個染色格不會形成一個邊平行於格線的矩形的 4 個頂點, 求 S 的最大值 $S(n)$.”

1.2 研究目的

1. 探討棋盤上方格染色的限制與性質.
2. 定義並討論 $n \times n$ 棋盤中“特殊情況”之染色方法.
3. 討論一般 $n \times n$ 棋盤上的最大染色數及其上下界.

1.3 符號説明

1. 定義 $S(n)$ 為在一個 $n \times n$ 的正方形棋盤中, 能符合條件的最大染色數.
2. 在本文中, 定義"行 (column)"為鉛直的一整排棋盤格子. "列 (row)"則為水平的一整排棋盤格子.

1.4 主要結果

1. 對於任意 n, 都有 $3(n-1) \leq S(n) \leq \frac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$.
2. 定義當 $n = k^2 - k + 1$ 時為特殊情況, k 表每行 (每列) 所有的的染色格數. 利用區組設計或是輪換排列法來討論, 並得到了當 $n = p^2 + p + 1$ (p 表質數) 時, 有 $S(n) = n(p+1)$.
3. 由 [6] 和定義 2.4 得知, 當 $n = p^{2t} + p^t + 1$ (p 表質數, $t \in \mathbb{N}$), 有 $S(n) = n(p^t + 1)$.
4. 使用斜線排列法估計下界, 考慮首列數列 $< a_n >= 2^{n-1}$, 得到下界: 當 $2^{q-1} \leq n < 2^q$ ($q \in \mathbb{N}$), 有 $S(n) \geq q(n+1) - 2^q + 1$.

2 研究內容

2.1 探討棋盤上方格染色的限制與性質

定理 2.1. 對於任意的 n , 都有 $S(n) \leq \frac{n+\sqrt{4n-3}}{2}$.

在 $n \times n$ 的棋盤上, 假設棋盤上第 i 行 (column) 有 x_i 個染色格, 於是有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S(n). \tag{1}$$

已知如果某行中已有 2 個染色格, 那麼, 在其餘每行中都不能再有 2 個染色格與前 2 個染色格分別同列. 換言之, 每行的"染色格對"所在的位置互不相同. 由於每行有 n 個方格, 不同的方格對共有 C_2^n 種, 因此我們有下列關係

$$C_2^{x_1} + C_2^{x_2} + C_2^{x_3} + \cdots + C_2^{x_n} \leq C_2^n, \tag{2}$$

將上式展開得到

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq n(n-1), \tag{3}$$

由柯西不等式

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq \frac{S(n)^2}{n}, \tag{4}$$

代回原式, 整理得

$$S(n)^2 - nS(n) - n^3 + n^2 \leq 0, \tag{5}$$

利用公式解, 可得

$$S(n) \leq \frac{n + n\sqrt{4n-3}}{2}. \tag{6}$$

由 (6) 這個不等式, 可以確定題目所求的最大染色數必不大於這個值, 可以做為所要的上界 (定理 2.1).

2.2 定義並討論 $n \times n$ 棋盤中“特殊情況”之染色方法

定義 2.2. 當 $n = k^2 - k + 1$ 時, 稱為 “特殊情況”.

根據定理 2.1, 式 (6) 的等號成立的必要條件為: 每行 (每列) 的染色格數都相等, 即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = k$. 此時 $k = \frac{S(n)}{n} = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$, 而 $n = k^2 - k + 1$, 將其定義為 “特殊情況” 方便討論.

例如: 當 $k = 3$ 和 $k = 4$ 的時候, 分別有 $n = 7$ 和 $n = 13$ 兩種特殊情況, 排法如圖 1, 2 所示, 恰好皆滿足 $S(n) = \frac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$.

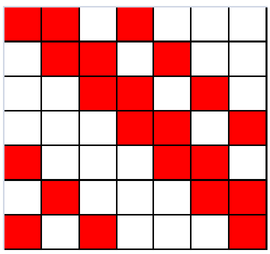

圖 1. $k = 3, n = 7, S(n) = 21$

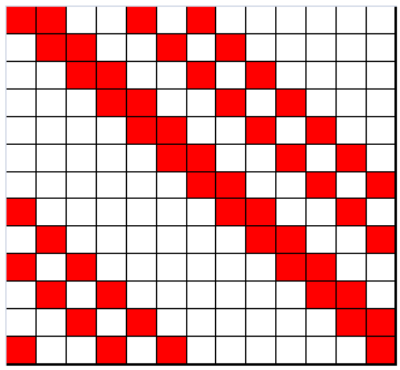

圖 2. $k = 4, n = 13, S(n) = 52$

為了要方便表示, 將這些方格染色以另一種形式表示. 把棋盤中第 m 列中有染色格的行數放在第 m 個集合中. 例如: 圖 1 中的棋盤染色可表示為:

$$(1,2,4),\ (2,3,5),\ (3,4,6),\ (4,5,7),\ (1,5,6),\ (2,6,7),\ (1,3,7)$$

由這種表示法易見: 在 n 個 k 元集合中任意兩個數出現在同一個集合中的次數恰為一次. 因此特殊情況的排法可轉換為區組設計 (Block design) 的問題.

