

超阿波羅圓漣漪

黃立恒

國立新竹高級中學

Abstract

The Apollonius circles are graceful and historical. As I view them in a new perspective, I successfully figure out a transformation from the intersections of a plane and some Apollonius spheres to pencil of coaxial circles, and vice versa. By alternating one or both of the given points along different tracks, I have developed a variety of activated systems called super Apollonius circles. They, as well as the track of their hearts, are of distinct characters.

摘要: 阿波羅圓可能源於阿波羅尼奧斯對圓錐截痕的研究, 而我從原始的定義發展出一動點一定點和雙動點的超阿波羅圓系, 並發現了它們一些特別的性質.

1 研究簡介

在高二數學課本(許志農 [1]) 的例題之中, 我首次接觸阿波羅圓. 老師在課堂上的介紹, 讓我對這個主題產生了興趣, 想要再加以延伸. 我先查詢相關文獻以了解阿波羅圓(系)的重要性質, 如實驗本 [2] 證明了符合定義的動點軌跡為一圓, 並求得圓心位置(座標)和半徑長; 洪梓翔 [3] 探討了圓系隨距離比的變化情形, 也證明任一阿波羅圓為 A, B 兩點的鏡射圈.

在研究過程中, 我發現隨著平面的角度和位置不同, 可以和阿波羅球面系截出同心圓系或共軸圓系; 我也能將共軸圓系轉換成阿波羅球面系和平面的截痕.

另外, 藉由對阿波羅圓進行“動態化”的操作, 我定義了數種超阿波羅圓系. 本研究的主要目標是討論各型超阿波羅圓系及其圓心軌跡的幾何性質. 我的研究步驟是先觀察這些圓系的圖形, 再推導它們的方程式, 用解析方法證明觀察結果.

討論時, 我先從一個動點(動態化一次)的情形開始. 針對各類不同的圓系探討 A 點位置和 B 點軌跡兩個變因的影響. 至於兩個動點的情形, 我發現在特定的速度條件下, 其圓心軌跡為擺線類的曲線.

最後, 要特別感謝丘成桐中學數學獎提供的機會; 許燦煌老師的指導, 傅瑞琪, 吳思鋒兩位老師各方面的協助以及楊嘉鴻同學的參賽經驗分享.

2 文獻探討

顧及本研究的完整性, 收錄以下性質和證明.

2.1 阿波羅圓 (系) (整理自 [2] 和 [3])

定義 2.1. 設 $A(a_A, b_A), B(a_B, b_B)$ 為座標平面上兩定點, 定義滿足 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \sqrt{\alpha}$ ($\alpha > 0$) 的 P 點軌跡為 C_α .

性質 2.2. 當 $k = 1$ 時, C_1 為 \overline{AB} 的垂直平分線; 當 $k \neq 1$ 時, C_k 為一圓, 稱為阿波羅圓.

令

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2 = \frac{(x - a_A)^2 + (y - b_A)^2}{(x - a_B)^2 + (y - b_B)^2} = k$$

$$\Rightarrow C_k : (k - 1)x^2 + (k - 1)y^2 - 2(a_B k - a_A)x - 2(b_B k - b_A)y = -(a_B^2 + b_B^2)k + a_A^2 + b_A^2$$

當 $k \neq 1$ 時, C_k :

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{a_B k - a_A}{k - 1}\right)^2 + \left(y - \frac{b_B k - b_A}{k - 1}\right)^2 \\ &= \frac{(a_A^2 + b_A^2 + a_B^2 + b_B^2 - 2a_A a_B - 2b_A b_B)k}{(k - 1)^2} \\ &= \frac{\overline{AB}^2 \times k}{(k - 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

表示以 $D\left(\frac{a_B k - a_A}{k - 1}, \frac{b_B k - b_A}{k - 1}\right)$ 為圓心, $r_k = \frac{\overline{AB} \times \sqrt{k}}{|k - 1|}$ 為半徑的圓.

性質 2.3. 圓心隨 k 變化

阿波羅圓的圓心 D 在直線 \overline{AB} 上, 而且是在 $\overline{AD} : \overline{DB} = k : 1$ 的外分點上. 當 $k > 1$ 時, k 值愈大, 圓心愈靠近 B ; 當 $0 < k < 1$ 時, k 值愈小, 圓心愈靠近 A .

