一集合中任兩數乘積
與完全平方數間關係之探討

李彥佘

臺北市立建國高級中學

Abstract

The property of square numbers and how they consist is always one of the focal points in number theoritical researches. In this project, I will study the relation between "the product of any two numbers that belong to a set of natural numbers" and "square numbers". Surprisingly, I discover that the problem has a close relationship with Fibonacci sequence, which is often obeyed in nature. To be specific, the ultimate goal of this project is to find all of the sets of natural numbers $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ to make $p_i p_j + k$, $\forall 1 \leq i < j \leq n$ and $k \in \mathbb{Z}$, to be a square number (or to prove that it's impossible to find the answer with the given (n, k)).

The problem is too complicate for me to find all the solutions in a short time. Nevertheless, partial solutions under the situations below have been found so far: $(n, k) = (3, -1)$, $(3, 1)$ or $(4, 1)$. Besides, all the solutions of $(n, k) = (3, 1)$ lead to solutions of $(n, k) = (4, 1)$ and the minimum solutions for $n = 3$.

摘要: 完全平方數之特性及其組成方式一直是數論的研究重點之一, 本研究計畫針對一組正整數中的任二數之乘積與完全平方數之關係進行一系列之研究. 令人驚奇的是, 我發現此問題與自然界中常遵循的費氏數列之規律有相當密切的關係. 具體而言, 本研究的終極目標為找出所有的正整數集合 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 使其任二數 p_i 及 p_j 之乘積加上某一給定整數 k 均為一完全平方數, 亦即對所有的 $1 \leq i < j \leq n$, $p_i p_j + k$ 均為一完全平方數並證明之 (或證明給定的 n, k 無法找到解答).

本問題極為複雜, 我在短時間內並無法找出所有解, 然本研究目前已找出如下情況的部分解答: $(n, k) = (3, -1)$, $(3, 1)$ 及 $(4, 1)$. 另發現了所有的 $(n, k) = (3, 1)$ 解均可推展到 $(n, k) = (4, 1)$ 的解以及當 $n = 3$ 時的最小解.

1 簡介

1.1 研究動機

在一次班上數學課討論 IMO 題目時, 解到一道題目 (IMO1986-1), 題述如下:

Let d be any positive integer not equal to 2, 5 or 13. Show that one can find distinct a, b in the set $\{2, 5, 13, d\}$ such that $ab - 1$ is not a perfect square.

(中譯: 設 d 是異於 2, 5, 13 的任意正整數, 求證在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到兩相異元素 a,b 使得 $ab-1$ 不是完全平方數.)

此問題並不難解, 很快的, 我就發現此題目等價於「設 d 是異於 2, 5, 13 的任意正整數, 證明: $2d-1, 5d-1, 13d-1$ 不可能全為完全平方數」. 因此我用了反證法來證明, 亦即假設: $2d-1=a^2, 5d-1=b^2, 13d-1=c^2$, 由 $2d-1=a^2$ 明顯可知 a 為奇數, 可由此導出 d 亦為奇數, 然後將 d 代入後二式並將其相減後發現 d 竟為一個偶數. 由此我們得到了一個矛盾, 亦即原題得證.

然而在題目的前半段, 我們可以得到 $\{2,5,13\}$ 這個集合滿足了任兩相異元素 a,b 均有 $ab-1$ 為完全平方數之特性, 因此我想如果可以找出具有這種特性之整數集合的規律應是一個有趣的問題.

1.2 符號説明

1. 定義 F_n 代表費氏數列的第 n 項, $n \geq 0$. $F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.
2. 定義 $D_n(k)$ 代表可滿足下列特性之 n 元素組 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$.
   (a) 當 $i<j$, $p_i<p_j$.
   (b) 對於所有的 $i \neq j$, p_ip_j+k 均為完全平方數. 例如 $\{2,5,13\}$ 就是一個 $D_3(-1)$ 的解.

