多邊形鏡射性質之探討

林毓暄

台北市立建國高級中學

Abstract

Given an N-polygon and a point P, using this N-polygon's each side as the axis of symmetry with the point P being mirrored we get the new N points. These new N points form a new N-polygon and we call this action the mirror transformation.

In this project we discuss iterations of the mirror transformation, in particular the relationship between the new N-polygon and the original given one. I found that the N-th N-polygon and the original one is similar to each other with a fixed ratio.

摘要: 給定一個 N 邊形和任意一點 P, 以此 N 邊形各邊所在的直線分別為對稱軸, 將 P 點作鏡射後, 可以得到新的 N 個點, 這新的 N 個點可以構成一個新的 N 邊形, 這個動作我們稱為"鏡射變換 ".

本研究主要是探討作了 N 次鏡射變換後所形成的新 N 邊形和原先給定的 N 邊形之間的關係, 我們發現當重複此動作 N 次後, 得到的第 N 個 N 邊形會和原先給定的 N 邊形相似, 而且比值為定值.

1 簡介

1.1 動機

在一次的數學課上, 老師偶然的提到三角形的鏡射變換: 給定一個三角形和一點 P, 將 P 點以三角形 ABC 各邊為對稱軸做鏡射後, 可得到的新的三個點, 這三點可構成新的三角形 DEF, 這稱為一次鏡射變換, 再以 P 點對三角形 DEF 做一次鏡射變換, 又得到另一新的三角形 GHI, 以此類推. 我發現當做了三次鏡射變換後, 得到的三角形會和原先的三角形相似. 而且當 P 點在特殊位置時, 變換後得到的三角形會有退化成直線的情形. 另外, 當把所有鏡射變換後的三角形放在一起時, 在某些情況下會形成一個螺旋狀的圖形如圖 1, 或者形成一些特別的圖形, 這些特別的性質引起我的興趣, 所以我想要深入的研究它.

1.2 研究主題與參考資料

關於之前的研究成果只找到第六屆旺宏科學獎林耿任同學的作品"三角形的鏡射變換", 但是他鏡射的方法和我不一樣, 因此參考價值不高. 而本次研究主要是研究一點對多邊形鏡

射變換後的情形, 證明當任意 N 邊形鏡射過 N 次後會和原多邊形相似, 找出它們之間相似的比例關係, 並找出一次鏡射後為凹多邊形或凸邊形的原因.

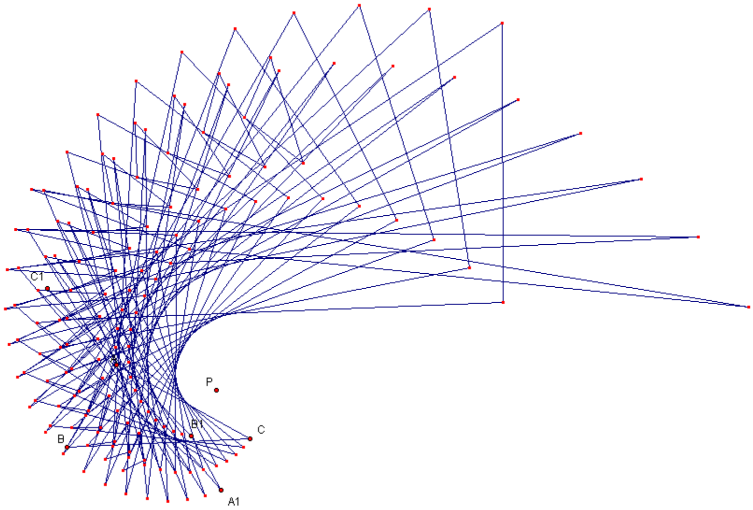

圖 1

1.3 研究方法

首先利用鏡射三角形會和垂足三角形相似, 再利用垂足三角形的四點共圓性質來證明: 當 P 點在三角形內部時經過三次鏡射變換後的新三角形會和原三角形相似, 又以相同的方法來證明 P 點在原三角形外部時, 鏡射變換後的三角形, 發現角度變換的關係和之前不同, 因此無法單純的使用四點共圓, 在此又加上了正弦定理來證明此現象.

當邊數大於等於四以上且 P 點在內部時, 本來使用和三角形一樣的方法. 但是發現凸四邊形鏡射後可能會變成凹四邊形, 這和原先的假設不同. 因此衍生出用角度旋轉的概念來證明.

1.4 符號定義

設原來 N 邊形為 $A_1^1A_2^1A_3^1\cdots A_N^1$, 把第 M 次變換的垂足 N 邊形稱為 $A_1^{M+1}A_2^{M+1}A_3^{M+1}\cdots A_N^{M+1}$. 其中 P 對 $A_J^KA_{J+1}^K$ 的垂足為 A_J^{K+1}; 其中 P 對 $A_{J+1}^KA_{J+2}^K$ 的垂足為 A_{J+1}^{K+1}; 其中 P 對 $A_N^KA_1^K$ 的垂足為 A_N^{K+1}, 如圖 2.