2.3 使用區組設計探討特殊情況之棋盤染色

定義 2.3. 本題轉換為區組設計 (Block design) 命題如下: 在一個有限集合 X 中有 $n = k^2 - k + 1$ 個元素, 找出 n 個 k 元子集, 並使得任意 2 個元素恰在同一個子集中一次.

定理 2.4. 利用區組設計討論特殊情況, 得到了:

$$\text{當 } n = p^2 + p + 1 \ (p \text{ 表質數}) \text{ 時, 有 } S(n) = n(p+1).$$

由定義易知 X 中的每個元素在所有集合中恰出現 k 次. 如圖 3, 不失一般性, 先將 k 個 1 放入 k 個集合中, 再依序將 $2, 3, 4, \cdots, k^2 - k + 1$ 填入這 k 個集合. 如此一來, 剩下的 $k^2 - 2k + 1$ 個集合將包含 $2, 3, 4, \cdots, k^2 - k + 1$ 各 $k - 1$ 個. 接下來, 再將剩餘的所有 $2, 3, 4, \cdots, k$ 填入這 $k^2 - k + 1$ 個集合中. 因此, 最後所要處理的, 只剩下 $k+1, k+2, \cdots, k^2 - k + 1$ 這 $(k-1)^2$ 個元素分布在 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ 這 $k - 1$ 個 $(k-1) \times (k-1)$ 的方陣中.

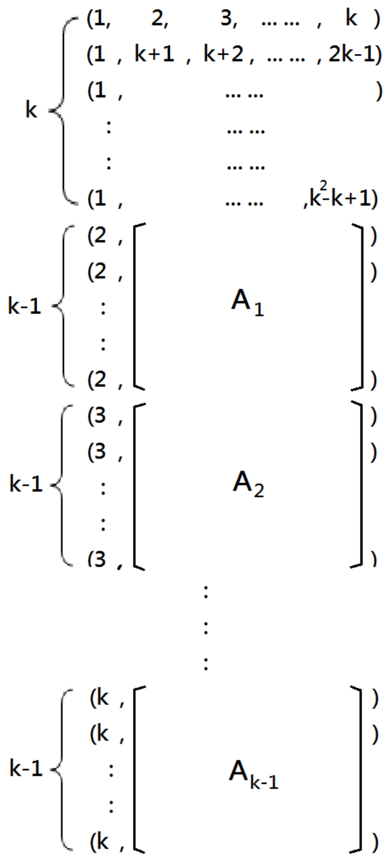

圖 3

在這 $k-1$ 個方陣中, 進一步將問題化簡如下: 假設 A_i 矩陣其中的 $a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{k-1,k-1}$ 對應到所剩下的 $(k-1)^2$ 個元素. 將這些元素由上而下, 由左而右依序填入, 就可得 A_1 方陣. 接著, 定義一次 "操作" 如下:

定義 2.5. 將一次操作定義為: 將 A_i 的第 j 行 $(j \leq k-1)$ 行所有元素往下平移 $j-1$ 單位, 超出部分則往上遞補, 所得新方陣即為 A_{i+1}.

清楚可見當 $k-1$ 為質數時, 由於質數會與所有小於自身的正整數互質, 因此, 便能保證每做一次運算之後, 任一元素的 "同列鄰居" 皆與先前不同且不產生矛盾. 從而得知: 當 $k-1=p$ 時 (p 表質數), $n=p^2+p+1$, 有 $S(n)=(p^2+p+1)(\frac{1+\sqrt{4p^2+4p+1}}{2})$, 即 $S(n)=n(p+1)$ (定理 2.4).

2.4 使用輪換排列法探討特殊情況之棋盤染色

由於當 $k-1$ 不是質數的時候, 2.2.1 的區組設計方法並不適用, 因此必須再想出其他的方法來建構出合乎條件的染色.