證明.

$$\overline{OD} = \left(\frac{a_B k - a_A}{k - 1}, \frac{b_B k - b_A}{k - 1}\right) = \left(a_B + \frac{a_B - a_A}{k - 1}, b_B + \frac{b_B - b_A}{k - 1}\right) = \overline{OB} + \frac{1}{k - 1} \overline{AB},$$

又

$$\overline{OD} = \left(\frac{a_B k - a_A}{k - 1}, \frac{b_B k - b_A}{k - 1}\right) = \left(a_A + \frac{k(a_A - a_B)}{1 - k}, b_A + \frac{k(b_A - b_B)}{1 - k}\right) = \overline{OA} + \frac{k}{1 - k} \overline{BA},$$

即 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \sqrt{k}$ 阿波羅圓的圓心 D 即是直線 \overline{AB} 上滿足 $\overline{AD} : \overline{DB} = k : 1$ 的外分點. 因

$$\overline{OD} = \overline{OB} + \frac{1}{k - 1} \overline{AB} = \overline{OA} + \frac{k}{1 - k} \overline{BA},$$

當 $k > 1$ 時, k 值愈大, $\frac{1}{k - 1}$ 愈小, 圓心愈靠近 B . 而 $0 < k < 1$ 時, k 值愈小, $\frac{k}{1 - k}$ 愈小, 圓心愈靠近 A . 當 $k \rightarrow \infty$ 時, 圓心 $D \rightarrow B$; 當 $k \rightarrow 0$ 時, 圓心 $D \rightarrow A$. \square

性質 2.4 (圓半徑隨 k 變化). $k > 1$ 時, k 值愈大, C_k 的半徑愈小; $0 < k < 1$ 時, k 值愈小, C_k 的半徑愈小, 而且 C_k 與 $C_{\frac{1}{k}}$ 半徑相等.

證明. 半徑 r_k ,

$$r_k^2 = \overline{AB}^2 \cdot \frac{k}{k^2 - 2k + 1} = \overline{AB}^2 \cdot \frac{1}{k - 2 + \frac{1}{k}} = \frac{\overline{AB}^2}{(k + \frac{1}{k}) - 2}.$$

設 $y = k + \frac{1}{k}$ ($k > 0$), 由算幾不等式得: $y = k + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{k \times \frac{1}{k}} = 2$, 而 $y = 2$ 時 $k = 1$, k 與 y 的關係如下圖:

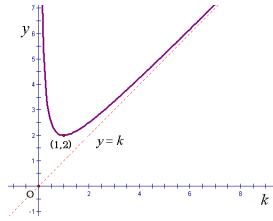


圖 1

當 $k > 1$ 時, k 值愈大, $(k + \frac{1}{k})$ 愈大, C_k 的半徑愈小. 同理, 當 $0 < k < 1$ 時, k 值愈小, $(k + \frac{1}{k})$ 愈大, C_k 的半徑愈小. 又

$$r_k = \overline{AB} \sqrt{\frac{k}{k^2 - 2k + 1}} = \overline{AB} \sqrt{\frac{1}{k - 2 + \frac{1}{k}}} = \frac{\overline{AB}}{|\sqrt{k} - \sqrt{\frac{1}{k}}|}.$$

因此, C_k 與 $C_{\frac{1}{k}}$ 半徑相等. □

性質 2.5. 任意一個阿波羅圓都是 A, B 兩點的鏡射圈.

證明. 設 C_k 為任一阿波羅圓, C 為過 A 且與 C_k 正交的圓, $D(\frac{a_B k - a_A}{k-1}, \frac{b_B k - b_A}{k-1})$ 為 C_k 的圓心.

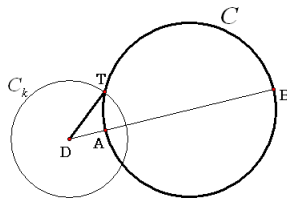


圖 2

$$\begin{aligned} \because \overline{DA} \times \overline{DB} &= \left| \frac{k}{1-k} \right| \cdot \overline{AB} \times \left| \frac{\overline{AB}}{k-1} \right| \\ &= \frac{\overline{AB}^2 k}{(k-1)^2} (\because k > 0) \\ &= r_k^2, \end{aligned}$$

又 C 與 C_k 正交, 所以 $r_k^2 = \overline{DT}^2$, 故 $\overline{DT}^2 = \overline{DA} \times \overline{DB}$ (T 為切點). 由圓幂定理逆定理知圓 C 過 B , 因此 A, B 對 C_k 鏡射. \square

性質 2.6. 所有過 A 且與任意一個阿波羅圓 C_k 正交的圓形成以 \overleftrightarrow{AB} 為根軸的共軸圓系.