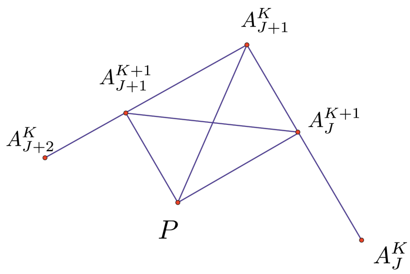

圖 2

2 研究內容

2.1 當 P 點在三角形的內部時性質和當 P 點在三角形外部的性質不同, 所以首先探討當 P 點在多邊形內部時的狀況

2.1.1 證明三角形鏡射後的性質

1. 鏡射變換後的三角形與垂足三角形相似, 一次鏡射變換後的三角形是第一垂足三角形以 P 點為中心, 做位似變換, 放大兩倍後的結果; 二次鏡射變換後的三角形是第二垂足三角形以 P 點為中心, 做位似變換, 放大四倍後的結果; 同理 n 次鏡射變換後的三角形是第 n 垂足三角形以 P 點為中心, 做位似變換, 放大 2^n 倍後的結果. 所以我們得知若欲證明原三角形和做三次鏡射變換後的三角形相似, 可改為證明原三角形和第三垂足三角形相似.

2. 設三角形 $A_1A_2A_3$ 的第一垂足三角形為 $B_1B_2B_3$,第二垂足三角形為 $C_1C_2C_3$,第三垂足三角形為 $D_1D_2D_3$, 如圖 3 所示. 藉由四點共圓的性質我們可以證明第三垂足三角形與原三角形相似, 證明如下:

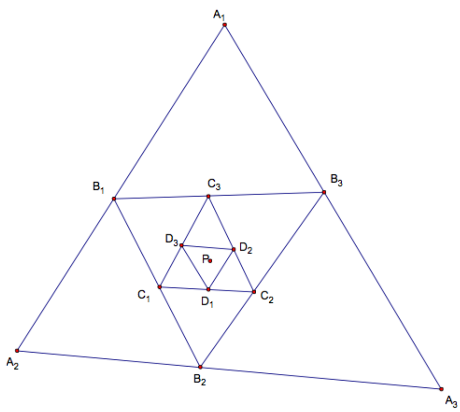

圖 3

$$\angle PA_1A_3 = \angle PB_1B_3 \ (P, A_1, B_3, B_1 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PB_1B_3 = \angle PC_1C_3 \ (P, C_1, B_1, C_3 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PC_1C_3 = \angle PD_1D_3 \ (P, D_1, C_1, D_3 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$

$$\therefore \angle PA_1A_3 = \angle PD_1D_3$$

$$\angle PA_1A_2 = \angle PB_3B_1 \ (P, A_1, B_3, B_1 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PB_3B_1 = \angle PC_2C_3 \ (P, C_2, B_3, C_3 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PC_2C_3 = \angle PD_1D_2 \ (P, C_2, D_1, D_2 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$

$$\therefore \angle PA_1A_2 = \angle PD_1D_2$$

$$\begin{aligned} \text{故} \angle A_2A_1A_3 &= \angle PA_1A_3 + \angle PA_1A_2 \\ &= \angle PD_1D_3 + \angle PD_1D_2 \\ &= \angle D_2D_1D_3. \end{aligned}$$

$$\angle PA_3A_1 = \angle PB_2B_3 \ (P, B_2, B_3, A_3 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PB_2B_3 = \angle PC_1C_2 \ (P, C_2, B_2, C_1 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PC_1C_2 = \angle PD_3D_1 \ (P, D_1, C_1, D_3 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$

$$\therefore \angle PA_3A_1 = \angle PD_3D_1$$

$$\angle PA_3A_2 = \angle PB_3B_2 \ (P, B_2, B_3, A_3 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PB_3B_2 = \angle PC_3C_2 \ (P, B_3, C_3, C_2 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$
$$\angle PC_3C_2 = \angle PD_3D_2 \ (P, C_3, D_3, D_2 \text{ 四點共圓, 對等弧})$$

$$\therefore \angle PA_3A_2 = \angle PD_3D_2$$

$$\begin{aligned} \text{故} \angle A_2A_3A_1 &= \angle PA_3A_1 + \angle PA_3A_2 \\ &= \angle PD_3D_1 + \angle PD_3D_2 \\ &= \angle D_2D_3D_1, \end{aligned}$$

所以 $\triangle A_1A_2A_3$ 相似於 $\triangle D_1D_2D_3$.

2.2 當 P 點在三角形之外時的狀況

2.2.1 證明三角形鏡射後的性質

1. 當 P 點在外部時, 進行一次鏡射變換的性質和 P 點在內部時不同, 所以無法用相同的證法講明.

2. 當 P 點在三角形外部時, 有兩種情形, 一種是在 P 點在區域 I 的時候, 另一種是在 P 點在區域 II 的時候, 如圖 4 所示.

