猜數字的研究及其推廣

李屏

台北市立第一女子高級中學

Abstract

The research is about the game bulls and cows, mainly discussing the guess method as well as the minimax of needed time in this game's each situation. The minimax of needed times refers to the maximum of the needed times to avoid the useless and repeated guess and make the most of every guess during the game. $K(m,n)$ is defined as the minimax of needed times which m is the chosen number and n is the number guessed every time by the player.

First I sum up some properties of $K(m,n)$, and then simplify the original game. The game is modified. Players can guess from 2 numbers to 3 or 4 numbers. After a string of discussion, I can get some rules of $K(m,2)$, $K(m,3)$, $K(m,4)$. I also discuss the upper boundary of $K(m,n)$:

$$K(m,n) \leq \left[\frac{m-1}{n}\right] + \max\left(K(m',n) - \left[\frac{m'-1}{n}\right]\right)(n \leq m' \leq n^2 < m).$$

摘要: 這份作品主要探討猜數字這個遊戲的猜測方法以及各種情形的猜數字遊戲所需猜測最多次數的最小值, 所謂所需猜測最多次數的最小值是指, 在猜測的過程中扣除一些重複且不必要的猜測並使每次猜測的效用都得到最大, 而仍需猜測的次數, 研究中設定符號 $K(m,n)$ 表示此值, m 為可選擇的數字數目, n 為一次猜測的數字數目.

研究中我先討論 $K(m,n)$ 的一些性質, 並把遊戲簡化, 從一次猜兩個數字的情形開始討論, 再推到猜三個, 四個數字, 得 $K(m,2)$, $K(m,3)$ 的一般式, 以及 $K(m,4)$ 的範圍. 研究中也探討了上界:

$$K(m,n) \leq \left[\frac{m-1}{n}\right] + \max\left(K(m',n) - \left[\frac{m'-1}{n}\right]\right)(n \leq m' \leq n^2 < m),$$

作為以後推廣到一般式的方向.

1 簡介

1.1 猜數字遊戲

猜數字遊戲 (bulls and cows), 是一個流傳有百年之久的古老解碼遊戲, 遊戲過程中需兩人參與, 分別稱之為 codemaker 和 codebreaker. 遊戲開始時先由 codemaker 在心裡從 0∼9

中選出四個數字, 排列成一組密碼, 且數字不能重複, 稱之為正解數字組, 而 codebreaker 則是要去猜這個密碼. codebreaker 每一次的猜測皆是一個由四個數字所組成經排列後的數字組. 且經過每一次的猜測, codemaker 都會提供一個 ab 性的訊息, 回應 codebreaker 所猜測的數字組. 若是數字組中有數字是正解數字, 且位置也對, 那麼 codemaker 就會給一個 a; 若是數字組中有數字是正解數字, 但位置不對, 那麼 codemaker 就會給一個 b, codebreaker 根據所得的 ab 性及邏輯推理一步步猜測, 直到猜到正解數字組. 例如: 正解數字組為 0123, 猜 1026, 所得 ab 性為 1a2b; 猜 0625, ab 性為 2a0b.

1.2 研究動機

生活中有許多遊戲, 運用了一些數學觀念或是邏輯推理, 像是數獨, 撲克牌, 下棋等等, 總是吸引我們動腦去思考. 小學五年級時, 第一次接觸猜數字這個小遊戲, 是老師上課教大家玩的, 猜數字遊戲好記又玩不膩, 從此和我的童年密不可分. 上了國中, 高中, 偶爾也會和同學用猜數字遊戲打發時間, 玩過無數次, 卻一直沒有一個很好的猜測方式, 在遊戲過程中總難免遇到迂迴數次又仍湊不出正解的情形. 在接觸高二數學排列組合的單元後, 學會較有系統的計算可能排列和分組概念, 引起我對這個遊戲研究的動機, 猜測過程中經由計算是否能使猜測更加快速? 有沒有一套最佳猜測策略可使所需的次數為最少? 而最佳猜法所需的最少次數是幾次? 於是我著手進行猜數字遊戲的相關研究.

1.3 符號定義

因研究過程需要, 我與鄭君筑同學共同定義以下符號。在猜數字遊戲的過程中, 避免一些重複或不必要的猜測, 且使每次的猜測都達到最大的效用, 在這樣的策略之下, 仍需要猜測的最多次數, 稱之為所需猜測最多次數的最小值 (minimax), 在以下的內容中, 我定義 $K(m,n)$ 表示之, m 為可選擇的數字數目, n 為一次猜測的數字數目, 所求函數值為此情況下的猜數字遊戲所需最多次數的最小值. 因研究過程需要, 定義了 $P(i)$, 用以判斷 i 是否為正解中的數字, 若 i 是正解數字之一, 則 $P(i)=1$, 若 i 不是正解中的數字, 則 $P(i)=0$. S_q^p 是文中所使用的集合符號, 定義 q 為集合的編號, p 表示此集合有 p 個元素, 若編號為 $q\cdot a$, 則 $S_{q\cdot a}^{p'}\subset S_q^p$, 為把 S_q^p 拆開得到的集合, 即 $S_{q\cdot a}^{p'}$ 為 S_q^p 的子集合, 此集合中有 p' 個元素.

1.4 猜法分類

猜數字遊戲的猜測策略千奇百怪, 猜法的選擇與使用, 因人而異, 而研究中, 我將所有的猜測方法分成以下三種:

1. 無關猜法: 所猜測的數字組中的數字, 是已猜測過的數字組中所沒有的.

2. 有關猜法: 根據已猜測的數字組的 ab 性, 排列成一新的數字組猜測, 也就是所猜測的數字組是所有可能正解數字組之一.

3. 判別法: 所猜測的數字組中有已猜測過的數字, 且與前面已知 ab 性的數字組相矛盾 (即不可能是正解數字組).

1.5 研究目的

我的研究目的有以下兩點:

1. 找到一套良好的猜測策略.
2. 找到不同情形的猜數字遊戲所需要猜測的最多次數的最小值, 也就是前面提到的 $K(m,n)$.

1.6 文獻探討

在尋找相關文獻及參考資料時, 我得到幾篇論文:

1. 參考文獻 [2, 3], 作者是電腦科學領域的學者. 在論文 [2] 中, 討論猜一個數字及猜兩個數字所需的次數, 且在猜兩個數字 (相當於作品中所定義的 $K(m,2)$) 的研究上, 與我的研究結果相同. 而在論文 [3] 中, 提出了數種解決此種問題的演算法 (於論文中之 Section 4), 用程式及演算法探討猜數字遊戲, 並且證明 $K(10,4)=7$ (於論文中之 Section 3), 也就是最原始的猜數字遊戲所需的次數.
2. 參考文獻 [4] 則是提出一些猜數字遊戲的相關研究通常會求的各種目的, 其中所需猜測最多次數的最小值就是其中一種, 並且提出相關的演算法概念, 各種目的所求的值的意義及一些結果的比較.