證明. 由性質 2.5., 過 A 且和任意一個阿波羅圓正交的圓皆會通過 B 點. 因此, 它們形成以 \overleftrightarrow{AB} 為根軸的共軸圓系. 若以座標表示, 則有

$$[(x - a_A)(x - a_B) + (y - b_A)(y - b_B)] + t[(b_A - b_B)x - (a_A - a_B)y + (a_A b_B - b_A a_B)] = 0.$$

其中 $(x - a_1)(x - a_2) + (y - b_1)(y - b_2) = 0$ 表示以 \overline{AB} 為直徑的圓, 參數 $t \in \mathbb{R}$. 而 $(b_A - b_B)x - (a_A - a_B)y + (a_A b_B - b_A a_B) = 0$ 表示 \overleftrightarrow{AB} , 即根軸. 值得注意的是: 它與 k 值無關. \square

2.2 特殊的平面曲線 (整理自 [4])

定義 2.7. 外擺線的定義

將一個小圓沿著一個大圓的外部作沒有滑動的滾動. 滾動時, 小圓圓周上的每個定點所描繪的曲線稱為“外擺線”.

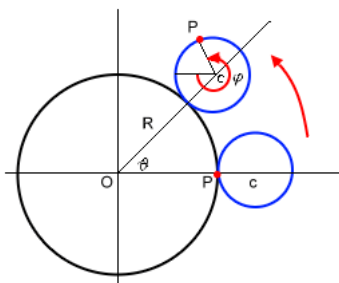


圖 3

性質 2.8. 外擺線的參數方程式

如圖 3, 設固定圓半徑為 R , 滾動圓半徑為 r . P 對 C 的相對座標 $(r \cos(\phi - \pi), r \sin(\phi - \pi)) = (-r \cos \phi, -r \sin \phi)$. C 對 O 的相對座標 $((R + r) \cos \theta, (R + r) \sin \theta)$; P 對 O 的

相對座標為 $((R+r)\cos\theta - r\cos\theta, (R+r)\sin\theta - r\sin\theta)$. 由弧長 $R\theta = r(\phi - \theta)$, 得 $R\theta = r\phi - r\theta \Rightarrow (R+r)\theta = r\phi \Rightarrow \phi = \frac{(R+r)}{r}\theta$.

外擺線的參數式

$$(x, y) = ((R+r)\cos\theta - r\cos\frac{(R+r)}{r}\theta, (R+r)\sin\theta - r\sin\frac{(R+r)}{r}\theta)$$

也可以寫成

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3 單動點的超阿波羅圓系

3.1 超阿波羅圓系的定義

定義 3.1. 對於一個阿波羅圓 C_α , 定義“動態化”的操作為將兩個定點之一沿著特定軌跡 Γ 移動, 使得 C_α 作相應的變化.

定義 3.2. 在距離比 \sqrt{k} (即 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$) 固定的條件下進行一次“動態化”的操作, 稱所得圓系為 Γ 上的 R_k 型超阿波羅圓系, 記為 $R_k(\Gamma)$.

說明. “動點沿著軌跡 Γ 移動時, k 值保持不變”是此型圓系的重要特徵, 故稱之為 R_k 型, 其中 R 代表距離比 (Ratio of distances).

定義 3.3. 設動點座標 (m, n) , 且函數 $g(x, y)$ 將點 (m, n) 對應到距離比 \sqrt{k} (即 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$). 在此條件下進行一次“動態化”的操作, 稱所得圓系為 Γ 上的 $R_{g(m,n)}$ 型超阿波羅圓系, 記做 $R_{g(m,n)}(\Gamma)$.

說明. 此型圓系為 R_k 型超阿波羅圓系的推廣, 藉由函數 $g(x, y)$ 使得距離比 R 隨著 B 點移動而改變, 故稱之為 $R_{g(m,n)}$ 型. 反過來說, R_k 型圓系是此型圓系的特例, 即取 $g(x, y)$ 為常數函數.

3.2 繪製超阿波羅圓系

用 GSP 繪製 R_k 型超阿波羅圓系的步驟如下:

1. 開啓新檔, 並作一定點以及動點所在圖形 Γ .
2. 過定點作一直線和 Γ 相交, 形成動點.
3. 利用工具列中的伸縮變換, 在直線上作出圓上一點和圓心.
4. 使用工具列中的構圖 \rightarrow 軌跡圖, 即可作出圓系或圓心的軌跡.

$R_{g(m,n)}$ 型超阿波羅圓系的作圖步驟和 R_k 型大致相同, 但作出定點, 圖形 Γ 和動點之後必須先輸出動點的座標 (m, n) , 經由函數 $g(x, y)$ 得到 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的值, 再計算伸縮變換的比例.