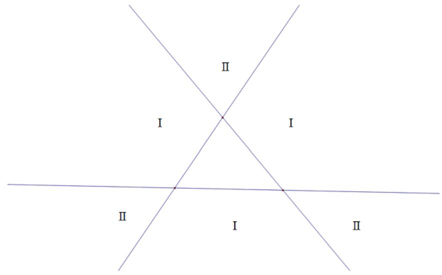

圖 4

所以我們將證明 P 點在區域 I 的時候和 P 點在區域 II 的時候, 可以獲得相同的結果.

3. 探討 P 點在區域 I 時, 第一垂足三角形 $A_1^2A_2^2A_3^2$ 和原三角形 $A_1^1A_2^1A_3^1$ 角度的關係:

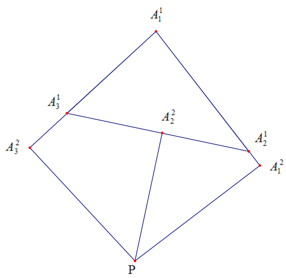

圖 5

如圖 5 所示,

$$
\begin{aligned}
\angle PA_1^1A_2^1 &= \angle PA_3^2A_1^2 \ (P, A_1^1, A_1^2, A_3^2 \text{ 四點共圓}) \\
\angle PA_1^1A_3^1 &= \angle PA_1^2A_3^2 \ (P, A_1^1, A_1^2, A_3^2 \text{ 四點共圓}) \\
\angle PA_2^1A_1^1 &= 180^\circ - \angle PA_2^2A_1^2 \ (P, A_2^1, A_1^1, A_1^2 \text{ 四點共圓}) \\
\angle PA_2^1A_3^1 &= \angle PA_1^2A_2^2 \ (P, A_2^1, A_1^1, A_1^2 \text{ 四點共圓}) \\
\angle PA_3^1A_1^1 &= 180^\circ - \angle PA_2^2A_3^2 \ (P, A_3^1, A_2^2, A_3^2 \text{ 四點共圓}) \\
\angle PA_3^1A_2^1 &= \angle PA_3^2A_2^2 \ (P, A_3^1, A_2^2, A_3^2 \text{ 四點共圓})
\end{aligned}
$$

由上面關係可以知道, 當 P 點在三角形外面時, 令 K, I 為任意正整數, 則 $\angle PA_{I-1}^KA_I^K$ 不一定等於 $\angle PA_{I-2}^{K+1}A_{I-1}^{K+1}$, $\angle PA_{I+1}^KA_I^K$ 也不一定等於 $\angle PA_{I+1}^{K+1}A_I^{K+1}$. 所以我們無法用解 P 點在三角形內部的方法, 解 P 點在三角形外部的情況.

4. 探討 P 點在區域 II 時, 第一垂足三角形 $A_1^2A_2^2A_3^2$ 和原三角形 $A_1^1A_2^1A_3^1$ 的關係:

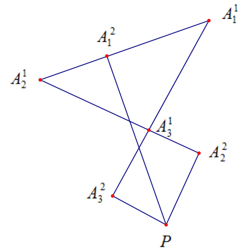

圖 6

如圖 6 所示,

$$\begin{aligned}
180^\circ - \angle PA_1^1A_2^1 &= \angle PA_3^2A_1^2 \ (P, A_1^1, A_1^2, A_3^2 \text{ 四點共圓})\\
\angle PA_1^1A_3^1 &= \angle PA_1^2A_3^2 \ (P, A_1^1, A_1^2, A_3^2 \text{ 四點共圓})\\
180^\circ - \angle PA_2^1A_1^1 &= \angle PA_2^2A_1^2 \ (P, A_2^1, A_1^1, A_1^2 \text{ 四點共圓})\\
\angle PA_2^1A_3^1 &= \angle PA_1^2A_2^2 \ (P, A_2^1, A_2^2, A_1^2 \text{ 四點共圓})\\
180^\circ - \angle PA_3^1A_1^1 &= \angle PA_2^2A_3^2 \ (P, A_3^1, A_2^2, A_3^2 \text{ 四點共圓})\\
180^\circ - \angle PA_3^1A_2^1 &= \angle PA_3^2A_2^2 \ (P, A_3^1, A_2^2, A_3^2 \text{ 四點共圓})
\end{aligned}$$

由上面關係可以知道 P 點在區域 II 時, 角度關係和 P 點在區域 I 時不同, 所以 P 點在三角形外部時不能透過單純的角度關係來證明.

5. P 點在三角形外部時, 角度的關係式:

   藉由上面求出來的關係式, 我發現角度的關係和 P 點在三角形內部的不同, 在於有可能變成補角, 所以只要在 P 點在三角形內部的關係式前加上 sin 即可.