從文獻當中, 對於遊戲是用樹狀圖分枝的想法, 這對我的研究有些基本概念上的幫助. 從相關文獻中可以發現, 以往對於猜數字的研究有以下特點:

1. 利用演算法及程式為工具, 模擬出所有情況以求得結果.
2. 大部分的研究都侷限在 $K(10,4)$ 的探討, 以及改變演算法的些微差異以求得最佳的猜測次數平均.

其實此種探討方法有缺點, 龐大演算不僅耗時, 也難以將研究範圍擴展到一般情形, 因此我嘗試用較簡潔的方式探討, 將各種狀況良好的分類並且研究出結果, 再將其拓展到一般情形.

1.7 本文主要過程與結果

在研究過程中, 我嘗試了各種猜法, 並將猜法分成有關猜法, 無關猜法及判別法三類, 且先將猜數字遊戲簡化, 從 $n=2$ 的情形開始探討. 先從樹狀圖中找規則, 又嘗試將各種情形分類, 找到一種適當的分類方式後, 得到各種情形的結果, 並推導出一般式

$$K(m,2)=\left[\frac{m-1}{2}\right]+2,\quad (m\geq 2);$$

因研究過程需要, $n=2$ 之結果是我與鄭君筑同學共同探討的部份. 在 $n=3$ 的情形我也以相同模式來探討, 其各種情形的分類比 $n=2$ 要來的複雜許多, 得到各情形的結果後也推導出一般式

$$K(m,3)=\left[\frac{m-1}{3}\right]+4,\quad (m>4).$$

因研究過程需要, 此部份為我探討出結果後, 經鄭君筑同學驗證而得.

接下來我發展了一套 $K(m,n)$ 的性質, 使求 $K(m,n)$ 的值的過程更加有脈絡可循, 也根據所得到 $K(m,2)$ 和 $K(m,3)$ 的結果推得 $K(m,n)$ 上界的式子:

$$K(m,n) \le \left[\frac{m-1}{n}\right] + \max\left(K(m',n) - \left[\frac{m-1}{n}\right]\right), \quad (n \le m' \le n^2 < m),$$

並且也繼續進行 $n=4$ 的討論, 已可得

$$\left[\frac{m-1}{4}\right] + 7 \ge K(m,4) \ge \left[\frac{m-1}{4}\right] + 5, \quad (m \ge 16).$$

1.8 感謝詞

能在一年多的專研中得到一點成果, 要感謝一路上給予幫助且陪伴我的很多很多人. 感謝文俊老師不斷的鼓勵, 指導, 引領, 常常和我一起討論專研, 不時的用抽象大道理把迷失掉的我從偏路中導正; 感謝總是在身旁默默支持的同學與導師, 你們所帶來的温暖與歡笑是我堅强的後盾; 感謝家人總是能體諒, 不會多問或責備, 讓我能很放心的做專研, 感謝丘成桐數學獎讓我有機會分享自己的研究內容. 要感謝的人實在太多, 總之謝謝你們.

2 $K(m,n)$ 性質

性質 2.1. 在 $K(m,n)$, $m \ge 2n$ 的情形時, 猜到 0a0b, 接下來的形式即為 $K(m-n,n)$.

證明. 設 S^m 為所有 m 個可選擇數字的集合, S_a^n 為正解數字組. 將 S^m 分割, 使 $S^m = \left\{S_g^n, S^{m-n}\right\}$, $S_g^n \cap S^{m-n} = \varnothing$. 設 S_g^n 為猜測的數字組, 且 $\sum\limits_{i \in S_g^n} P(i) = 0$, 可知 $S_g^n \cap S_a^n = \varnothing$. 已知 $S_a^n \subset S^m$, 又因 $S_g^n \cap S_a^n = \varnothing$, 可推得 $S_a^n \subset S^{m-n}$, 即為 $K(m-n,n)$. □

性質 2.2. $K(m,n) \ge K(m-n,n)$.

證明. 根據性質 2.1 可得. □

性質 2.3. 當 $m \ge n^2+1$, $K(m,n) \ge K(m-1,n)$.

證明. 假設有一組最佳猜法可得 $K(m,n) = k$, $m \ge n^2+1$, $K(m-1,n)$ 的情形時, 我們可以加一個確定錯誤的數 j, 使模式變成 $K(m,n)$, 得一組最佳猜法. 由於已知 j 為確定錯誤的數, 刪除有 j 的數字組, 便使得最佳猜法的各次猜測後, 正解排列可能減少, 可得 $K(m,n) \ge K(m-1,n)$. □

性質 2.4. 當 $n \ge 4$, $m \ge 16$, 確定正解數字範圍之前使用無關猜法猜測為最佳.

性質 2.5. 當 $m \ge n^2$, 無關猜法分組後猜測, 猜到正解數字時的 ab 性皆為 1b, 此情形到猜到正解數字組所需猜測次數最多.

證明. 假設在 (m,n) 的情形下, 無關猜法分組猜測, 猜到正解數字組時 ab 性皆為 1b, 需要 k 次猜出正解. 以下分成 $m=tn$, $m=tn-p$ 兩種情形探討.

1. $m = tn, t \in \mathbb{N}$
   若用無關猜法分組猜測, 其中有數字組 ab 性為 1a, 將數字組中的數字重新排列, 使每個數字皆不在原本的位置 (共有 $B_n(n)$ 種排列, 即 n 錯列), 可知重新排列後的數字組的 ab 性必為 1b, 故需最多 k 次猜出.

   若有數字組猜到兩個以上的正解數字, 表示有一組以上的數字組的 ab 性會是 0a0b, 已知 $K(m,n)$, 根據性質 2.1. 可知 $m \geq 2n$ 的情形時, 猜到 0a0b, 接下來的形式即為 $K(m-n,n)$, 又根據性質 2.2 知道 $K(m,n) \geq K(m-n,n)$, 故所需次數 $\leq k$.

2. $m = tn - p, p < n, t \in \mathbb{N}$
   若無關猜法分組猜測, 其中有數字組 ab 性為 1a, 用一樣重新排列的方式可知所需次數 $\leq k$.

   若有數字組猜到兩個以上的正解數字, 一樣根據性質 2.1 和性質 2.2 可以知道所需次數 $\leq k$.

   若有 r 組無關猜法猜到正解數字 $r \leq t-1$, 並且剩下的 $n-p$ 個未知 ab 性的數字中有正解數字, 根據性質 2.3, 已知 $K(m,n) \geq K(m-1,n)$, $m \geq n^2+1$, 可推得 $K(n^2,n) \geq K(rn+n,n) \geq K(rn+n-p,n)$, 故所需次數 $\leq k$. □

3 可能排列個數的計算

設定符號 $A_r(n)$ 表示一次猜測為 n 個數字的數字組, 猜測後所得 ab 性為 ra, 而可能的排列個數. 同理 $B_r(n)$ 表示一次猜測為 n 個數字的數字組時, 所得 ab 性為 rb, 而可能的排列個數.

引理 3.1. $A_r(n) = C^n_r$.