3.3 R 型超阿波羅圓系的方程式

本節推導 R 型超阿波羅圓系和其圓心軌跡的方程式輔助後續的證明. 首先, 設 A 點和 B 點座標分別為 $(a_A, b_A), (a_B, b_B)$, 由性質 2.3 知圓心 D 的座標可表示為 $(\frac{ka_B - a_A}{k-1}, \frac{kb_B - b_A}{k-1})$. 若令其為 (a', b') , 則有

$$a_B = \frac{k-1}{k}a' + \frac{a_A}{k}, \quad b_B = \frac{k-1}{k}b' + \frac{b_A}{k}.$$

不失一般性令 B 點為動點, 沿著函數 $b = f(x)$ 的軌跡移動, 代入可得

$$\frac{k-1}{k}b' + \frac{b_A}{k} = f\left(\frac{k-1}{k}a' + \frac{a_A}{k}\right),$$

即

$$b' = \left(\frac{k}{k-1}\right)f\left(\frac{k-1}{k}a' + \frac{a_A}{k}\right) - \frac{b_A}{k-1}. \quad (1)$$

承上述討論, 將 A 點, B 點座標和 $r_k = \frac{\sqrt{k}}{k-1}AB$ 代入 R_k 型超阿波羅圓系

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = r_k^2,$$

可得

$$\left(x - \frac{ka_B - a_A}{k-1}\right)^2 + \left(y - \frac{kb_B - b_A}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{k}}{k-1}\right)^2 \left[(a_B - a_A)^2 + (b_B - b_A)^2\right].$$

展開得

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{k-1}(ka_B - a_A) - \frac{2y}{k-1}(kb_B - b_A) + \frac{k(a_B^2 + b_B^2) - (a_A^2 + b_A^2)}{k-1} = 0,$$

再將 (a_B, b_B) 代換為 $(a_B, f(a_B))$ 可得

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{k-1}(ka_B - a_A) - \frac{2y}{k-1}(kf(a_B) - b_A) + \frac{k(a_B^2 + f(a_B)^2) - (a_A^2 + b_A^2)}{k-1} = 0. \quad (2)$$

將 (1) 和 (2) 中的 k 以 $g(a_B, f(a_B))$ 代入, 得到 $R_g(m, n)$ 型超阿波羅圓系的圓心軌跡和圓系方程式:

$$b' = \left(\frac{g(a_B, f(a_B))}{g(a_B, f(a_B)) - 1}\right)f\left(\frac{g(a_B, f(a_B)) - 1}{g(a_B, f(a_B))}a' + \frac{a_A}{g(a_B, f(a_B))}\right) - \frac{b_A}{g(a_B, f(a_B)) - 1}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{2x}{g(a_B, f(a_B)) - 1}(g(a_B, f(a_B)))a_B - a_A \\ - \frac{2y}{g(a_B, f(a_B)) - 1}(g(a_B, f(a_B)))f(a_B) - b_A \\ + \frac{g(a_B, f(a_B))(a_B^2 + f(a_B)^2 - (a_A^2 + b_A^2))}{g(a_B, f(a_B)) - 1} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

3.4 單動點超阿波羅圓系的幾何性質

引理 3.4. 對一 C_α 的兩定點 A, B 分別以 $\frac{PA}{PB} = \sqrt{k}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 進行動態化, 得到 $R_k(\Gamma)_A$ 和 $R_{\frac{1}{k}}(\Gamma)_B$, 兩者經過平移可以完全重合.

說明. 作圖時, 我是先複製 $R_k(\Gamma)_A$, 再將 A, B 的名稱對調且取 $\frac{PA}{PB}$ 為倒數. 因此, 作出的 $R_{\frac{1}{k}}(\Gamma)_B$ 經過平移可以和 $R_k(\Gamma)_A$ 完全重合. 因此, 在以下的證明過程中, 不失一般性, 令動點為 B 點.

性質 3.5. 保守性

當動點的軌跡是一個函數圖形, R_k 型超阿波羅圓系的圓心軌跡為一個同類型的函數圖形.

證明. 承 4.2.1 節, 令 B 點為動點, 沿著函數 $b = f(x)$ 的軌跡移動, 推得圓心軌跡如 (1) 式, 為 $f(x)$ 經過平移和伸縮而得. 平移不會影響函數的種類, 又此式對 x 軸和 y 軸伸縮的比例相等, 只會讓圖形放大或縮小, 也不會影響函數的類型. \square

性質 3.6. 移動性

定點位置不影響 R_k 型超阿波羅圓系的圓心軌跡形狀.

證明. 定點 A 的位置影響了其座標, 即 (1) 式中的 a_A 和 b_A . 而這兩項對圖形的影響都是改變平移量的大小, 因此不會影響圖形的形狀. \square

引理 3.7. 若動點沿一直線 (線段) 移動, 則 R_k 型超阿波羅圓系的圓心軌跡為一平行動點軌跡的直線 (線段).