   令 K, I 為任意正整數,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sin\angle A_{I-1}^K A_I^K P = \sin\angle A_{I-1}^{K+1} A_I^{K+1} P\\
&\Rightarrow \sin\angle A_{I+1}^K A_I^K P = \sin\angle A_I^{K+1} A_{I-1}^{K+1} P
\end{aligned}$$

   因為四邊形 $A_I^K A_I^{K+1} P A_{I-1}^{K+1}$ 四點共圓, 所以

$$\sin\angle A_I^{K+1} P A_{I-1}^{K+1} = \sin\angle A_{I+1}^K A_I^K A_{I-1}^K.$$

   因為在原三角形 $A_1^1A_2^1A_3^1$ 中,

$$\frac{PA_1^1}{PA_3^1} = \frac{\sin\angle PA_3^1A_1^1}{\sin\angle PA_1^1A_3^1},\ \frac{PA_3^1}{PA_2^1} = \frac{\sin\angle PA_2^1A_3^1}{\sin\angle PA_3^1A_2^1},\ \frac{PA_2^1}{PA_1^1} = \frac{\sin\angle PA_1^1A_2^1}{\sin\angle PA_2^1A_1^1},$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{PA_1^1}{PA_3^1} \times \frac{PA_2^1}{PA_1^1} \times \frac{PA_3^1}{PA_2^1} \\
&\quad = \frac{\sin \angle PA_3^1A_1^1}{\sin \angle PA_1^1A_3^1} \times \frac{\sin \angle PA_2^1A_3^1}{\sin \angle PA_3^1A_2^1} \times \frac{\sin \angle PA_1^1A_2^1}{\sin \angle PA_2^1A_1^1} \\
&\Rightarrow \sin PA_3^1A_1^1 \times \sin PA_2^1A_3^1 \times \sin PA_1^1A_2^1 \\
&\quad = \sin \angle PA_1^1A_3^1 \times \sin \angle PA_3^1A_2^1 \times \sin \angle PA_2^1A_1^1.
\end{aligned}
$$

6. P 點在三角形外部時的證明:

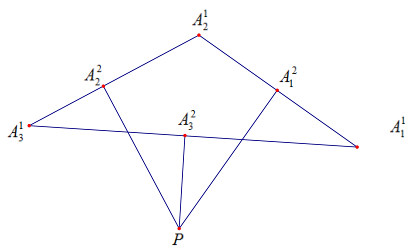

圖 7

$$
\begin{aligned}
\frac{A_1^4A_2^4}{A_2^4A_3^4} &= \frac{A_1^4A_2^4}{PA_2^4} \times \frac{PA_2^4}{A_2^4A_3^4} = \frac{\sin \angle A_2^4PA_1^4}{\sin \angle A_2^4PA_3^4} \times \frac{\sin \angle A_2^4A_3^4P}{\sin \angle A_2^4A_1^4P} \\
&= \frac{\sin \angle A_3^3A_2^3A_1^3}{\sin \angle A_2^3A_3^3A_1^3} \times \frac{\sin \angle A_2^3A_3^3P}{\sin \angle A_3^3A_2^3P} = \frac{A_3^3A_1^3}{A_2^3A_1^3} \times \frac{\sin \angle A_2^1A_3^1P}{\sin \angle A_2^1A_1^1P},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_3^3A_1^3}{A_1^3A_2^3} &= \frac{A_3^3A_1^3}{PA_1^3} \times \frac{PA_1^3}{A_2^3A_1^3} \\
&= \frac{\sin \angle A_2^2A_1^2A_3^2}{\sin \angle A_2^2A_1^2P} \times \frac{\sin \angle A_1^2A_2^2P}{\sin \angle A_3^2A_2^2P} = \frac{A_2^2A_3^2}{A_3^2A_1^3} \times \frac{\sin \angle A_1^1A_2^1P}{\sin \angle A_3^1A_2^1P},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_2^2A_3^2}{A_3^2A_1^3} &= \frac{A_2^2A_3^2}{PA_3^2} \times \frac{PA_3^2}{A_3^2A_1^2} \\
&= \frac{\sin \angle A_2^1A_3^1A_1^1}{\sin \angle A_2^1A_1^1A_3^1} \times \frac{\sin \angle A_3^1A_1^1P}{\sin \angle A_1^1A_3^1P} = \frac{A_2^1A_1^1}{A_2^1A_3^1} \times \frac{\sin \angle A_3^1A_1^1P}{\sin \angle A_1^1A_3^1P},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{A_1^4A_2^4}{A_2^4A_3^4} &= \frac{A_3^3A_1^3}{A_2^3A_1^3} \times \frac{\sin\angle A_2^1A_3^1P}{\sin\angle A_2^1A_1^1P} \\
&= \frac{A_2^2A_3^2}{A_3^2A_1^3} \times \frac{\sin\angle A_1^1A_2^1P}{\sin\angle A_3^1A_2^1P} \times \frac{\sin\angle A_2^1A_3^1P}{\sin\angle A_2^1A_1^1P} \\
&= \frac{A_2^1A_1^1}{A_2^1A_3^1} \times \frac{\sin\angle A_3^1A_1^1P}{\sin\angle A_1^1A_3^1P} \times \frac{\sin\angle A_1^1A_2^1P}{\sin\angle A_3^1A_2^1P} \times \frac{\sin\angle A_2^1A_3^1P}{\sin\angle A_2^1A_1^1P} \\
&= \frac{A_2^1A_1^1}{A_2^1A_3^1},
\end{aligned}
$$