證明. 先從最簡單的情形 $r = 1$ 來看, 若猜到 1a, 這個為 1a 的數字可能為 n 個數字中的其中一個, 可推得 $A_1(n) = n$. 若是猜到 2a, 則從 n 個數字中取 2 個數字, 可得 $A_2(n) = C^n_2$. 同理可證 $A_r(n) = C^n_r$. □

引理 3.2. $B_r(n) = C^n_r\Big[B_r(r) + \dfrac{(n-r)!}{(n-2r)!} + \displaystyle\sum_{k=2}^{r} B_{r-k+1}(r)\dfrac{(n-r)!}{(n-r-k+1)!}\Big]$, $(n > p + r)$.

證明. 同樣從 $r = 1$ 的情形來看, 猜到 1b, 這個 1b 的數字可能為 n 個數字中的其中一個, 且排列在原本位置外的 $n-1$ 個位置, 可得 $B_1(n) = C^n_1(n-1)$; 若是猜到 2b, 從 n 個數字中取 2 個數字且都不排在原本位置, 可得

$$\begin{aligned} B_2(n) &= C^n_2[1 + B_1(2) \times (n-2) + (n-2)(n-3)] \\ &= C^n_2[(n-2)(n-1) + 1], \end{aligned}$$

中括號內, 1 表示 2 的錯列次數, 表示這兩個為 1b 的數字可能在原本的兩個位置中交換, 也可能只有一個數字在這兩個位置中, 另一個數字則在剩下的 $n-2$ 個位置之中, 因此有

$B_1(2) \times (n-2)$, 也可能兩個數字都不在本來的這兩個位置, 可得 $(n-2)(n-3)$. 一樣的想法可以推得

$$\begin{aligned} B_3(n) = C_3^n[2 + B_2(3) \times (n-3) \\ + B_1(3) \times (n-3)(n-4) \\ + (n-3)(n-4)(n-5)], \end{aligned}$$

且同理可證

$$B_r(n) = C_r^n\Big[r \text{ 錯列} + \frac{(n-r)!}{(n-2r)!} + \sum_{k=2}^{r} B_{r-k+1}(r)\frac{(n-r)!}{(n-r-k+1)!}\Big].$$ □

引理 3.3. $A_rB_p(n) = B_p(n-r) \times A_r(n)$.

證明. 由於 a, b 可分別找出排列次數, 先確定 a 的可能排列情形後, 扣除 a 所佔的位置再排列 b 的可能情形, 可得 $A_rB_p(n) = B_p(n-r) \times A_r(n)$. □

4 $n = 2$

4.1 無關猜法確定正確數字範圍的定義

由於每次猜測是一個有 n 個數字的數字組, 而正解數字組亦有 n 個數字, 從最佳的情形: 一次猜到 n 個正解數字 (就是所得 ab 性 rapb, $r+p=n$), 到最糟糕的情形: n 組無關猜法皆猜到一個正解數字, 皆有可能發生.

設第 q 次的猜測數字組為 S_q^n, 無關猜法所剩的數字集合為 S_l^{m-qn},

$$\sum_{i \in S_q^n} P(i) = t \quad (1 \le t \le n, t \in \mathbb{N}),$$

可知

$$\sum_{z=1}^{q}\sum_{i \in S_z^n} P(i) + \sum_{i \in S_l^{m-qn}} P(i) = n.$$

定義

$$m - qn \le n \text{ 及 } \sum_{i \in S_l^{m-qn}} P(i) = 0,$$

兩者間至少一者成立, 表示確定正解數字範圍.

4.2 $n = 2$, 猜測所得 ab 性, 1a 和 1b 提供的訊息是一樣的

性質 4.1. $n = 2$, 猜測所得 ab 性, 1a 和 1b 提供的訊息是一樣的.

證明. 根據引理 3.1 及 3.2, 可知 $B_1(2) = C_1^2 \times (2-1) = A_1(2)$, 且將 1b 兩數字顛倒即可得 1a (2 的錯列僅一種), 得證. □

4.3 ab 性的意義: 表示兩組數字組的關係

設所猜的數字組為 S_g^n, 而正解數字組為 S_a^n, 所得到的 ab 性為 $ra p$b. 若 S_g^n 為正解數字組, 則 S_a^n 的 ab 性亦會得到 $ra p$b, 因此我們可以將 ab 性看為兩組數字組間數字重複與排列的關係, 也就是 S_a^n 與 S_g^n 間的關係互為 $ra p$b.

4.4 $n = 2$, 各分類情形所需的次數

根據 4.1 的定義, 使用無關猜法確定正解數字範圍後的情形分成以下三種, 並逐一探討出次數.

1. $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 2$, 此情形出現到猜到正解需一次猜測.

   由於 2 的錯列只有一種, 若 ab 性為 2b, 則數字顛倒即為正解.

2. $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 1$, $\sum\limits_{i \in S_r^1} P(i) = 1$, 此情形出現到猜到正解需二次猜測.

   無論 S_q^2 所得的 ab 性為 1a 或 1b, 根據 4.2 以及計算可得 $A_1(2) \times (2-1) = C_1^2 \times 1 =$ 2 組可能正解, 兩組可能正解需一次猜測, 可確定唯一正解.

3. $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 1$, $\sum\limits_{i \in S_r^2} P(i) = 1$, 此情形出現到猜到正解需兩次猜測.

   若兩組皆是無關猜法, 得其 ab 性, 根據 4.2 可假設兩組數字組 ab 性皆為 1a, 計算後可得 $A_1(2) \times A_1(2) \times \frac{(2-1)}{2} = C_1^2 \times C_1^2 \times \frac{1}{2} = 2$ 組可能正解, 一次猜測即可確定唯一正解.

   若有一組是所剩下未猜測的兩個數字, 未知其 ab 性, 可得 $A_1(2) \times 2 = C_1^2 \times 2 = 4$ 組可能正解, 假設一組數字組 ab 性為 2a, 可知另外三組可能正解對於此組數字組的 ab 性為 1a, 1b, 0a0b, 因此一次的猜測就可確定唯一正解.

4.5 $K(m, 2) = \left[\frac{m-1}{2}\right] + 2 \quad (m \geq 2)$

定理 4.2. $K(m, 2) = \left[\frac{m-1}{2}\right] + 2 \quad (m \geq 2)$.

證明. 根據 4.4 所討論出的次數, 分 $m = 2t$ 及 $m = 2t + 1$ 兩種情況探討.