另一種可以用來討論特殊情況的方法, 稱為 "輪換排列法", 例如圖 4:

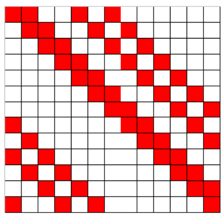

圖 4

產生的過程, 要先經過一個 "環狀著色" 的定位之後, 再造出如圖 4 的模型. 以下是詳細過程: 首先, 這種排法的原則, 是在方格上選定一條斜率為 -1 (或 1) 之方格所構成的直線, 並且從左上到右下 (或右上到左下) 依序為方格上色, 當到達最右邊 (或最左邊) 的方格時, 再跳到下一列最左邊的方格上色, 如下圖 5:

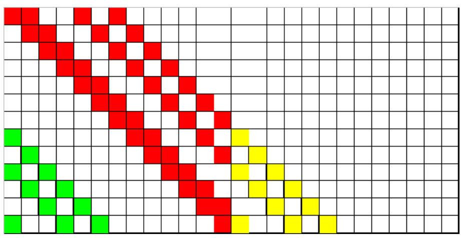

圖 5

圖 5 的紅色塗到最右邊之後, 想像旁邊還有另一個方格讓它接續下去直到最後一列 (黃色), 最後再將其移回原棋盤變成綠色的區塊即完成著色動作.

因此, 只要選定最上面一列的格子是哪些格子要塗色, 以下的方格就能自動定位. 至於如何選擇首列的塗色方法, 我將問題簡化為 "環狀著色" 問題. 經過觀察可以得知, 若以上

述的方式將棋盤著色, 由於每一條斜線間的相對位置在每一列都相同, 因此, 只需要探討最初定位的第一列之相對位置, 就能確定該定位不會有與命題矛盾的情況.

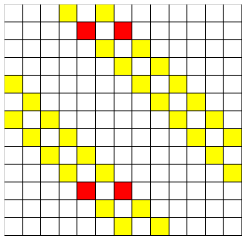

圖 6

舉例說明如圖 6, 圖中紅色區塊形成矩形與命題矛盾, 乃是因為左下角的兩條與右上角的兩條染色方格的 “差距”, 以圖 6 中的例子來說兩排的 “差距” 各自都是 2, 所以會產生矩形. 因此, 當探討第一列的定位時, 只要該列任兩個著色的方格之間的差距數字不重複, 向下延長後所造成的著色情況便能確定不矛盾. 此外, 因為其每一條線皆剛好塗滿該方格的邊長, 滿足特殊情況 $S(n) = \frac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$, 並且每行每列的染色格數相等, 因此能夠作為特殊情況的排法.

由於在塗色到盡頭時會接續到另一邊, 因此, 在討論 “差距” 時不能只以直線做討論, 必須以一個 “環” 為模組.

定義 2.6. 將環狀著色定義如下: 在一個有 $n = k^2 - k + 1$ 格的環上, 選取 k 個格子染色, 並使得任意兩個染色格之間的 “方格距離” 都兩兩不相等, 稱為一個 “完整的環狀著色”.

由此便可定義輪換排列法.

定義 2.7. 輪換排列法定義如下: 在特殊情況下, 將首列的 n 格對應到一個有 n 格的完整的環狀著色, 即可完成首列定位. 接著, 將首列的染色格往右下延伸後遞補回另一側即可完成棋盤著色.

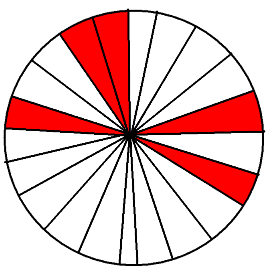

圖 7

從圖 7 可以看到一個有 21 格的環, 在上面 5 格著色, 使得任意兩個格子之間的差從 1～20 剛好各出現一次, 即為一組滿足的情況, 轉換回棋盤上就成為下圖 8.

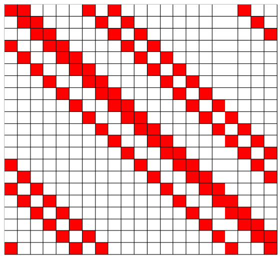

圖 8

如此可以依序把 $k = 2, 3, 4, 5, 6$ 的環狀著色排出來, 依序如下, 其中 $k = 4$ 的情況找到了兩組完整的環狀著色:

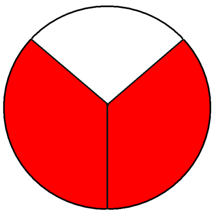

圖 9. $k = 2$

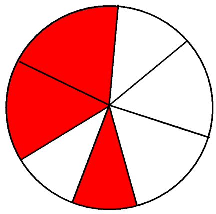

圖 10. $k = 3$

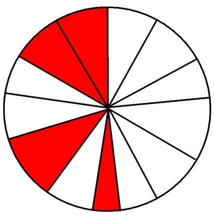

圖 11. $k = 4$

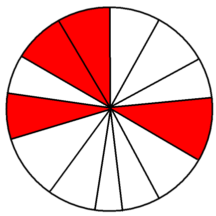

圖 12. $k = 4$ 另解

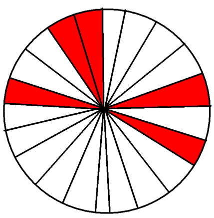

圖 13. $k = 5$

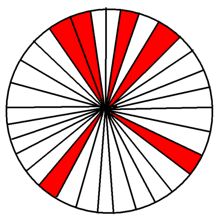

圖 14. $k = 6$

然而, 上述的例子皆是由窮舉法所得出. 問題的瓶頸在於缺乏一套有系統的方式能找出完整的環狀著色方式. 而這也是本作品未來的研究方向.

定理 2.8. 當 $n = p^{2t} + p^t + 1$ (p 表質數, $t \in \mathbb{N}$), 有 $S(n) = n(p^t + 1)$.

探討已存在的特殊情況 ($k \geq 3$), 容易證明以下幾個性質:

1. 任意一組染色格對恰決定一行 (列) 的染色.
2. 任意兩行 (列) 恰有一個公共格.
3. 可選定三行 (列) 不共有一組公共格.
4. 每一行 (列) 至少包含三個染色格.

這恰好符合射影平面 (projective plane) 的四個公理:

1. 相異兩點恰決定一條直線.
2. 任兩條直線恰交於一點.
3. 存在不共線三點.
4. 每一條線至少通過三點.

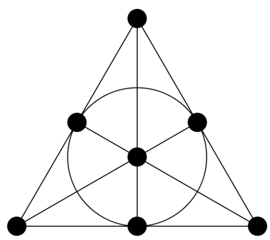

圖 15

因此, 對於已知的特殊情況的解, 可經由轉換而得到一個階數 (order) 為 $k-1$ 的射影平面, 反之亦然. 例如: $k = 3, n = 7$ 的特殊情況可轉換為階數為 2 的射影平面如圖 15.

關於射影平面, Kahrstrom (2002) [6] 提到, 當 order $n = p^t$ (p 表質數, $t \in \mathbb{N}$) 時, 存在射影平面. 因此可以確定, 當 $k = p^t + 1$ 時, 可構造出射影平面並轉換回棋盤染色, 從而得到 $S(n) = n(p^t + 1)$ (定理 2.8).

2.5 討論一般 $n \times n$ 棋盤上的最大染色數及其上下界

當 n 值比較小的情況, 可以利用鴿籠原理, 再加以限制單行染色格數的最大值, 進一步討論個數, 得出結果. 證明方法為: 先排出染色數為 m 的方法, 接著證明無法在棋盤上染色 $m + 1$ 格, 就能證明最大染色數是 m.

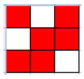

圖 16

1. 3×3 棋盤下的最大染色數
如圖 16, 為 6 個染色格的染色方法. 若最大染色數為 7, 則根據鴿籠原理, 至少會有一行的染色格數是 3, 則其他行都不能再染色一格以上, 出現矛盾, 故得知 $S(3) = 6$.

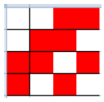

圖 17

2. 4×4 棋盤下的最大染色數
如圖 17, 為 9 個染色格的染色方法. 若存在 10 個染色格, 且一行染色數最大為 4, 則這種情況明顯不合, 因為若一行 4 格都染色, 會使之後每一行都只能染色一格. 若一行染色數最大為 3, 則至少會有兩行有三格染色, 如此也會出現矛盾, 因為染色數為 3 的兩行必會產生兩個染色格的交集. 故得知 $S(4) = 9$.

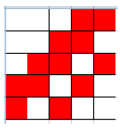

圖 18

3. 5×5 棋盤下的最大染色數
如圖 18, 為 12 個染色格的染色方法. 若存在 17 個染色格, 且一行染色數最大到 5, 則由 4×4 的情況可知必定不合. 若一行染色數最大為 4, 則至少有一行包含 4 格且一行包含 3 格, 則該兩行也會出現兩個以上的染色格交集, 亦不合. 若一行染色數最大為 3, 則有三行必須有 3 格染色, 以鴿籠原理討論矛盾, 故 $S(5) = 12$.