1.3 研究成果

1. 目前找到的 $D_3(-1)$ 的解有:
   (a) $\{F_{2n-1}, F_{2n+1}, F_{2n+3}\}$.
   (b) $\{1, a^2+1, (a+1)^2+1\}$.
2. 目前找到的 $D_3(1)$ 的解有:
   (a) $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}\}$.
   (b) $\{k, \frac{(ka-(k-1))^2-1}{k}, \frac{(ka+1)^2-1}{k}\}$.
   (c) $\{k, \frac{(ka-1)^2-1}{k}, \frac{(ka+(k-1))^2-1}{k}\}$.
3. 目前找到的 $D_4(1)$ 的解有:
   (a) $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}, 4F_{2n-1}F_{2n}F_{2n+1}\}$.
   (b) $\{k, \frac{(ka-k+1)^2-1}{k}, \frac{(ka+1)^2-1}{k}, \frac{[2(ka-k+1)(ka+1)-1]^2-1}{k}\}$.
4. $D_3(f(f+2)+t)$ 的最小解為 $\{1, 2(f+2)-t, 4(f+2)+1-t\}$, 其中 $0 \leq t \leq 2f+2$, $t, f \in \mathbb{Z}$.

5. 當 $\{p_1,p_2,p_3\}$ 是一組 $D_3(1)$ 的解時, 必定可以找到一個 p_4, 使得 $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ 為一組 $D_4(1)$ 的解, 而這個 p_4 就等於 $2ABC+2p_1p_2p_3+\sum p_1$, 其中 $A=\sqrt{p_1p_2+1}$, $B=\sqrt{p_1p_3+1}$, $C=\sqrt{p_2p_3+1}$.

6. 當 $D_4(k)$ 的 $k\neq 2(\bmod 4)\wedge k\neq 3,5,8,12,20, k>0$ 時, $D_4(k)$ 至少有一組解.

2 研究過程與定理證明

2.1 $D_3(-1)$ 與 $D_3(1)$ 的解

引理 2.1. $F_{2n-1}F_{2n+1}-1=F_{2n}^2$ 為完全平方數.

證明. (這是周知的費氏數列的基本性質.)

1. 當 $n=1$ 時, $F_1F_3-1=1\times 2-1=1=F_2^2$, 顯然成立.

2. 假設當 $n=t$ 時結論成立, 即 $F_{2t}^2=F_{2t-1}F_{2t+1}-1$, 因此

$$\begin{aligned}
&(F_{2t+2}-F_{2t+1})^2=(F_{2t+1}-F_{2t})F_{2t+1}-1\\
&\quad\Leftrightarrow F_{2t+2}^2-2F_{2t+1}F_{2t+2}+F_{2t+1}^2=F_{2t+1}^2-(F_{2t+2}-F_{2t+1})F_{2t+1}-1\\
&\quad\Leftrightarrow F_{2t+2}^2=F_{2t+1}^2+F_{2t+2}F_{2t+1}-1=F_{2t+3}F_{2t+1}-1,
\end{aligned}$$

即當 $n=t+1$ 時結論亦成立, 故由數學歸納法知 $F_{2n-1}F_{2n+1}-1=F_{2n}^2$. □

引理 2.2. $F_{2n-2}F_{2n+1}+1=F_{2n-1}^2$ 為完全平方數.

證法同上, 故省略.

特例 1. 找出 $D_3(-1)$ 的解, 一開始以代數字的方法得到下列幾組解: $\{1,2,5\}$, $\{2,5,13\}$, $\{5,13,34\}$, $\{13,34,89\}$.

p_1	p_2	p_3	$\sqrt{p_1p_2-1}$	$\sqrt{p_1p_3-1}$	$\sqrt{p_2p_3-1}$
1	2	5	1	2	3
2	5	13	3	5	8
5	13	34	8	13	21
13	34	89	21	34	55

表 1

注意到: $\{1,2,5\}$, $\{2,5,13\}$, $\{5,13,34\}$, $\{13,34,89\}$ 這四組中所有的數都是費氏數列的第奇數項, 於是猜測 $\{F_{2n-1},F_{2n+1},F_{2n+3}\}$ 為一組解.