若 $m = 2t \quad (t \in \mathbb{N})$, 則有以下情形:

1. $0 \sim t - 1$ 組 0a0b 及 $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 2$, 所需次數為

$$
\begin{aligned}
&(t-1) + 1 \text{ (出現 } \sum_{i \in S_q^2} P(i) = 2) + 1 \text{ (猜到正解所需的次數)} \\
&= t + 1 = \frac{m}{2} + 1.
\end{aligned}
$$

2. $0 \sim t-2$ 組 0a0b 及 $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 1$, $\sum\limits_{i \in S_r^2} P(i) = 1$, 所需的次數為

$$\begin{aligned}&(t-2)+1\ (\text{出現}\ \sum_{i \in S_q^2} P(i) = 1,\ \sum_{i \in S_r^2} P(i) = 1) + 2\\ &= t+1 = \frac{m}{2}+1.\end{aligned}$$

若 $m = 2t+1$ ($t \in \mathbb{N}$), 則有以下情形:

1. $0 \sim t-1$ 組 0a0b 及 $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 1$, $\sum\limits_{i \in S_r^1} P(i) = 1$, 所需次數為

$$\begin{aligned}&(t-1)+1\ (\text{出現}\ \sum_{i \in S_q^2} P(i) = 1,\ \sum_{i \in S_r^1} P(i) = 1) + 2\\ &= t+2 = \frac{m-1}{2}+2.\end{aligned}$$

2. $0 \sim t-2$ 組 0a0b 及 $\sum\limits_{i \in S_q^2} P(i) = 1$, $\sum\limits_{i \in S_r^2} P(i) = 1$ 和一剩下且確定不是正解數字的數字, 所需次數為

$$\begin{aligned}&(t-2)+2\ (\text{出現}\ \sum_{i \in S_q^2} P(i) = 1,\ \sum_{i \in S_r^2} P(i) = 1) + 2\\ &= t+2 = \frac{m-1}{2}+2.\end{aligned}$$

總和上述結果, 可推得:

$$K(m,2) = \left[\frac{m-1}{2}\right] + 2 \quad (m \geq 2).$$ □

5 $n = 3$

5.1 $n = 3$, 各分類情形所需的次數

根據 4.1 的定義, 可知使用無關猜法確定正解數字範圍後的情形分成以下八種, 並逐一探討出次數.

1. $\sum\limits_{i \in S_q^3} P(i) = 3$

   若未知 ab 性, 可知有 6 組可能正解, 假定一組可能正解 ab 性為 3a, 則與之錯列的兩組可能正解的 ab 性為 3b, 另外三種可能正解的 ab 性為 1a2b, 且為 1a2b 的三組可能正解間互為 3b 的關係, 需 4 次可猜出正解.

2. $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^1} P(i) = 1$

   用有關猜法, 依其 ab 性可得可能正解數字組, 找一個數字組可以將可能的正解排列分別分到不同的 ab 性, 此情況出現到猜出正解需要 3 次.

3. $\sum_{i \in S_q^2} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1$

   用有關猜法, 依其所得 ab 性可推得可能的正解數字組, 可找出一數字組將其分在不同的 ab 性, 而得到猜出正解, 需 3 次.

4. $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^2} P(i) = 1$

   用有關猜法, 依其所得 ab 性可推得可能的正解數字組, 無法找出一數字組將其分在不同的 ab 性, 需 4 次確定正解.

5. $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1$

   用有關猜法, 直到可能為正解的排列在一定範圍後, 找一個數字組將可能的正解排列分別分到不同的 ab 性, 此情形出現到猜出正解需 4 次.

6. $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^4} P(i) = 1$ 及 $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_r^4} P(i) = 2$

   設 $S_q^3 = \{0, 1, 2\}, S_r^4 = \{3, 4, 5, 6\}$.

   $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^4} P(i) = 1$, 此情形若繼續使用無關猜法, 需要 5 次猜測猜出正解數字組 (一次無關猜法和 $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^2} P(i) = 1$ 的 4 次). 從已知 ab 性的 012 中找一個數字, 並用它將 3456 二二分. 若 012 的 ab 性是 1a1b 或 2a, 則從 012 中找的數字不用換位置, 例如找 0, 便猜 034 及 056; 若 012 的 ab 性是 2b, 就將 012 中找的數字換位置, 便猜 340 及 560. 得到 ab 性之後, 可推出所選的 0 是否為正解數字, 以及另一個正解數字是在 34 還是 56 之中, 便可排列出可能的正解數字組. 下一次的猜測取一個可將可能的正解數字組分別分在不同 ab 性的猜法. 而從歸納中, 可以確定每一種情形皆有能將正解數字組分別分在不同 ab 性的數字組, 所以次數皆為 2 (二二分) $+1+1$ (已知正解, , 猜出正解) $= 4$ 次.

   $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_r^4} P(i) = 2$, 若用無關猜法猜, 此情形所需次數也是 5 次 (一次無關猜法和 $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_t^1} P(i) = 1$ 的 4 次). 用和上述一樣的方法將 3456 二二分, ab 性的組合比 $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^4} P(i) = 1$ 要複雜的, 且歸納結果無法一次就將可能的正解數字組分別分在不同 ab 性, 因次所需次數和用無關猜法一樣為 5 次.

7. $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_t^2} P(i) = 1$

   設 $S_q^3 = \{0,1,2\}, S_r^3 = \{3,4,5\}, S_t^2 = \{6,7\}$

   若數字組的 ab 性分別為 1a, 1a, 則可能的正解排列有 12 種, 先用有關猜法 046, 得到其 ab 性並推得可能正解數字組 (最多 3 組), 再找一數字組可將其可能的正解數字組分別分到不同的 ab 性, 確定正解. 故所需次數是 3 次.

   若數字組的 ab 性分別為 1a, 1b, 先用有關猜法猜 046, 得其 ab 性, 若為 0a0b, 1a 或 1b, 再猜 372, 得其 ab 性後可得可能為正解的數字組, 找一數字組可將其分到不同 ab 性, 得到正解; 若為其他, 則可直接找一數字組將其可能正解數字組分到不同 ab 性, 得到正解. 此情況到得到正解需要 4 次.

   若數字組的 ab 性分別為 1b, 1b, 先用有關猜法猜 156 (使其每組中有一個數字且位置與原本不同), 若得到的 ab 性為 1a1b, 0a0b, 1a 或 1b 時, 再以同樣想法猜另一數字組 723, 並得其 ab 性若為 1a 或 1b, 則再猜 630, 得其 ab 性後, 可以判別法再猜一次得到正解. 若 156 得到的 ab 性為其他, 則可以判別法得到正解. 此情況到猜出正解需要 4 次.

8. $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1, \sum_{i \in S_t^3} P(i) = 1$

   設 $S_q^3 = \{0,1,2\}, S_r^3 = \{3,4,5\}, S_t^3 = \{6,7,8\}$

   若有一組數字組是無關猜法下所剩, 未知其 ab 性, 而另外兩組數字組的 ab 性可分為 1a, 1a 有 18 種可能正解, 1a, 1b 有 36 種可能正解, 1b, 1b 有 72 種種可能正解.

   若所得 ab 性為 1b, 1b, 使用有關猜法, 選擇不同位置的數字, 舉例來說可分成 046, 157, 238 三個數字組, 並將它排列後, 以 460, 157 猜測兩次, 得知其 ab 性. 由於此情況已經限制 012, 345, 678, 確定 460 及 157 中的正解數字後, 便可推出第三個正解數字, 再扣除位置不合的數字組, 皆只需一次的猜測就可以確定唯一正解數字組, 故所需次數為 4 次.