三對應邊成比例, 所以三角形 $A_1^1A_2^1A_3^1$ 與三角形 $A_1^4A_2^4A_3^4$ 相似, 即第三鏡射三角形與原三角形相似, 見圖 7.

2.3 P 點在凸多邊形內部時鏡射後的性質

2.3.1 P 點在鏡射後的多邊形內部

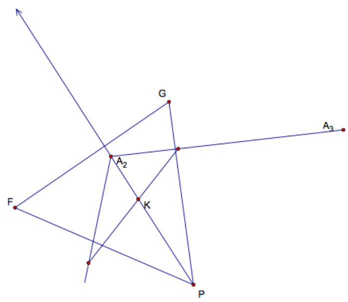

圖 8

如圖 8, 射線 PA_2 對鏡射後的新多邊形, 假如有除了 K 之外的其他交點, 設交點所屬的邊為 FG, 因為 FG 為相鄰的兩垂足, 所以 $\angle GPF$ 中間不可能有點存在, 故矛盾, 所以假設錯誤.

2.3.2 凸多邊形可以鏡射出凹多邊形

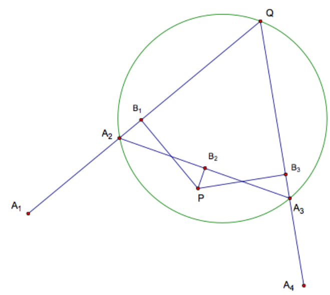

圖 9

先給出凸多邊形的四點 A_1, A_2, A_3, A_4 和由 P 點對三邊所作的垂足 B_1, B_2, B_3 以及 A_1A_2 和 A_3A_4 的交點 Q, 因為 P 點在凸多邊形的內部, 所以 $\angle PB_2B_1 = \angle PA_2A_1$ (P, B_2, B_1, A_2 四點共圓), 以及 $\angle PB_2B_3 = \angle PA_3A_4$ (P, B_2, B_3, A_3 四點共圓), 因為 P 點在凸多邊形內部, 所以當 $\angle PB_2B_1 + \angle PB_2B_3 > 180°$ 時鏡射出的四邊形就會變成凹多邊形.

$$
\begin{aligned}
&\text{若} \angle PB_2B_1 + \angle PB_2B_3 > 180°, \\
&\text{則} \angle PA_3A_4 + \angle PA_2A_1 > 180°, \\
&\Rightarrow \angle PA_2Q + \angle PA_3Q < 180° \\
&\Rightarrow \angle A_2QA_3 + \angle A_2PA_3 > 180°.
\end{aligned}
$$

只要 P 點在三角形 A_2, Q, A_3 的外接圓內部, 鏡射出的多邊形即為凹多邊形.

2.3.3 只有平行四邊形無法鏡射出凹多邊形

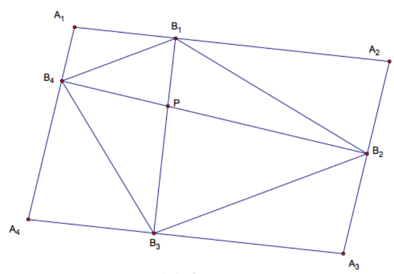

圖 10

如圖 10,

$$\angle PB_2B_1 + \angle PB_2B_3 = \angle PA_2A_1 + \angle PA_3A_4,$$

因為 A_2A_1 平行於 A_3A_4, 所以

$$\angle PA_2A_1 + \angle PA_3A_4 < \angle A_3A_2A_1 + \angle A_2A_3A_4 = 180^\circ,$$

所以平行四邊形鏡射不出凹多邊形.

假如 A_2A_1 不平行於 A_3A_4 則兩邊相交, 藉由之前的證明可以找到一點, 使其鏡射出形成凹多邊形, 所以若要不能鏡射出凹多邊形則 A_2A_1 要平行於 A_3A_4.

若原多邊形邊數大於六, 則 $A_2A_1 \parallel A_3A_4 \parallel A_5A_6$. 因為若有三邊平行, 則一定有一邊,在其兩側存在相異兩頂點, 但因為凸邊形的定義中不能有一個邊把頂點分成相異兩側, 所以邊數大於六的凸多邊形, 必存在一點使其對原多邊形鏡射後的圖形為凹多邊形.