證明. 對於一般的直線, 可設其方程式為 $b = f(x) = cx + d$. $c = 0$ 時, $f(x) = d$, (1) 式可化簡為 $b = \frac{k}{k-1}d - \frac{b_A}{k-1}$, 其圖形為一水平線. $c \neq 0$ 時, $f(x) = cx + d$, (1) 式化簡為

$$b = cx + \frac{ca_A + kd - b_A}{k-1},$$

其圖型為一平行 $y = f(x)$ 的斜直線.

而若 B 點在鉛直線 $x = x_0$ 上, 則可設其座標為 (x_0, t) , $t \in \mathbb{R}$. 那麼 D 點座標可表示成 $(\frac{kx_0 - a_A}{k-1}, \frac{kt - b_A}{k-1})$, $t \in \mathbb{R}$, 其軌跡為一鉛直線.

若將上述討論中的變數 x 和 t 的範圍限制在一個閉區間內, 便可以使 B 點在直線的一部分, 即一線段上移動. 經由相似的討論過程, 即可證得相同的結論. \square

定理 3.8. 若動點軌跡是一多邊形或圓, R_k 型超阿波羅圓系的圓心軌跡和原軌跡相似.

證明. 此證明過程較長, 我先以三角形的例子做代表. 設 A 在 $\triangle EFG$ 內部, 我將 $\triangle EFG$ 分割成 $\overline{EF}, \overline{EG}, \overline{FG}$ 三線段, 如圖 4.

由引理 3.7, $\overline{EF}, \overline{EG}, \overline{FG}$ 會分別對應到 $\overline{E'F'}, \overline{E'G'}, \overline{F'G'}$ 三線段, 此三線段會形成一個封閉三角形. 由於此三線段的伸縮比例相同且分別平行原三角形的各邊, 故形成的三角形和原三角形相似.

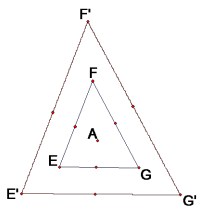


圖 4

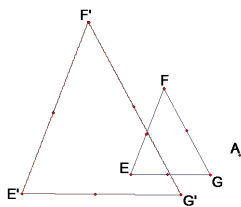


圖 5

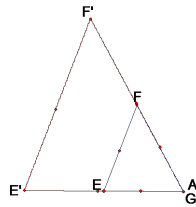


圖 6

而 A 點在圖形上和圖形外的情形由性質 3.6 即可確定圓心軌跡和原三角形相似, 如圖 4. 圖中咖啡色的是圓心軌跡, 其他顏色的是原圖形.

相同的切割技巧可以應用到任意多邊形, 如圖:

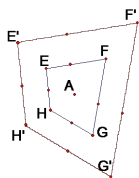


圖 7

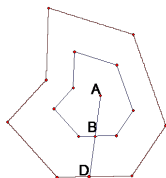


圖 8

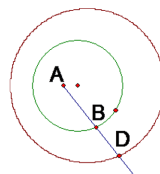


圖 9

因為圓是正 N 邊形的極限情形, 所以上述討論對它們也成立. □

4 雙動點的超阿波羅圓系

4.1 定義雙動點的超阿波羅圓系

從單動點超阿波羅圓系的定義, 可以直接推廣出下列定義 4.1 - 4.3.

定義 4.1. 對於一個阿波羅圓 C_α , 定義“雙重動態化”操作為使兩定點分別沿著特定軌跡 Γ_1, Γ_2 做等速率運動, 使得 C_α 作相應的變化.

定義 4.2. 在距離比 \sqrt{k} (即 $\frac{PA}{PB}$) 固定的條件下進行一次“雙重動態化”操作, 稱所得圓系為 Γ_1, Γ_2 上的 R_k 型超阿波羅圓系, 記為 $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

定義 4.3. 設動點座標 (m, n) , 且函數 $g(x, y)$ 將點 (m, n) 對應到距離比 \sqrt{k} (即 $\frac{PA}{PB}$). 在此條件下進行一次“雙重動態化”操作, 稱所得圓系為 Γ_1, Γ_2 上的 $R_g(m, n)$ 型超阿波羅圓系, 記做 $R_{g(m,n)}(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

4.2 修正繪圖方法

由於 4.06 版的 GSP 不能用一個軌跡圖和動點再作軌跡圖, 因此繪圖方法的第四步驟“使用工具列中的構圖 \rightarrow 軌跡圖作出圓系或圓心的軌跡”必須修正成: 選擇顯示圓系或圓心的軌跡, 再選擇兩個動點進行動態模擬.