   若數字組的 ab 性分別為 1a, 1a, 1a, 有 6 種可能正解, 先嘗試用有關猜法猜 048, 得到 3a 或 1a. 如果結果是 1a, 下一次猜測為 045, 可以得到 2a (則正解為 057) 或 1a (則正解為 246) 或 0a0b (則正解為 138), 所需次數為 3 次.

   若數字組的 ab 性分別為 1b, 1b, 1b, 用有關猜法, 選擇 048 (另外六個數字分成 156, 237 兩組), 這三個各在三個位置中出現過的數字, 重新排列成 480 並猜測, 可能猜中一個正解數字得到 1a 或 1b, 也有可能是猜到兩個正解數字:

   猜 480 的結果是 1b, 則 156 排列成 561 猜測 (156 會沒有可能正解), 可能為 1a 或是猜到兩個數字. 若是猜到兩個數字, 形式便等同 $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1$; 若是 1a, 則可確定要使 237 為 1a, 排列為 237. 且三組可能正解為 507, 831, 264.

   猜到兩個數字 (2a, 1a1b, 2b), 則 156 排列成 156 猜測 (45 不排在同一個位置), 可能為 1a, 1b 或 0a0b, 並且可刪掉三個數字, 便為 $\sum_{i \in S_q^3} P(i) = 2, \sum_{i \in S_r^3} P(i) = 1$. 得到 ab 性

後可推得可能正解數字組, 找一數字組將其可能的正解數字組分到不同的 ab 性, 然後可確定正解. 所需次數為 4 次.

5.2 $K(m,3) = \left[\frac{m-1}{3}\right] + 4, \quad (m > 4)$

定理 5.1. $K(m,3) = \left[\frac{m-1}{3}\right] + 4, \quad (m > 4).$

證明. 根據 5.1 討論出的次數, 分 $m = 3t$, $m = 3t+1$, $m = 3t+2$ 三種情況探討.
若 $m = 3t$ $(t \in \mathbb{N})$, 則有下列情形:

1. $0 \sim t-1$ 組 0a0b 及 $\sum_{i \in s_q^3} P(i) = 3$, 所需次數為
$$(t-1)+1+3 \text{ (情況出現到猜到正解)} = t+3 = \frac{m}{3}+3.$$
2. $0 \sim t-2$ 組 0a0b 及 $\sum_{i \in s_q^3} P(i) = 2$, $\sum_{i \in s_r^3} P(i) = 1$, 所需次數為
$$(t-2)+1+4 = t+3 = \frac{m}{3}+3.$$
3. $0 \sim t-3$ 組 0a0b 及 $\sum_{i \in s_q^3} P(i) = 1$, $\sum_{i \in s_r^3} P(i) = 1$, $\sum_{i \in s_t^3} P(i) = 1$, 所需次數
$$(t-3)+2+4 = t+5 = \frac{m}{3}+3.$$

若 $m = 3t+1$ $(t \in \mathbb{N})$, 則有下列情形:

1. $0 \sim t-1$ 組 0a0b 及 $\sum_{i \in s_q^3} P(i) = 2$, $\sum_{i \in s_r^1} P(i) = 1$, 所需次數為
$$(t-1)+1+3 = t+3 = \frac{m-1}{3}+3.$$
2. $0 \sim t-2$ 組 0a0b 及 $\sum_{i \in s_q^3} P(i) = 1$, $\sum_{i \in s_r^3} P(i) = 1$, $\sum_{i \in s_t^1} P(i) = 1$, 所需次數為
$$(t-2)+2+4 = t+5 = \frac{m-1}{3}+4.$$

若 $m = 3t+2$ $(t \in \mathbb{N})$, 則有下列情形:

1. $0 \sim t-1$ 組 0a0b 及 $\sum_{i \in s_q^2} P(i) = 2$, $\sum_{i \in s_r^3} P(i) = 1$, 所需次數為
$$(t-1)+1+3 = t+3 = \frac{m-2}{3}+3.$$

2. $0 \sim t-1$ 組 0a0b 及 $\sum_{i\in s_q^3} P(i)=2$, $\sum_{i\in s_r^2} P(i)=1$, 所需次數為

$$(t-1)+1+4=t+4=\frac{m-2}{3}+4.$$

3. $0 \sim t-2$ 組 0a0b 及 $\sum_{i\in s_q^3} P(i)=1$, $\sum_{i\in s_r^3} P(i)=1$, $\sum_{i\in s_t^2} P(i)=1$, 所需次數為

$$(t-2)+2+4=t+5=\frac{m-2}{3}+4.$$

總合上述結果, 可推得:

$$K(m,3) \le \left[\frac{m-1}{3}\right]+4 \quad (m>4).$$

接著我只要證明

$$K(m,3) \ge \left[\frac{m-1}{3}\right]+4,$$

就可以證明

$$K(m,3) = \left[\frac{m-1}{3}\right]+4.$$

當 $m \ge 9$ 時, 是先猜 $\left[\frac{m-1}{3}\right]$ 次無關猜法, 根據性質 2.5 可知無關猜法猜到正解時皆猜到 1b, 所需的次數會最多.

若已猜到兩個 1b, 所剩下未知 ab 性的數字 ≥ 4 的時候, 則繼續使用無關猜法猜測; 若所剩下未知 ab 性的數字 $=3$ 時, 根據計算可得 72 組可能正解. 任三個相異數字有 6 種排列, 最佳的情形是 72 組可能正解中有 6 組是由相同的三個數字所組成, 此 6 組可能正解會分別分在 3a, 1a2b, 3b 三種 ab 性, 故剩下 $72-6=66$ 組可能正解數字組, 分別分到剩下的六種 ab 性, 每一種最少也有 11 組可能正解, 到此共猜了 $\left[\frac{m-1}{3}\right]+1$, 11 組可能正解無法用 9 種 ab 性一次判別, 即便以最佳的情形分布, 也至少有兩種 ab 性有兩組以上的可能正解, 故需要兩次猜測確定唯一正解加上一次猜測猜出正解, 即 $K(m,3) \ge \left[\frac{m-1}{3}\right]+4$, 得證. □

6 上界

當有 m 個數字要猜 n 個數字時, 首先我將 m 個數字以 n 個為單位分組, 所以可得到 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 個含 n 個數字的數字組, 所需猜測次數則是猜 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 次無關猜法再加上最糟的情況所需的次數, 由於正解數字的分布確定後最多分布在 n^2 個數字間, 因此 m 為任何大於 n 的數時, 扣除掉猜到 0a0b 的數字組後, 都可以對應到一個 m' 小於 n^2 的情形, 所以 $n^2 < m$, 所需次數才會開始有規律, 而確定正解數字範圍後所需的次數, 就是 $m' \le n^2$ 時, 所需最

多次數的 max $\left(K(m',n)\right)$, 但由於無關猜法分組所需次數已包含在 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$, 因此必須扣除 $\left[\frac{m'-1}{n}\right]$, 所得式子才會正確. 然後便可以得到此式:

$$K(m,n) \le \left[\frac{m-1}{n}\right] + \max\left(K(m'n) - \left[\frac{m'-1}{n}\right]\right) \quad (n \le m' \le n^2 < m).$$

若是猜測方法有所更動, 此式也可以是個良好的上界; 如果猜測方法可以使所需次數減少, 此式仍然可稱為上界; 若使所需次數增加, 那便是不需要採用的猜測方法.