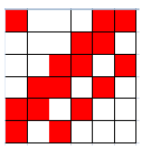

圖 19

4. 6×6 棋盤下的最大染色數
如圖 19, 為 16 個染色格的染色方法. 若存在 17 個染色格, 且一行染色數最大到 6, 則

明顯不合. 若一行染色數最大到 5, 則將至少有一行有染色數到 3, 則出現矛盾. 若一行染色數最大到 4, 則有三行的染色數為 3, 亦會矛盾. 若一行染色數最大到 3, 據鴿籠原理討論後也會產生不合, 故得知 $S(6) = 16$.

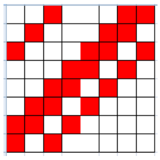

圖 20

5. 8×8 棋盤下的最大染色數

   如圖 20, 為 24 個染色格的染色方法. 若存在 25 個染色格, 且一行最大染色格數為 8, 明顯不合. 若一行染色數最大為 7, 必會有一行以上有染色 3 格, 則產生兩兩交集亦不合. 若一行染色數最大到 6, 則有五行必須著色 3 格, 也會出現兩兩交集. 若一行染色數最大到 5, 則有六行必須著色 3 格, 經過操作後證實不合. 若一行染色數最大到 4, 則有七行必須著色 3 格, 經過繁瑣操作, 以及鴿籠原理的證實也不合. 故得知 $S(8) = 24$.

目前已經證明: $S(3) = 6$, $S(4) = 8$, $S(5) = 12$, $S(6) = 16$, $S(8) = 24$. 然而當 n 越來越大, 討論起來相當複雜. 因此我試著對任意的 n 給出一個可靠的上下界. 上界已經由定理 2.1 得出, 因此接下來要從下界著手. 最明顯直觀的下界為 $3(n-1)$, 但仍有進步空間.

定義 2.9. 將 "斜線排列法" 定義如下: 首先將棋盤的首列染色, 使首列中染色格之間的差不會兩兩重複, 再將該首列有染色的方格往棋盤的右下方延伸染色, 直至棋盤右側邊界停止, 完成斜線排列法以估計下界. 如圖 21.

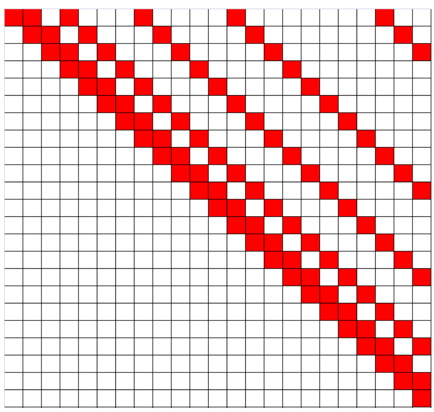

圖 21

考慮貪婪演算法 (Greedy Algorithm) 建構首列數列, 所得到的數列為:

$$1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 204, 252, 290, 361, 401, 475, \cdots$$

經由整數數列線上大全 (OEIS, `http://oeis.org/Seis.html`) , 得知該數列為 Mian-Chowla sequence, 但該數列在現代數論中目前還未被發現通項公式.

定理 2.10. 當 $2^{q-1} \leq n < 2^q$ $(q \in \mathbb{N})$, 有下界 $S(n) \geq q(n+1) - 2^q + 1$.

考慮數列 $< a_n >= 2^{n-1}$, 若有兩組數的差相等, 則有 $2^i - 2^j = 2^x - 2^y$, 而 $2^j(2^{i-j} - 1) = 2^y(2^{x-y} - 1)$, 從而 $i = x, j = y$, 兩組數完全相同, 得到矛盾. 因此數列中任兩項的差皆相異. 由此可以計算 $S(n)$ 的下界: 對於任意的 n, 當 $2^{q-1} \leq n < 2^q$ $(q \in \mathbb{N})$, 我們有以下關係:

$$S(n) \geq nq - \sum_{i=1}^{q}(2^{i-1} - 1)$$

整理得到 $S(n) \geq q(n+1) - 2^q + 1$ (定理 2.10).

參考文獻

[1] 李成章; 紅點問題的解法和新進展. 中等數學, 7, 16-20 (民95).

[2] 李建泉; 2002 年全國高中數學聯合競賽. 中等數學, 1, 28-29 (民92).

[3] 傅恆霖. 組合設計講義; 取自: `http://www.tmtc.edu.tw/~primary`.

[4] Roger Zarnowski; *From cyclic sums to projective planes*. The College Mathematical Journal, 4, 304-308 (2007).

[5] Daniel M. Gordon; *The prime power conjecture is true for* $n < 2,000,000$. Electronic J. Combinatorics 1, No. 1, R6, 1-7 (1994).

[6] Johan Kahrstrom; *On projective planes*. Härnösand: Mid Sweden University (2002).