若是五邊形時 $A_5A_1 \parallel A_2A_3 \parallel A_4A_5$, 所以 $A_5A_1 \parallel A_4A_5$, 此和原多邊形為五邊形矛盾, 所以除了平行四邊形外, 邊數大於四之凸邊形, 都可以鏡射出凹多邊形.

2.3.4 凸多邊形鏡射後的圖形不會相交

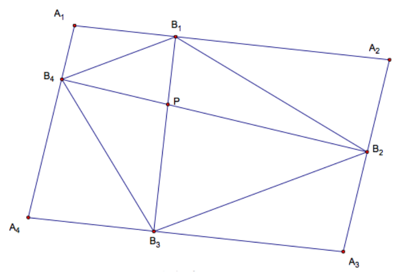

圖 11

因為 P 點在凸多邊形內部時,

$$\begin{aligned}
&\angle PA_3A_2 = \angle PB_3B_2, \quad \angle PA_2A_3 = \angle PB_1B_2, \quad \angle PA_2A_1 = \angle PB_2B_1,\\
&\angle PA_1A_2 = \angle PB_4B_1, \quad \angle PA_1A_4 = \angle PB_1B_4, \quad \angle PA_4A_1 = \angle PB_3B_4,\\
&\angle PA_4A_3 = \angle PB_4B_3, \quad \angle PA_3A_4 = \angle PB_2B_3,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\angle PB_1B_2 + \angle PB_2B_1 + \angle PB_3B_2 + \angle PB_2B_3\\
&\quad + \angle PB_1B_4 + \angle PB_4B_1 + \angle PB_4B_3 + \angle PB_3B_4 = 360^\circ,
\end{aligned}$$

故 $\angle B_1B_2B_3 + \angle B_2B_3B_4 + \angle B_3B_4B_1 + \angle B_4B_1B_2 = 360^\circ$, 見圖 11, 而當兩邊相交後,

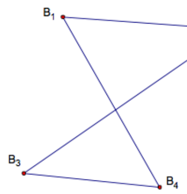

圖 12

明顯 $\angle B_1B_2B_3 + \angle B_2B_3B_4 + \angle B_3B_4B_1 + \angle B_4B_1B_2$ 不等於 $360°$, 所以凸多邊形鏡射後的邊長不會相交, 見圖 12.

2.4 證明 N 邊形鏡射後的性質

1. 同理, 根據 2.1.1 的結果, 我們一樣可以發現, 鏡射變換後的 N 邊形和垂足 N 邊形是以 P 點為中心, 做位似變換的結果, 所以我們只要證明第 N 個垂足 N 邊形和原 N 邊形相似就好.

2. 在 N 邊形 $(N \geq 4)$ 時, 因為無法使用正弦定理, 所以之前三角形的相關證明時, 所利用的方法無法使用.

3. 因為 $A_I^K A_{I-1}^{K+1} A_I^{K+1} P$ 四點共圓, $\sin\angle A_{I-1}^K A_I^K P = \sin\angle A_{I-1}^{K+1} A_I^{K+1} P$ 仍然成立, 同理 $\sin\angle A_{I+1}^K A_I^K P = \sin\angle A_I^{K+1} A_{I-1}^{K+1} P$.

4. 假如有一 K 邊形 P 點在外部和它鏡射 K 次的 K 邊形角度關係為:
$$\sin\angle A_{I+1}^{K+1} A_I^{K+1} P = \sin\angle A_{I+2}^{K} A_{I+1}^{K+1} P = \cdots = \sin\angle A_{I+K+1}^{1} A_{I+K}^{1} P,$$
因為是 K 邊形所以 $\sin\angle A_{I+K+1}^{1} A_{I+K}^{1} P = \sin\angle A_{I+1}^{1} A_I^{1} P$,
$$\sin\angle A_I^{K+1} A_{I+1}^{K+1} P = \sin\angle A_I^K A_{I+1}^K P = \cdots = \sin\angle A_I^1 A_{I+1}^1 P.$$

5. 因為
$$\frac{PA_{I+1}^{K+1}}{PA_I^{K+1}} = \frac{\sin\angle A_{I+1}^{K+1} A_I^{K+1} P}{\sin\angle A_I^{K+1} A_{I+1}^{K+1} P} = \frac{\sin\angle A_{I+1}^{1} A_I^{1} P}{\sin\angle A_I^{1} A_{I+1}^{1} P} = \frac{PA_{I+1}^1}{PA_I^1},$$
同理
$$\frac{PA_1^{K+1}}{PA_1^1} = \frac{PA_2^{K+1}}{PA_2^1} = \frac{PA_3^{K+1}}{PA_3^1} = \cdots = \frac{PA_{I+1}^{K+1}}{PA_{I+1}^1}.$$

2.5 旋轉後的角度關係

(以下角度都有方向性, $\angle ABC$ 表示以射線 BA 為始邊旋轉至射線 BC 所旋轉, 順時針旋轉方向為負, 逆時針為旋轉方向為正.)