首先由引理 2.1 可得知 $F_{2n-1}F_{2n+1}-1$ 及 $F_{2n+1}F_{2n+3}-1$ 均為完全平方數. 接著我們再利用費氏數列遞迴式證明 $F_{2n-1}F_{2n+3}-1$ 為完全平方數: 由於 $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$,

$$\begin{aligned}
F_{2n-1}\cdot F_{2n+3}-1 &= (F_{2n+1}-F_{2n})(F_{2n+1}+F_{2n+2})-1\\
&= F_{2n+1}^2 + F_{2n+1}F_{2n+2} - F_{2n}F_{2n+1} - (F_{2n}F_{2n+2}+1)\\
&= F_{2n+1}^2 + F_{2n+1}^2 - F_{2n+1}^2 = F_{2n+1}^2,
\end{aligned}$$

其中我們用到了引理 2.2, 故我們得到了以下定理:

定理 2.3. $\{F_{2n-1}, F_{2n+1}, F_{2n+3}\}$ 為一組 $D_3(-1)$ 的解.

特例 2. 既然 $\{F_{2n-1}, F_{2n+1}, F_{2n+3}\}$ 為一組解, 於是我想到: $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}\}$ 是否也為一組 $D_3(-1)$ 解呢? 經過類似的方法驗證, 發現 $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}\}$ 這組雖不是 $D_3(-1)$ 的解, 但它們是一組 $D_3(1)$ 的解.

定理 2.4. $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}\}$ 為一組 $D_3(1)$ 的解.

證法同上, 但先用引理 2.2 再用引理 2.1. 細節省略.

特例 3. 找出 $D_3(-1)$ 的解, 注意到 $\{1,2,5\}$, $\{1,5,10\}$, $\{1,10,17\}$, $\{1,17,26\}$ 這幾組.

p_1	p_2	p_3	$\sqrt{p_1p_2-1}$	$\sqrt{p_1p_3-1}$	$\sqrt{p_2p_3-1}$
1	2	5	1	2	3
1	5	10	2	3	7
1	10	17	3	4	13
1	17	26	4	5	21

表 2

從表 2 注意到這幾組的 $\sqrt{p_1p_2-1}$ 依序為 $1,2,3,4,\cdots$, 而 $\sqrt{p_1p_3-1}$ 依序為 $2,3,4,5,\cdots$, 於是我猜測: $\{1, a^2+1, (a+1)^2+1\}$ 是一種 $D_3(-1)$ 的解答. 這顯然只需驗證 $p_2\times p_3-1$ 是否為完全平方數即可: $(a^2+1)(a^2+2a+2)-1 = a^4+2a^3+3a^2+2a+1 = (a^2+a+1)^2$. 故猜測成立.

前面提到: $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}\}$ 是 $D_3(1)$ 的一組解, 恰和 $\{F_{2n-1}, F_{2n+1}, F_{2n+3}\}$ 是 $D_3(-1)$ 的一組解成對稱的關係, 於是我想到: 也許 $\{1, a^2+1, (a+1)^2+1\}$ 也存在一種對稱的解, 於是我以同樣方法驗證了前面的結果, 果然得到它是一組 $D_3(1)$ 的解.

特例 4. $D_3(1)$ 的解, $p_1 = 2$: 既然 $\{1, a^2-1, (a+1)^2-1\}$ 是一組 $D_3(1)$ 解, 我很自然的想到: 如果最小的那個數不是 1, 那麼仍然有類似的規則嗎? 經過前述的方法後, 又得到了最小數是 2 的幾組解, 如表 3 所示:

由表不難看出每一組的 $\sqrt{p_1p_2-1}$ 的依序是 $3,5,7,9,\cdots$, 而 $\sqrt{p_1p_3-1}$ 依序是 $5,7,9,11,\cdots$, 因此我猜測: $\{2, \frac{(2a-1)^2-1}{2}, \frac{(2a+1)^2-1}{2}\}$ 亦為一組解. 直接計算果然得到 $\frac{(2a-1)^2-1}{2}\frac{(2a+1)^2-1}{2}+1 = (2a^2-1)^2$.

p_1	p_2	p_3	$\sqrt{p_1p_2+1}$	$\sqrt{p_1p_3+1}$	$\sqrt{p_2p_3+1}$
2	4	12	3	5	7
2	12	24	5	7	17
2	24	40	7	9	31
2	40	60	9	11	49

表 3

關於 $D_3(1)$ 的解, $p_1 = 2$ 有一些規律之後, 那 3 或 4 甚至更大的數有沒有規律呢? 經過了一些嘗試我找到了 $p_1 = t$ 的一組解:

定理 2.5. $\{t, \frac{(ta-(t-1))^2-1}{t}, \frac{(ta+1)^2-1}{t}\}$ 為一組 $D_3(1)$ 的解.