舉例來說 $m = 20$, $n = 3$, 先用無關猜法所需猜測, 需最多次為 $\left[\frac{20-1}{3}\right] = 6$ 次, 若正解數字的分布是在 9 個數字裡, 從研究結果可知所需次數最多且 $K(9,3) = 6$, 扣除掉 $m' = 9$ 時, 無關猜法所需的 $\left[\frac{9-1}{3}\right] = 2$ (因為 $\left[\frac{20-1}{3}\right] = 6$ 已經計算所有無關猜法的次數), 可得 $K(20,3) \le 6+6-2 = 10$.

7 $K(m,4)$

$n = 4$ 的分類種類非常多種, 於是我先以找到 $K(m,4)$ 的值為目標, 根據性質 2.5, 及 (Section 6) 所探討的上界, 只需要討論無關猜法猜到正解皆得到 1b 時的情形, 就可推得 $K(m,4)$.

7.1 $n = 4$, 無關猜法有四組為 1b, 各種猜法各 ab 性的可能正解數目

設四組無關猜法為 $S_a = i_1i_2i_3i_4$, $S_b = i_5i_6i_7i_8$, $S_c = i_9i_{10}i_{11}i_{12}$, $S_d = i_{13}i_{14}i_{15}i_{16}$, 且所得 ab 性皆為 1b, P_1, P_2, P_3, P_4 表示數字組由左而右第一到第四個位置. 已知 i_1 不位於 P_1, i_2 不位於 P_2, 其餘依此類推, 可得圖 1 (* 表示正解數字不會出現的位置).

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}	i_{13}	i_{14}	i_{15}	i_{16}
P_1	*				*				*				*			
P_2		*				*				*				*		
P_3			*				*				*				*	
P_4				*				*				*				*

圖 1: 數字 i 與位置 P 的對應圖

設定一運算符號 $\begin{vmatrix} j_{1.1} & \cdots & j_{n.1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{1.n} & \cdots & j_{n.n} \end{vmatrix}$, 一次選擇 n 個數字, 使每行每列皆有一個數字, 並相乘之, 將所有符合此條件的 n 個數字的乘積相加, 即為 $\begin{vmatrix} j_{1.1} & \cdots & j_{n.1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{1.n} & \cdots & j_{n.n} \end{vmatrix}$ 所求.

7.1.1 從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測

從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測, 假設 $abcd$ 為所選的四個數字, $a_pb_qc_rd_s$ 為其原本所在的位置 (即 a 在 P_p, b 在 P_q, c 在 P_r, d 在 P_s). 設定符號 $R(a_tb_xc_yd_z)$, 若 $t \neq p$, $x \neq q$, $y \neq r$, $z \neq s$ (必須四者都成立), 則 $R(a_tb_xc_yd_z) = 1$, 反之, 則 $R(a_tb_xc_yd_z) = 0$. 舉例來說, 若所選四個數字最初的位置為 $a_1b_2c_3d_4$, 則 $R(a_1b_2c_3d_4) = 0$, $R(a_1b_3c_2d_4) = 0$, $R(a_2b_3c_4d_1) = 1$, $R(a_2c_4d_3) = 1$, 定 $a_1b_2c_3d_4$ 為下一次的猜測的排列位置 (即 a 在 P_1, b 在 P_2, c 在 P_3, d 在 P_4)

$$
\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
P_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
\hline
P_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
\hline
P_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\
\hline
P_4 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\
\hline
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{vmatrix}
a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\
a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\
a'_3 & b'_3 & c'_3 & d'_3 \\
a'_4 & b'_4 & c'_4 & d'_4
\end{vmatrix}
$$

圖 2: $a_1b_2c_3d_4$ 為下一次的猜測的排列位置

$a_1b_2c_3d_4$ 猜測後得到 ab 性 $rapb$, 其排列便為 $A_rB_p(n)$ 種 (但需扣除有 a_p, b_q, c_r, d_s 出現的數字組), 若要求得可能正解組數, 必需再乘上其餘 $n-r-p$ 個正解數字在其他數字內的可能排列, 設定 s'_f 表示未被選擇來猜測的數字中, 屬於 S_s 且位於 P_f 的數字數目. 因此可推得 $a'_p = 3$, $b'_q = 3$, $c'_r = 3$, $d'_s = 3$, 其餘皆為2.

1. 若所得 ab 性為 4a, 可能正解排列組數為

$$R(a_1b_2c_3d_4).$$

2. 若所得的 ab 性為 2a2b, 可能正解排列組數為

$$\begin{aligned} &R(a_1b_2d_3c_4) + R(a_1d_2c_3b_4) + R(a_1c_2b_3d_4) \\ &\quad + R(d_1b_2c_3a_4) + R(c_1b_2a_3d_4) + R(b_1a_2c_3d_4), \end{aligned}$$

1a3b, 4b 同理可得.

3. 若所得的 ab 性為 3a, 可能正解排列組數為

$$R(a_1b_2c_3) \times d'_4 + R(a_1b_2d_4) \times c'_3 + R(a_1c_3d_4) \times b'_2 + R(b_2c_3d_4) \times a'_1,$$

若所得的 ab 性為 2a1b, 可能正解排列組數為

$$\begin{aligned} &R(a_1b_2c_4) \times d'_3 + R(a_1b_2d_3) \times c'_4 + R(a_1d_2c_3) \times b'_4 + R(d_1b_2c_3) \times a'_4 \\ &+ R(a_1c_3b_4) \times d'_2 + R(a_1b_3d_4) \times c'_2 + R(a_1c_2d_4) \times b'_3 + R(c_1b_2d_4) \times a'_3 \\ &+ R(a_4b_2c_3) \times d'_1 + R(b_2a_3d_4) \times c'_1 + R(a_2c_3d_4) \times b'_1 + R(b_1c_3d_4) \times a'_2, \end{aligned}$$

1a2b, 3b 同理可得.

4. 若所得的 ab 性為 2a, 可能正解排列為

$$R(a_1b_2)\times\begin{vmatrix} c'_3 & d'_3 \\ c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}+R(a_1c_3)\times\begin{vmatrix} b'_2 & d'_2 \\ b'_4 & d'_4 \end{vmatrix}+R(a_1d_4)\times\begin{vmatrix} b'_2 & c'_2 \\ b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}$$
$$+R(b_2c_3)\times\begin{vmatrix} a'_1 & d'_1 \\ a'_4 & d'_4 \end{vmatrix}+R(b_2d_4)\times\begin{vmatrix} a'_1 & c'_1 \\ a'_3 & c'_3 \end{vmatrix}+R(c_3d_4)\times\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix},$$

   1a1b, 2b 同理可得.