2.5.1 當角度為鈍角時

如圖 13, 當 $\angle A_3A_2P$ 大於 90° 時, 設 $\angle A_3A_2P$ 為 X° (以射線 A_2A_3 為始邊旋轉至射線 A_2P), 則 $\angle A_2PB_2$ 為 $(90-X)^\circ$ (以射線 PA_2 為始邊旋轉至射線 PB_2).

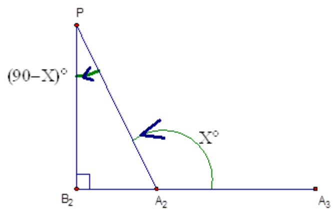

圖 13

2.5.2 當角度為銳角時

如圖 14, 當 $\angle A_3A_2P$ 小於 90° 時, 設 $\angle A_3A_2P$ 為 X°, 則 $\angle A_2PB_2$ 為 $(90-X)^\circ$.

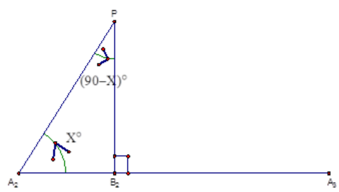

圖 14

2.5.3 四點共圓時

如圖 15, 因為 $PA_1^2A_2^2A_2^1$ 四點共圓, 所以 $\angle PA_1^2A_2^2 = \angle PA_2^1A_2^2$, 所以 $\angle A_1^2PA_1^3 = \angle A_2^1PA_2^2$, 同理 $\angle A_1^1PA_1^2 = \angle A_n^2PA_n^3 = \angle A_{n-1}^3PA_{n-1}^4 = \cdots = \angle A_3^{n-1}PA_2^n$.

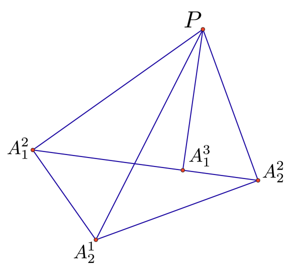

圖 15

2.5.4 鏡射 n 次後旋轉的角度

$$\Rightarrow \angle A_1^1PA_1^{n+1} = \angle A_1^1PA_1^2 + \angle A_1^2PA_1^3 + \cdots + \angle A_1^nPA_1^{n+1},$$
$$\Rightarrow \angle A_1^1PA_1^{n+1} = \angle A_1^1PA_1^2 + \angle A_2^1PA_2^2 + \cdots + \angle A_n^1PA_n^2,$$

同理

$$\Rightarrow \angle A_k^1PA_k^{n+1} = \angle A_1^1PA_1^2 + \angle A_2^1PA_2^2 + \cdots + \angle A_n^1PA_n^2,$$

所以每點旋轉的角度都一樣, 因為

$$\frac{PA_1^{K+1}}{PA_1^1} = \frac{PA_2^{K+1}}{PA_2^1} = \frac{PA_3^{K+1}}{PA_3^1} = \cdots\cdots = \frac{PA_{I+1}^{K+1}}{PA_{I+1}^1},$$

所以新 N 邊形是原 N 邊形, 以 P 點為中心作位似旋轉變換, 故原 N 邊形和新 N 邊形相似.

2.6 N 邊形鏡射 N 次後和其自身的面積比例

2.6.1 探討三角形的相似比例

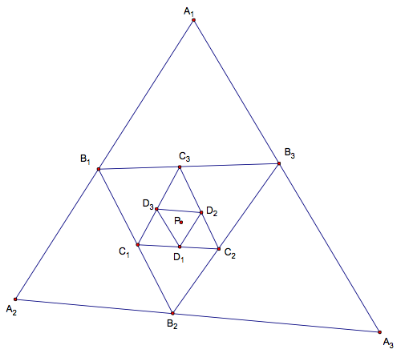

圖 16

如圖 16, $\triangle A_1A_2A_3$ 相似於 $\triangle D_1D_2D_3$, $\triangle PA_1A_2$ 相似於 $\triangle PD_1D_2$,

$$\begin{aligned}\frac{\triangle D_1D_2D_3}{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{\triangle PD_1D_2}{\triangle PA_1A_2} &= \left(\frac{PD_1}{PA_1}\right)^2 = \left(\frac{PC_1 \times \sin(\angle PC_1D_1)}{PA_1}\right)^2\\ &= \left(\frac{PC_1 \times \sin(\angle PA_3A_1)}{PA_1}\right)^2\\ &= \left(\frac{PB_1 \times \sin(\angle PB_1C_1) \times \sin(\angle PA_3A_1)}{PA_1}\right)^2\\ &= \left(\frac{PA_1 \times \sin(\angle PA_1B_1) \times \sin(\angle PA_2A_3) \times \sin(PA_3A_1)}{PA_1}\right)^2\end{aligned}$$

$$= \left(\sin(\angle PA_1A_2) \times \sin(\angle PA_2A_3) \times \sin(\angle PA_3A_1)\right)^2$$
$$= \left(\frac{PB_1 \times PB_2 \times PB_3}{PA_1 \times PA_2 \times PA_3}\right)^2.$$