證明. 直接計算:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(ta-(t-1))^2-1}{t}\frac{(ta+1)^2-1}{t}+1\\
&=\frac{(ta-t)(ta-t+2)(ta)(ta+2)+t^2}{t^2}\\
&=\frac{(t^2a^2+ta(-t+2)+(-2t))(t^2a^2+ta(-t+2))+t^2}{t^2}\\
&=(ta^2+a(-t+2)+(-1))^2.
\end{aligned}
$$

□

和定理 2.5 類似, 但注意到當 $p_1 = t$ 時, p_2 都是 $\frac{(ta-1)^2-1}{t}$ 的形式, 而 p_3 也都是 $\frac{(ta+(t-1))^2-1}{t}$ 的形式, 這是否也為一組解呢? 同樣的方法可以驗證得到:

定理 2.6. $\{t, \frac{(ta-1)^2-1}{t}, \frac{(ta+(t-1))^2-1}{t}\}$ 為一組 $D_3(1)$ 的通解.

2.2 $D_4(1)$ 的解

特例 5. $D_4(1)$ 的解, $p_1 = 1$: 一開始, 我以紙筆計算, 但找不到任何的解, 想證明無解卻又無法證出, 因此我用 C++ 寫了程式來幫助我. 我們先看最前面的幾組:

p_1	p_2	p_3	p_4	$\sqrt{p_1p_2+1}$	$\sqrt{p_1p_3+1}$	$\sqrt{p_1p_4+1}$
1	3	8	120	2	3	11
1	8	15	528	3	4	23
1	15	24	1520	4	5	39
1	24	35	3480	5	6	59

表 4

這幾組它們的 p_1, p_2, p_3 規則都和 $D_3(1)$ 一樣, 而p_4 的 $120 = 11^2 - 1, 528 = 23^2 - 1, 1520 = 39^2 - 1$ 的這部分, 我發現: $11 = 2 \times 2 \times 3 - 1, 23 = 2 \times 3 \times 4 - 1, 39 = 2 \times 4 \times 5 - 1$, 於是合理的猜測有 $\{1, a^2 - 1, (a+1)^2 - 1, [2a(a+1) - 1]^2 - 1\}$ 的關係.

定理 2.7. $\{1, a^2 - 1, (a+1)^2 - 1, [2a(a+1) - 1]^2 - 1\}$ 為一組 $D_4(1)$ 的解.

證明. 直接乘開再分解可得:

$$
\begin{aligned}
&[a^2 - 1][(2a(a+1) - 1)^2 - 1] + 1 \\
&\quad = 4a^6 + 8a^5 - 4a^4 - 12a^3 + 4a + 1 = (2a^3 + 2a^2 - 2a - 1)^2.
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&[(a+1)^2 - 1][(2a(a+1) - 1)^2 - 1] + 1 \\
&\quad = 4a^6 + 16a^5 + 16a^4 - 4a^3 - 8a^2 + 1 = (2a^3 + 4a^2 - 1)^2.
\end{aligned}
$$

故可得到定理 2.7. □

特例 6. $D_4(1)$ 的解, $p_1 = 2$: 和之前解 $D_3(1)$ 時的想法類似, 我很自然的想到: 若最小數不是 1, 而是 2 呢? 於是我注意到了這幾組:

p_1	p_2	p_3	p_4	$\sqrt{p_1p_2+1}$	$\sqrt{p_1p_3+1}$	$\sqrt{p_1p_4+1}$
2	4	12	420	3	5	29
2	12	24	2380	5	7	69
2	24	40	7812	7	9	125
2	40	60	19404	9	11	197

表 5

注意到: $29 = 2 \times 3 \times 5 - 1, 69 = 2 \times 5 \times 7 - 1, 125 = 2 \times 7 \times 9 - 1$ 於是我同樣可以合理猜測 $\{2, \frac{(2a-1)^2-1}{2}, \frac{(2a+1)^2-1}{2}, \frac{[2(2a-1)(2a+1)-1]^2-1}{2}\}$ 為一組解. 事實上我們有:

定理 2.8. $\{k, \frac{(ka-k+1)^2-1}{k}, \frac{(ka+1)^2-1}{k}, \frac{[2(ka-k+1)(ka+1)-1]^2-1}{k}\}$ 為一組 $D_4(1)$ 的解.