5. 若所得的 ab 性為 1a, 可能正解排列為

$$R(a_1)\times\begin{vmatrix} b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ b'_3 & c'_3 & d'_3 \\ b'_4 & c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}+R(b_2)\times\begin{vmatrix} a'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_3 & c'_3 & d'_3 \\ a'_4 & c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}$$
$$+R(c_3)\times\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & d'_2 \\ a'_4 & b'_4 & d'_4 \end{vmatrix}+R(d_4)\times\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix},$$

   1b 同理可得.

6. 若所得的 ab 性為 0a0b, 可能正解排列為

$$\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 & d'_3 \\ a'_4 & b'_4 & c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}.$$

7.1.2 從 S_a 找兩個數字, S_b, S_c 各找一個數字猜測

由於 S_a 未被選取的數字有兩個, 因此 $1 \le a' \le 2$, 又 S_d 中沒有被選到數字, 因此 $d' = 3$.各種 ab 性的可能正解排列, 與從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測的情形相似, 將 $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 & d'_3 \\ a'_4 & b'_4 & c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}$ 轉換成 $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & 3 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & 3 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 & 3 \\ a'_4 & b'_4 & c'_4 & 3 \end{vmatrix}$, 再帶入已求得公式中. ($1 \le a' \le 2$, $2 \le b' \le 3, 2 \le c' \le 3$)

7.1.3 從 S_a 找兩個數字, S_b 找兩個數字猜測

由於 S_a, S_b 未被選取的數字有兩個, 因此 $1 \le a' \le 2$, $1 \le b' \le 2$, S_c, S_d 中沒有被選到數字, 因此 $c' = 3$, $d' = 3$. 各種 ab 性的可能正解排列, 與從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字

猜測的情形相似, 將 $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 & d'_3 \\ a'_4 & b'_4 & c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}$ 轉換成 $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & 3 & 3 \\ a'_2 & b'_2 & 3 & 3 \\ a'_3 & b'_3 & 3 & 3 \\ a'_4 & b'_4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, 再帶入已求得公式中. $(1 \le a' \le 2, 1 \le b' \le 2)$

7.1.4 從 S_a 找三個數字, S_b 找一個數字猜測

由於 S_a 未被選取的數字有一個, 因此 $0 \le a' \le 1$, S_c, S_d 中沒有被選到數字, 因此 $c' = 3$, $d' = 3$. 各種 ab 性的可能正解排列, 與從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測的情形相似, 將 $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 & d'_3 \\ a'_4 & b'_4 & c'_4 & d'_4 \end{vmatrix}$ 轉換成 $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & 3 & 3 \\ a'_2 & b'_2 & 3 & 3 \\ a'_3 & b'_3 & 3 & 3 \\ a'_4 & b'_4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, 再帶入已求得公式中. $(0 \le a' \le 1, 2 \le b' \le 3)$

7.2 $n = 4$, 無關猜法有四組為 1b, 第一次的最佳猜測

7.2.1 比較從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測的情形

若證明一 ab 性可能正解組數的最大值, 大於 0a0b 可能正解組數的最小值, 那麼便可將此 ab 性從之後探討最佳猜法的考慮範圍中刪除. 各 ab 性可求得可能正解組數的最大值如下:

不考慮 a_p, b_q, c_r, d_s 並且將 a', b', c', d' 皆以 3 計算, 可得

$$\begin{aligned}
\text{4a} &= 1 \\
\text{2a2b} &= 6 \\
\text{1a3b} &= 8 \\
\text{3a} &= 4 \times 3 &&= 12 \\
\text{2a1b} &= 12 \times 3 &&= 36 \\
\text{1a2b} &= 36 \times 3 &&= 108 \\
\text{3b} &= 8 \times 3 &&= 24 \\
\text{2a} &= 6 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} &&= 108 \\
\text{1a1b} &= 24 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} &&= 432.
\end{aligned}$$

已知若再扣除 a_p, b_q, c_r, d_s 所在的數字組, 以及考慮 a_p, b_q, c_r, d_s 以外的 a', b', c', d' 皆為 2, 所得的可能正解組數必會更小.

對於 2b, 任兩個數字有七種排列, 最多有 42 種排列, 假設 $C_2^4 = 6$ 種任選兩個數字的情形皆視為相同, 可得 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1' & d_1' \\ 1 & 0 & c_2' & d_2' \\ 1 & 1 & c_3' & d_3' \\ 1 & 1 & c_4' & d_4' \end{vmatrix}$. 已知 $c_r' = 3$, $d_s' = 3$, 但不確定 $r = s$ 及 $r \neq s$ 何者較佳, 於是假設最佳情形為: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, 計算後可得可能正解組數 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \times 6 = 528$ 組.

對於 1a, 將四種可能排列視為相同, 也可以得可能正解 $4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 316$ 組.

考慮 a_p, b_q, c_r, d_s 的情況下, 0a0b 所得的可能正解組數的最小值為 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 576$, 皆大於前面所計算的各 ab 性可能正解組數的最大值. 所以接下來我可以只考慮 1b 及 0a0b 兩種 ab 性的情形作為選擇最佳猜法的依據.

已知所得的 ab 性為 0a0b, 可能正解排列為 $\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3' \\ a_4' & b_4' & c_4' & d_4' \end{vmatrix}$.

而所得 ab 性為 1b, 可將公式中可能正解排列的 42 項簡化. 所猜測的 a_1, b_2, c_3, d_4 不可能是所得 ab 性為 1b 後的可能排列, a_p, b_q, c_r, d_s 亦不可能, 設定 $\begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' & c_1'' & d_1'' \\ a_2'' & b_2'' & c_2'' & d_2'' \\ a_3'' & b_3'' & c_3'' & d_3'' \\ a_4'' & b_4'' & c_4'' & d_4'' \end{vmatrix}$, 使 $a_1'', a_p'', b_2'', b_q'', c_3'', c_r'', d_4'', d_s''$ 皆為 0, 其餘皆為 1 (即可能為所得 ab 性為 1b 後的正解數字),

於是可得可能正解排列組數為

$$\begin{vmatrix} a_1'' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2'' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3'' & b_3' & c_3' & d_3' \\ a_4'' & b_4' & c_4' & d_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1'' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2'' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3'' & c_3' & d_3' \\ a_4' & b_4'' & c_4' & d_4' \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1'' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2'' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3'' & d_3' \\ a_4' & b_4' & c_4'' & d_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & d_1'' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2'' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3'' \\ a_4' & b_4' & c_4' & d_4'' \end{vmatrix}.$$

最佳情形為當 $p = q = r = 4, s = 3$, 其 0a0b 及 1b 的可能正解組數如下:

$$0\text{a}0\text{b} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 600$$

$$1\text{b} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 576.$$

要證明此為最佳情形, 先從計算較快速的 0a0b 來看, 若有猜法得 ab 性 0a0b 的可能正解組數 < 600, 再檢驗此猜法得 ab 性為 1b 的可能正解組數:
經計算可得

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$> \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 600 > \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 576.$$

再檢驗 $p = q = r = s$ 時, ab 性為 1b 的可能正解組數為

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 648,$$

得證.