此為原三角形與第三垂足三角形的比例, 所以三次鏡射後的三角形與原三角形面積的比例就是

$$\left(\frac{PB_1 \times PB_2 \times PB_3}{PA_1 \times PA_2 \times PA_3}\right)^2 \times 64 = \left(8\frac{PB_1 \times PB_2 \times PB_3}{PA_1 \times PA_2 \times PA_3}\right)^2.$$

2.6.2 探討四邊形的相似比例

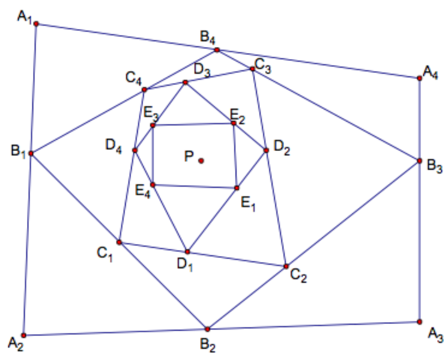

圖 17

如圖 17, 原四邊形和第四垂足四邊形的邊長比為

$$\frac{PE_1}{PA_1} = \frac{PD_1 \times \sin(\angle PD_1E_1)}{PA_1}$$
$$= \frac{PC_1 \times \sin(\angle PC_1D_1) \times \sin(\angle PA_4A_1)}{PA_1}$$
$$= \frac{PB_1 \times \sin(\angle PB_1C_1) \times \sin(\angle PA_3A_4) \times \sin(\angle PA_4A_1)}{PA_1}$$
$$= \frac{PA_1 \times \sin(\angle PA_1B_1) \times \sin(\angle PA_2A_3) \times \sin(\angle PA_3A_4) \times \sin(\angle PA_4A_1)}{PA_1}$$
$$= \sin(\angle PA_1A_2) \times \sin(\angle PA_2A_3) \times \sin(\angle PA_3A_4) \times \sin(\angle PA_4A_1)$$
$$= \frac{PB_1 \times PB_2 \times PB_3 \times PB_4}{PA_1 \times PA_2 \times PA_3 \times PA_4}$$

$$\frac{\text{四邊形 } E_1E_2E_3E_4}{\text{四邊形 } A_1A_2A_3A_4} = \left(2^4\frac{PB_1 \times PB_2 \times PB_3 \times PB_4}{PA_1 \times PA_2 \times PA_3 \times PA_4}\right)^2.$$

2.6.3 探討 N 邊形的相似比例

因為原 N 邊形和第 N 垂足 N 邊形相似, 所以面積比等於邊長比的平方. 因為 $\angle PA_1^N A_1^{N-1} = 90^\circ$, 所以

$$\begin{aligned}
&\frac{PA_1^N}{PA_1^1} = \frac{PA_1^{N-1} \times \sin\angle PA_1^{N-1}A_1^N}{PA_1^1} \\
&\Rightarrow \frac{PA_1^{N+1}}{PA_1^1} = \frac{PA_1^N \times \sin\angle PA_1^{N-1}A_1^N}{PA_1^1} \\
&= \frac{PA_1^{N-2} \times \sin\angle PA_1^{N-1}A_1^N \times \sin\angle PA_1^{N-2}A_1^{N-1}}{PA_1^1} \\
&= \frac{PA_1^{N-3} \times \sin\angle PA_1^{N-1}A_1^N \times \sin\angle PA_1^{N-2}A_1^{N-1} \times \sin\angle PA_1^{N-3}A_1^{N-2}}{PA_1^1} \\
&= \cdots = \frac{PA_1^1 \times \sin\angle PA_1^{N-1}A_1^N \times \sin\angle PA_1^{N-2}A_1^{N-1} \times \cdots \times \sin\angle PA_1^1A_2^1}{PA_1^1} \\
&= \frac{PA_1^1 \times \sin\angle PA_{N-1}^1A_N^1 \times \sin\angle PA_{N-2}^1A_{N-1}^1 \times \cdots \times \sin\angle PA_1^1A_2^1}{PA_1^1} \\
&= \frac{PA_1^2 \times PA_2^2 \times PA_3^2 \times \cdots \times PA_N^2}{PA_1^1 \times PA_2^1 \times PA_3^1 \times \cdots \times PA_N^1}.
\end{aligned}$$

所以 N 邊形面積相似的比例

$$\left(2^N \times \frac{PA_1^2 \times PA_2^2 \times PA_3^2 \times \cdots \times PA_N^2}{PA_1^1 \times PA_2^1 \times PA_3^1 \times \cdots \times PA_N^1}\right)^2.$$

參考文獻

[1] 林耿任 (民 96),《三角形的鏡射變換》, 第六屆旺宏科學獎, 未出版, 台北市.

[2] 蕭振綱 (民 94),《幾何變換》, 上海市: 華東師範大學出版社.