證明. 與 $k = 1$ 的方法類似, 只需作兩個計算:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(ka-k+1)^2-1}{k}\,\frac{[2(ka-k+1)(ka+1)-1]^2-1}{k} + 1 \\
&\quad = [2k^2a^3 + (-4k^2 + 6k)a^2 + (2k^2 - 8k + 4)a + (2k - 3)]^2, \\
&\frac{(ka+1)^2-1}{k}\,\frac{[2(ka-k+1)(ka+1)-1]^2-1}{k} + 1 \\
&\quad = [2k^2a^3 + (-2k^2 + 6k)a^2 + (-4k + 4)a + (-1)]^2.
\end{aligned}
$$

故我們得到定理 2.8. □

當我看到 $\{1,3,8,120\}$ 這組時, 先想到的就是: 既然前三個數能用費氏數來表示, 那麼第四個數呢? 我想到將 120 分解: $120 = 4\times 2\times 3\times 5$, 而 $\{3,8,21,2080\}$ 中的 $2080 = 4\times 3\times 5\times 13$ 也是一樣, 因此猜測有 $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}, 4F_{2n-1}F_{2n}F_{2n+1}\}$ 的關係.

定理 2.9. $\{F_{2n-2}, F_{2n}, F_{2n+2}, 4F_{2n-1}F_{2n}F_{2n+1}\}$ 是一組 $D_4(1)$ 的解.

證明. 根據定理 2.4, 只需驗證

$$\begin{aligned}&F_{2n-2}(4F_{2n-1}F_{2n}F_{2n+1})+1 = 4F_{2n-1}F_{2n}(F_{2n-1}F_{2n}+1)+1\\&\quad = 4(F_{2n-1}F_{2n})^2+4F_{2n-1}F_{2n}+1 = (2F_{2n-1}F_{2n}+1)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F_{2n}(4F_{2n-1}F_{2n}F_{2n+1})+1 = 4F_{2n-1}F_{2n+1}(F_{2n-1}F_{2n+1}-1)+1\\&\quad = 4(F_{2n-1}F_{2n+1})^2-4F_{2n-1}F_{2n+1}+1 = (2F_{2n-1}F_{2n+1}-1)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F_{2n+2}(4F_{2n-1}F_{2n}F_{2n+1})+1 = 4F_{2n}F_{2n+1}(F_{2n}F_{2n}+1)+1\\&\quad = 4(F_{2n}F_{2n+1})^2+4F_{2n}F_{2n+1}+1 = (2F_{2n}F_{2n+1}+1)^2.\end{aligned}$$

故定理 2.9 得證. □

2.3 $D_3(k)$ 之最小解

特例 7. $D_3(k)$ 的所有解之中有一個解 $p_1 < p_2 < p_3$ 其 p_i 在所有解中都取得最小值. 我們稱之為 $D_3(k)$ 之最小解. 顯然 $p_1 = 1$. 當 k 變動時, 最小解符合表 6:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_2	3	2	6	5	4	3	2	8	7	6	5	4	3	2	10
p_3	8	7	13	12	11	10	9	17	16	15	14	13	12	11	21
k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p_2	9	8	7	6	5	4	3	2	12	11	10	9	8	7	6
p_3	20	19	18	17	16	15	14	13	25	24	23	22	21	20	19

表 6

我發現 p_2, p_3 每隔一個周期就會逐項減 1 變成一個新的數, 其特點可表示為: 當 $k = f(f+2)+t$ 時, $p_2 = 2(f+2)-t$ 且 $p_3 = 4(f+2)+1-t$, 其中 $0\le t\le 2f+2$, $t, f\in\mathbb{Z}$.