4.3 方程式的推廣

令 A 點也沿著函數 $b = h(a)$ 的軌跡移動, 代入 4.2.1 小節各式可得:

Γ_1, Γ_2 上的 R_k 型超阿波羅圓系圓心軌跡方程式

$$b' = \left(\frac{k}{k-1}\right)f\left(\frac{k-1}{k}a' + \frac{a_A}{k}\right) - \frac{h(a_A)}{k-1}.$$

Γ_1, Γ_2 上的 R_k 型超阿波羅圓系方程式

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{k-1}(ka_B - a_A) - \frac{2y}{k-1}(kf(a_B) - h(a_A)) + \frac{k(a_B^2 + f(a_B)^2 - (a_A^2 + h(a_A)^2))}{k-1} = 0.$$

Γ_1, Γ_2 上的 $R_g(m, n)$ 型超阿波羅圓系圓心軌跡方程式

$$b' = \left(\frac{g(a_B, f(a_B))}{g(a_B, f(a_B)) - 1}\right)f\left(\frac{g(a_B, f(a_B)) - 1}{g(a_B, f(a_B))}a' + \frac{a_A}{g(a_B, f(a_B))}\right) - \frac{h(a_A)}{g(a_B, f(a_B)) - 1}.$$

Γ_1, Γ_2 上的 $R_g(m, n)$ 型超阿波羅圓系方程式

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{2x}{g(a_B, f(a_B)) - 1}(g(a_B, f(a_B))a_B - a_A) \\ - \frac{2y}{g(a_B, f(a_B)) - 1}(g(a_B, f(a_B))f(a_B) - h(a_A)) \\ + \frac{g(a_B, f(a_B))(a_B^2 + f(a_B)^2) - (a_A^2 + h(a_A)^2)}{g(a_B, f(a_B))a_B - 1} = 0. \end{aligned}$$

4.4 雙動點超阿波羅圓系的幾何性質

開始討論雙動點的情形後, 它們之間的速度關係便開始顯得重要, 因此必須推導下列引理, 其中 D 點為阿波羅圓的圓心, $\alpha = \sqrt{k}$, M 點為 \overline{AB} 上滿足 $\frac{MA}{MB} = \alpha$ 的分點, 而 \vec{v}_{ij} 為 i 點相對於 j 點的速度向量。

引理 4.4.

$$\vec{v}_{DA} = \frac{k}{k-1}\vec{v}_{BA}; \quad \vec{v}_{DB} = \frac{-1}{k-1}\vec{v}_{AB}; \quad \vec{v}_{MB} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{v}_{AB}; \quad \vec{v}_{MA} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{v}_{BA}.$$

證明. (只列出第一式的圖)

i 點相對於 j 點的速度向量是由和 j 點一起移動的觀察者所測量, 對他來說, 只有 i 點在移動. 由引理 4.8, 若動點沿一線段移動, 則 D 點的軌跡為一平行動點軌跡的線段 (M 點同理), 因此可構成圖中的相似三角形, 推得下列速率比, 和動點軌跡本身是否平行無關; 方向則是直接觀察所得. \square

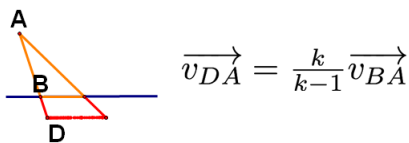


圖 10

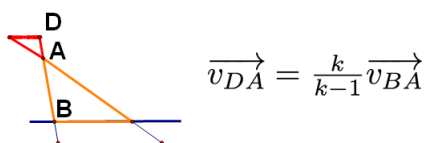


圖 11

4.4.1 兩平行直線

定義在一組平行直線 L_1, L_2 上的超阿波羅圓系具有下列性質:

性質 4.5. 當 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 為定值 \sqrt{k} 且 $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, 則 $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2)$ 中的所有圓半徑均相同, 且其圓心軌跡為一平行 L_1, L_2 的直線.

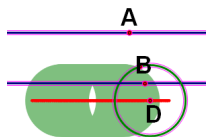


圖 12

證明. 在上述條件中, A, B 兩質點間沒有相對運動, 所以 \overline{AB} 的長度固定. 又距離比固定為 \sqrt{k} , 依圓半徑 $r_k = \frac{\sqrt{k}}{|1-k|} \overline{AB}$, $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2)$ 中所有圓的半徑均相同. 由引理 4.4, $\vec{v}_D = \frac{k}{k-1} \vec{v}_B - \frac{1}{k-1} \vec{v}_A$. 當 $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, 圓心 D 速度為 $\frac{k}{k-1} \vec{v}_B - \frac{1}{k-1} \vec{v}_A = \vec{v}_A$, 因此其軌跡為一平行 L_1, L_2 的直線. \square

性質 4.6. 當 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 為定值 \sqrt{k} 且 $\vec{v}_A = k\vec{v}_B$, R_k 型超阿波羅圓系中的所有圓有相同的圓心.