7.2.2 從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字的最佳猜測與從 S_a 找兩個數字, S_b, S_c 各找一個數字猜測的比較

根據從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測的經驗, 先比較 0a0b 與 1b, 若從 S_a 找兩個數字, S_b, S_c 各找一個數字猜測的情形的 0a0b 與 1b 可能正解組數 < 600, 再回頭檢驗其他 ab 性.

猜測所得 ab 性為 0a0b 的可能正解組數:

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' & 3 \\ a_2' & b_2' & c_2' & 3 \\ a_3' & b_3' & c_3' & 3 \\ a_4' & b_4' & c_4' & 3 \end{vmatrix} (1 \le a' \le 2,\ 2 \le b' \le 3,\ 2 \le c' \le 3),$$

可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 614 > \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 606 > 600 > \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 564.$$

檢驗所得 ab 性為 0a0b 的可能正解組數 < 600 的猜測, 其得 ab 性為 1b 的可能正解組數:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 600.$$

7.2.3 比較從 S_a 找兩個數字, S_b 找兩個數字猜測的情形

若所得 ab 性為 1b, 最小值為 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \times 2 = 648$, 故不考慮此猜法.

7.2.4 比較從 S_a 找三個數字, S_b 找一個數字猜測的情形

若所得 ab 性為 1b, 最小值為 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 432$, 但此情形亦為 1a 的最大值, 即 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 648$, 故不考慮.

7.3 $n = 4$, 無關猜法有四組為 1b, $K(m,4) \leq \left[\frac{m-1}{4}\right] + 7$

從 7.2 可知, 有兩種猜法, 皆可使所得 ab 性的可能排列的最大值為 600.

我選擇從 S_a, S_b, S_c, S_d 各找一個數字猜測的情形中, a_p, b_q, c_r, d_s 符合 $p = q = r = 4$, $s = 3$ 的猜測方式, 所得 ab 性為 0a0b 時, 可能排列有最大值, 將 0a0b 的四個數字刪除, 可得圖 3.

設所猜測的數字組為 $abcd$, 猜測的排列為 $a_1b_2c_3d_4$.

	i_1	i_2	i_3	i_5	i_6	i_7	i_9	i_{10}	i_{11}	i_{13}	i_{14}	i_{15}
P_1	*			*			*			*		
P_2		*			*			*			*	
P_3			*			*			*			
P_4												*

a_1	*		
*	b_2		
		c_3	*
		*	d_4

圖 3: 猜測數字的排列為 $a_1b_2c_3d_4$, 選擇猜測 $i_2i_1i_{16}i_{11}$

計算各種猜法的各可能正解數目與 7.2 所討論的幾乎相同.

下一次猜測的選擇為, 從 S_a 選兩個數字, 再從 S_d, S_b各找一個數字猜測, 而 $i_2i_1i_{16}i_{11}$ 如圖 3, 所得 ab 性的可能正解排列以 1b 的

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 148$$

為最大值. 稍做整理後可得圖 4.

	i_3		i_5	i_6	i_7	i_9	i_{10}	i_{14}	i_{15}
P_1			*			*		*	
P_2				*			*		*
P_3	*				*				
P_4									

	i_1	i_2	i_{11}	i_{16}
P_1	*	*		
P_2	*	*		
P_3			*	*
P_4			*	*

圖 4: 兩次猜測後所得數字 i 與位置 P 對應圖

我下一步的猜測選擇 $i_{16}i_5i_6i_9$, ab 性的可能正解排列組數仍是以 1b 為最大, 即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 42.$$

	i_3	i_7	i_{10}	i_{14}	i_{15}
P_1				*	
P_2			*		*
P_3	*	*			
P_4					

	i_1	i_2	i_{11}	i_{16}
P_1	*	*		*
P_2	*	*		
P_3			*	*
P_4			*	*

	i_5	i_6	i_9	i_{16}
P_1	*		*	*
P_2	*	*		
P_3		*		*
P_4			*	*

圖 5: 三次猜測後所得數字 i 與位置 P 對應圖

接著, 得到 ab 性後, 選擇 $i_6i_{14}i_1i_{10}$ 為下一次的猜測, ab 性的可能正解排列組數仍是以 1b 為最大, 共有 12 組, 分別是 $i_3i_{11}i_{15}i_6$, $i_3i_{15}i_{11}i_6$, $i_3i_{11}i_5i_{14}$, $i_{11}i_3i_5i_{14}$, $i_3i_{11}i_{14}i_5$, $i_{11}i_3i_{14}i_5$, $i_7i_9i_2i_{14}$, $i_7i_9i_{14}i_2$, $i_7i_9i_{15}i_1$, $i_{15}i_7i_9i_1$, $i_3i_{16}i_{10}i_7$, $i_7i_{16}i_{10}i_3$, 無法再經一次猜測即確定為一正解, 故可得

$$K(m,4) \leq \left[\frac{m-1}{4}\right] + 7, \quad (m \geq 16).$$

7.4 $K(m,4)$ 的一般式的探討

已知當 $m \geq 16$ 必是先猜 $\left[\frac{m-1}{4}\right]$ 次無關猜法, 最糟糕的情形是分別猜到 1b. 若猜到三個 1b, 所剩未知 ab 性的數字 ≥ 5 的時候, 則繼續猜無關猜法, 若所剩未知 ab 性的數字 $= 4$ 時, 可排列出 $648 \times 4 = 2592$ 個可能的正解, 任四個數字可能的排列有 24 個, 最佳的情形是 2592 個可能解中有 24 個由一樣的三個數字組成, 此 24 個分別分在 4a, 2a2b, 1a3b, 4b 四類, 剩下 $2592 - 24 = 2568$ 個可能排列的正解數字組, 分別分到 $14 - 4 = 10$ 種 ab 性, 最理想的情形是平均分到 $2568 \div 10 = 256.8$ 可能的正解排列, 再以一樣的方式分一次, $(256.8 - 24) \div 10 = 23.28$ 種可能正解, 無法用 14 種 ab 性一次判別, 因此可得下界 $K(m,4) \geq \left[\frac{m-1}{4}\right] + 5$, 又在 7.1, 7.2, 7.3 的討論中, 可得 $K(m,4) \leq \left[\frac{m-1}{4}\right] + 7$, 因此我可以

確定 $K(m,4)$ 的範圍, $\left[\frac{m-1}{4}\right]+7 \geq K(m,4) \geq \left[\frac{m-1}{4}\right]+5$, 未來將以更嚴謹的方法提高上界或降低下界以求得 $K(m,4)$ 此值.

參考文獻

[1] 盧開澄, 盧華明,《組合數學》, 第三版, 中華人民共和國, 清華大學出版社, 357 $\sim$ 386 頁, 2002 年.

[2] 陳善泰, "Workshop on Algorithms and Computational Molecular Biology：An Optimal strategy for 2×n AB Games", 2002.

[3] 陳善泰, "On the Study of Optimization Algorithms for Deductive Games and Related Problems", 2004.

[4] Barteld Kooi, "Yet Another Mastermind Strategy"; *ICGA Journal*, (2005), 13-20.