定理 2.10. $D_3(f(f+2)+t)$ 的最小解為 $\{p_1 = 1, p_2 = 2(f+2)-t, p_3 = 4(f+2)+1-t\}$, 其中 $0\le t\le 2f+2$, $t, f\in\mathbb{Z}$.

證明. 分兩部分證明, 其一為 p_1, p_2, p_3 符合 $D_3(1)$ 的基本條件, 其次為 p_2, p_3 均為最小值.

1. p_1, p_2, p_3 為 $D_3(1)$ 的解:

$$\begin{aligned}
p_1p_2 + k &= 1 \times (2f + 4 - t) + (f^2 + 2f + t) = f^2 + 4f + 4 = (f+2)^2, \\
p_1p_3 + k &= 1 \times (4f + 9 - t) + (f^2 + 2f + t) = f^2 + 6f + 9 = (f+3)^2, \\
p_2p_3 + k &= (2f + 4 - t) \times (4f + 9 - t) + (f^2 + 2f + t) = (3f - t + 6)^2.
\end{aligned}$$

2. $p_2 = 2(f+2) - t$, $p_3 = 4(f+2) + 1 - t$ 均為最小值: 因為 $k = f(f+2) + t$, 所以:

$$\begin{aligned}
p_1p_2 + k &= 1 \times p_2 + f(f+2) + t \\
&\geq 1 \times 2 + f(f+2) + 0 \\
&> (f+1)^2,
\end{aligned}$$

$$p_1p_3 + k > p_1p_2 + k = (f+2)^2,$$

因此 $p_1p_2 + k$ 的最小值為 $(f+2)^2$, $p_1p_3 + k$ 的最小值為 $(f+3)^2$, 亦即我們找出來的 $\{1, 2(f+2) - t, 4(f+2) + 1 - t\}$ 確為最小解. □

2.4 由 $D_3(1)$ 造 $D_4(1)$ 的解

在本節, 定義 $A = \sqrt{p_1p_2 + 1}$, $B = \sqrt{p_1p_3 + 1}$, $C = \sqrt{p_2p_3 + 1}$. 在定理 2.7 及定理 2.9 中, 我發現它們都有 $p_4 = 4ABC$ 的關係, 於是我找了其他的一些解來驗證, 但我發現在 $\{1, 3, 120, 1680\}$ 中, p_4 並不等於 $4ABC$, 於是我開始懷疑: 有 ABC, 是否有 $p_1p_2p_3$ 或者是 $\sum p_ip_j, \sum p_i$ 的存在呢?

一開始, 我從線性的關係出發, 期望可以找到解 (因為線性關係似乎是最簡單的), 由於現在我們有 $ABC, p_1p_2p_3, \sum p_ip_j, \sum p_i$ 四個變數, 因此我找了表 7 的四組解來做計算:

p_1	p_2	p_3	p_4	A	B	C	ABC	$p_1p_2p_3$	Σp_1p_2	Σp_1
1	3	8	120	2	3	5	30	24	35	12
1	3	120	1680	2	11	19	418	360	483	124
1	3	1680	23408	2	41	71	5822	5040	6723	1684
1	8	120	4095	3	11	31	1023	960	1088	129

表 7

假設 $p_4 = wABC + xp_1p_2p_3 + y\sum p_1p_2 + z\sum p_1$, 於是得到聯立方程組:

$$\begin{cases}
30w + 24x + 25y + 12z = 120 \\
418w + 360x + 483y + 124z = 1680 \\
5822w + 5040x + 6723y + 1648z = 23408 \\
1023w + 960x + 1088y + 129z = 4095
\end{cases}$$

解之可得 $w = 2$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$, 亦即 $p_4 = 2ABC + 2p_1p_2p_3 + \sum p_1$. 此結果看起來很漂亮, 現在我們來驗證其是否正確.

定理 2.11. 當 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 是一組 $D_3(1)$ 的解時, 必定可以找到一個 p_4, 使得 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 為一組 $D_4(1)$ 的解, 而這個 p_4 就等於 $2ABC + 2p_1p_2p_3 + \sum p_1$, 其中 $A = \sqrt{p_1p_2+1}$, $B = \sqrt{p_1p_3+1}$, $C = \sqrt{p_2p_3+1}$.