證明. 由引理 4.4, $\vec{v}_D = \frac{k}{k-1} \vec{v}_B - \frac{1}{k-1} \vec{v}_A$. 將 $\vec{v}_A = k\vec{v}_B$ 代入上式即可得 $\vec{v}_D = 0$. \square

引理 4.7. 當 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 為定值 \sqrt{k} 且 $\vec{v}_A = -\sqrt{k}\vec{v}_B$, \overline{AB} 上滿足 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \sqrt{k}$ 的點 M 為一不動點.

證明. 由引理 4.4, $\vec{v}_M = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \vec{v}_A + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \vec{v}_B$. 將 $\vec{v}_A = -\sqrt{k}\vec{v}_B$ 代入上式即可得 $\vec{v}_M = 0$. \square

引理 4.8. 承引理 4.7, 過 M 點作垂直 L_1, L_2 的直線交 $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2)$ 中的任意一圓於 N , 則 N 點也是一個不動點.

證明. 因為 \overrightarrow{MN} 垂直於 A, B 的移動軌跡 (即 L_1, L_2), 所以 N 點的移動速度和 M 點相同. $\vec{v}_M = 0$ 時 M 點不動, N 點也不動. 換句話說, M 點不動而 N 點動會使 \overrightarrow{MN} 不垂直 L_1, L_2 . \square

引理 4.9. 反向之共點圓

承引理 4.7, 4.8, $R_k(L_1, L_2)$ 中的所有圓交於引理中所述 M, N 兩點.

證明. 因為 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \sqrt{k}$, 所以 M 點落在阿波羅圓上; 又 N 點落在阿波羅圓上為已知. 由引理 4.7 和 4.8 知 M, N 點為不動點, 所以 $R_k(L_1, L_2)$ 中的所有圓交於此兩點. \square

定理 4.10. 兩平行直線上的共軸圓系

設過 M 和 N 的所有圓形成共軸圓系 C_S , 則 $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2) = C_S$.

證明. 由引理 4.9, $R_k(L_1, L_2)$ 中的所有圓交於 M, N 兩點, 因此 $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2) \subseteq C_S$. 而若在 C_S 上取一圓, 此圓的圓心落在 \overline{MN} 的中垂線上, 且會過 M, N 兩點, 故此圓 $\in R_k(\Gamma_1, \Gamma_2)$, 即 $C_S \subseteq R_k(\Gamma_1, \Gamma_2)$, 證得 $R_k(\Gamma_1, \Gamma_2) = C_S$. \square

4.4.2 一直線(兩重合直線)

若使 L_2 和 L_1 重合為 L , 性質 4.5 中的圓心軌跡也會是 L . 性質 5.6, 5.7 依然成立; N 點實際上和 M 點重合, 因此引理 5.8 和 5.7 等價. 而引理 5.9 修正為“ $R_k(L_1, L_2)$ 中的所有圓相切於該點”. 定理 5.10 仍成立, 只是此時 C_S 為相切而非相交的共軸圓系, 根軸為通過該點和 L 垂直的直線.

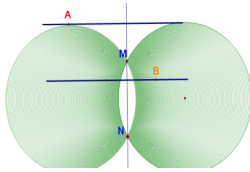


圖 13. 兩平行直線上的共軸圓系

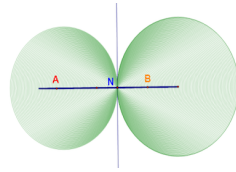


圖 14. 兩重合直線上的共軸圓系

4.4.3 兩相交直線

承引理 4.7, 若動點軌跡為兩相交直線, 且速度向量 \vec{v}_A 和 \vec{v}_B 的夾角 $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. 當兩質點的速率比 $\frac{v_A}{v_B} = k \sec \phi$, 圓心軌跡垂直於 B 點的軌跡.

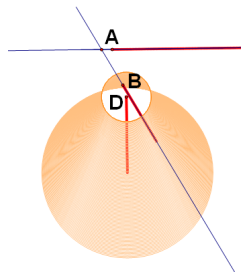


圖 15

證明. 將 \vec{v}_D 拆成 \vec{v}_A 方向和垂直 \vec{v}_A 方向的兩個分量, 分別以 $\vec{v}_{D//A}$ 和 $\vec{v}_{D\perp A}$ 表示. 由引理 4.4,

$$\begin{aligned}\vec{v}_D &= \frac{k}{k-1}\vec{v}_B - \frac{1}{k-1}\vec{v}_A \\ &= \frac{k}{k-1}(\vec{v}_{B//A} + \vec{v}_{B\perp A}) - \frac{1}{k-1}\vec{v}_A \\ &= \frac{1}{k-1}(k\vec{v}_{B//A} - \vec{v}_A) + \frac{k}{k-1}\vec{v}_{B\perp A} \\ &= \vec{v}_{D//A} + \vec{v}_{D\perp A}.\end{aligned}$$

若 $\frac{v_A}{v_B} = k \cos \phi$, $\vec{v}_A = k\vec{v}_{B//A}$. 代入可得 $\vec{v}_{D//A} = 0$, \vec{v}_D 只剩下垂直於 \vec{v}_A 的分量. \square

4.4.4 兩動點在同一圓上

性質 4.11. 對於定圓 C_0 上的雙動點超阿波羅圓系, 其圓心軌跡為 C_0 的外擺線若且為若 $\frac{v_A}{v_B} = k = \left(\frac{PA}{PB}\right)^2$, $k \neq 1$, 且兩動點旋轉方向相同.