證明. 只需討論 $p_ip_4 + 1$:

$$\begin{aligned}
p_1p_4 + 1 &= 2p_1ABC + 2{p_1}^2p_2p_3 + {p_1}^2 + p_1p_2 + p_1p_3 + 1 \\
&= 2p_1ABC + ({p_1}^2p_2p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + 1) + ({p_1}^2 + {p_1}^2p_2p_3) \\
&= 2p_1ABC + (p_1p_2+1)(p_1p_3+1) + {p_1}^2(p_2p_3+1) \\
&= 2p_1ABC + A^2B^2 + {p_1}^2C^2 \\
&= (AB + p_1C)^2,
\end{aligned}$$

同理, $p_2p_4 + 1 = (AC + p_2B)^2$, $p_3p_4 + 1 = (BC + p_3A)^2$. 因此定理成立. □

事實上, 一開始我還想到變數也許會有 $\sum AB$ 或 $\sum A$ 等等的變數出現, 但在一些簡單計算之後發現 $\sum AB$, $\sum A$ 和 p_4 的值沒有直接關係, 於是我僅先考慮剩下的 4 個變數 (即 ABC, $p_1p_2p_3$, $\sum p_1p_2$, $\sum p_1$) 來做計算, 期望能得出一個 p_4 解, 於是發現了上述規則, 此部分期望能找出第二個 p_4 的解, 或者證明對於任意給定的 $\{p_1, p_2, p_3\}$, p_4 僅有唯一一個解 (若為如此則間接證明了 $D_5(1)$ 無解). 我們提出以下問題以供後續探討:

問題 2.12. 若 $D_n(1)$ 有解, 是否 $n \leq 4$?

2.5 $D_4(k)$ 的討論

定理 2.13. $D_n(k)$ 有解, 則 $D_n(t^2k)$ 有解.

證明. 將 $D_n(k)$ 的解乘以 t 顯然得到 $D_n(t^2k)$ 的解. □

定理 2.14. 當 $D_4(k)$ 的 $k \equiv 2(\bmod 4)$ 時, $D_4(k)$ 無解.

證明. 在此我採用反證法及 "Pigeonhole Principle" (鴿籠原理) 來證明:

假設有解 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, 那麼, $p_ip_j + k = a_{ij}^2, \forall 1 \leq i < j \leq 4$. 將左右兩邊 mod4, 可得到 $p_ip_j + k \equiv b_ib_j + 2$ $(0 \leq b_i, b_j \leq 3)$, $a_{ij}^2 \equiv 0$ 或 1 (其中 b_i, b_j 為 $0, 1, 2$ 或 3), 即 $b_ib_j \equiv 2 \vee 3 \pmod 4$. 此時 $b_i \neq 0$, 且 b_1, b_2, b_3, b_4 中最多只有一個可以是 1 (否則有至少 2 個 1, 此二數相乘得 $1 \times 1 = 1$); 最多只有一個可以是 2 (否則 $2 \times 2 = 4$ 同於 0 的情況); 最多只有一個可以是 3 (否則 $3 \times 3 = 9$ 同於 1 的情況), 這也就是說, 我們最多只能得到 3 個數, 這和假設矛盾, 由此得知當 $k \equiv 2 \pmod 4$ 時, $D_4(k)$ 無解. □

以下定理是本研究最後的最後一個結果:

定理 2.15. 當 $D_4(k)$ 的 $k \neq 2(\bmod 4) \wedge k \neq 3, 5, 8, 12, 20, k > 0$ 時, $D_4(k)$ 至少有一組解.

所有的整數可分類為 $4t$, $4t+1$, $4t+2$, $4t+3$. 其中我們將 $4t+1$ 再分為 $8t+1$ 及 $8t+5$ (原因是無法直接找出所有 $k = 4t+1$ 時的解).

(1) 當 $k = 4t + 3$, 有解 $\{1, 9t^2 + 8t + 1, 9t^2 + 14t + 6, 36t^2 + 44t + 13\}$. 此部分一開始是以程式得出特例, 在設定 $p_4 < 10000, k = 7, 11, 15 \cdots$ 的條件下可由各組解之間的差得出關係.

t	k	p_1	p_2	p_3	p_4
1	7	1	18	29	93
2	11	1	53	70	245
3	15	1	106	129	469
4	19	1	177	206	765

表 8

(2) 當 $k = 8t + 1$, 有解 $\{4, 9t^2 - 5t, 9t^2 + 7t + 2, 36t^2 + 4t\}$. 類似的方法可得:

t	k	p_1	p_2	p_3	p_4
2	17	4	26	52	152
3	25	4	66	104	336
4	33	4	124	174	592
5	41	4	200	262	920

表 9

(3) 當 $k = 8t + 5$, 有解 $\{2, 18t^2 + 14t + 2, 18t^2 + 26t + 10, 72t^2 + 80t + 22\}$, 同樣的我們得到:

t	k	p_1	p_2	p_3	p_4
1	13	2	34	54	174
2	21	2	102	134	470
3	29	2	206	250	910
4	37	2	346	402	1494

表 10

現在我們剩下當 k 為 4 的倍數時的情況以及 $k = 3, 5$ 未解決了. 當 k 為 4 的倍數時, 這時有 3 種可能, 分別是: $k = (4t + 1)4^m$, $k = (4t + 2)4^m$, $k = (4t + 3)4^m$.

(4) 當 $k = (4t + 1)4^m$, 由 (2), (3) 知 $k = 4t + 1$ 有解 $(k \neq 5)$, 再由定理 2.13, 我們只要驗證 $k = 5 \times 4^n$ 是否有解就可以了, 而我在 $k = 80$ 找到了一組解 $\{1, 41, 64, 209\}$, 因此這部份除了 $k = 20$ 以外都完成了證明.

(5) 當 $k=(4t+3)4^m$, 由 (1) 知 $k=4t+3$ 有解 ($k\neq 3$), 再由定理 2.13, 我們只要驗證 $k=3\times 4^n$ 是否有解就可以了, 而我在 $k=48$ 找到了一組解 $\{1,276,313,1177\}$, 因此除了 $k=12$ 以外也都完成了證明.

(6) 當 $k=(4t+2)4^m$ 的時候, 因為我們已經知道 $k=4t+2$ 時是無解的, 因此, 我從 $m=1$ 開始, 也就是從 k 為 8 的倍數開始找 (因為 $m=0$ 時, $k=(4t+2)4^0=4t+2$ 無解), 先令 $k=8f$, 我同樣可以找到一組解 $\{1,9f^2-8f,9f^2-2f+1,36f^2-20f+1\}$.

t	k	p_1	p_2	p_3	p_4
3	24	1	57	76	265
4	32	1	112	137	497
5	40	1	185	216	801
6	48	1	276	313	1177

表 11

至此, 我們已經完成了當 $D_4(k)$ 的 $k\neq 2(\bmod 4)\wedge k\neq 3,5,8,12,20,\ k>0$ 時, $D_4(k)$ 至少有一組解的證明, 然而, 當 $k=3,5,8,12,20$ 時, 我仍無法找到解, 亦無法證明無解.

3 未來展望

1. 試著找出更多種型式的解, 甚至證明其涵蓋所有解答.
2. 針對此次報告仍未做出之 $D_4(-1)$ 及 $D_r(k)$ ($r\geq 5, r\in\mathbb{N}$) 部分再進行研究.
3. 我們已知 $D_3(1)$ 可推展至 $D_4(1)$, 因此期望能將 $D_4(1)$ 推展至$D_5(1)$, 當然, 前提是 $D_5(1)$ 有解. 若 $D_5(1)$ 無解, 則證明之.
4. 當 $\{p_1,p_2,p_3\}$ 是一組 $D_3(1)$ 的解時, 找出或證明沒有和 $2ABC+2p_1p_2p_3+\sum p_i$ 不同的 p_4, 使得 $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ 亦為 $D_4(1)$ 的解.
5. 當 $D_4(k)$ 的 $k=3,5,8,12,20$ 時, 證明 $D_4(k)$ 至少有一組解或是無解.

參考文獻

[1] IMO 歷屆試題.