證明. 定義 2.7 為外擺線的定義, 性質 2.8 描述了它的參數方程式具有

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

的形式, 而且一個該形式的參數方程式恰對應到半徑為 $|a|$ 的固定圓和其半徑為 $|b|$ 的滾動圓所形成的外擺線. 以下證明當且僅當兩動點的速率比滿足上述條件時, 給定系統的圓心軌跡方程式具有性質 2.9 的形式.

不失一般性令 $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $A(\cos(\lambda\theta), \sin(\lambda\theta))$ 為單位圓上的動點. 此假設代表 A 的角速度 $\vec{\omega}_A = \lambda \vec{\omega}_B$ 的角速度, 且同時由 $(1,0)$ 出發. 因為 A, B 在同一圓上, 所以 $|\lambda| = \frac{v_A}{v_B}$. 由性質 2.3 知 D 點座標為

$$\left(\frac{k \cos \theta - \cos(\lambda\theta)}{k-1}, \frac{k \sin \theta - \sin(\lambda\theta)}{k-1} \right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

取 $a = 1$, 則 $b = \frac{1}{k-1}$. 若 $\lambda \neq \frac{a+b}{b} = \frac{1+\frac{1}{k-1}}{\frac{1}{k-1}} = k$, 則參數方程式不滿足性質 2.9 的形式. 由於 $k > 0$, 因此 $\lambda > 0$, 即兩動點旋轉方向相同.

另外, 在外擺線的尖點處, 由於 $\frac{v_A}{v_B} = k$ 且兩動點旋轉方向相同, 所以 $\vec{v}_A = k\vec{v}_B$ 由引理 4.4, $\vec{v}_D = \frac{k}{k-1}\vec{v}_B - \frac{1}{k-1}\vec{v}_A = 0$. 即外擺線上的動點在尖點的速度為零. \square

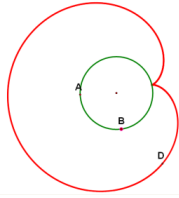


圖 16. $K = 2$ 的外擺線, 俗稱心臟線

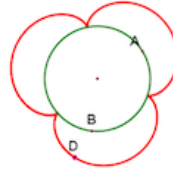


圖 17. $K = 4$ 的外擺線, 有三拱

附錄

設 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ 為兩固定點電荷, A 和 B 帶異性電且 A 的電量是 B 的電量的 $\sqrt{\alpha}$ 倍, 則阿波羅圓 C_α 上的任意一點 P 均滿足電位為零.

說明. 在物理學上, 電位的定義是單位正電荷在電場中的某一個位置所具有的電位能. 若電場的場源是單一點電荷, 電位可表示成:

$$V = \frac{kQ}{r}.$$

式中的 V 為電位, k 為庫倫常數, Q 為場源的電量 (有正負), r 為該點和場源的距離. 而題設的系統為 A 和 B 兩個點電荷的組合, 某一點的電位由 A 和 B 共同決定. 不妨假設 B 點帶負電, 對於座標平面上滿足 $\frac{PA}{PB} = \sqrt{\alpha}$ 的任意 P 點都有:

$$V_p = \frac{kQ_A}{r_A} - \frac{kQ_B}{r_B} = \frac{kQ_B}{r_B} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right) = 0.$$

反之, 解 $V_p = 0$ 可得

$$\frac{PA}{PB} = \sqrt{\alpha} \quad \text{或} \quad r_A, r_B \rightarrow \infty.$$

所以在有限的距離內, 只有 C_α 上的點電位為零.

參考文獻

- [1] 許志農, 黃森山等編; 《高級中學數學第三冊》, 龍騰文化.
- [2] 《高中數學實驗教材第四冊》, 高中數學實驗教材編輯小組, 國立編譯館, 中華民國七十三年一月.
- [3] 洪梓翔, 萬原府; 《阿波羅圓漣漪》, 中華民國第四十八屆中小學科學展覽會.
- [4] 趙文敏; 《幾何學中的海倫-擺線及其他》, 科學月刊第二十卷第十一, 十二期.