

軌跡

胡晉傑

國立新竹高級中學

Abstract

The study derived from the definition of ellipse: the sum of the distance between one moving point and two points is constant. I changed the definition into three lines, and the trail is composed of point P that satisfies $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) + m_3 \cdot d(P, L_3) = \text{const}$. I probed into the situation of when the constant is greater than 0 or equal 0, and I enable m_1, m_2, m_3 to be smaller than 0 or greater than 0. As the result, I found that the trail I want can be got by using a plane for cutting the quadrangular pyramid, like the way to have a conic section from a cone. I also found the relations between the variables of the trail and the quadrangular pyramid. Additionally, I changed the third line into another point A , which has conic section for the trail, and it is the point A that is the focal point; On the other way, from the discussion of the eccentricity, I constructed a triangle model that stands for the relations between m_1, m_2, m_3 and slope of L_2 , and the sort of conic section which trail belongs to.

摘要: 本研究啓發於橢圓定義: 動點到兩定點距離和為定值的軌跡, 研究中將其推廣至動點到三線距離和為定值的軌跡, 並在到各線的距離前加上係數, 也就是 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) + m_3 \cdot d(P, L_3) = \text{定值}$. 其中討論了定值大於等於 0 的情形, 並使 m_1, m_2, m_3 可正可負. 研究得出的結果是我發現我所得到的軌跡圖形, 可以使用類似圓錐曲線的射影幾何, 在直四角錐面上截出我想要的軌跡, 並發現軌跡與模型之間各變數的關係. 再者我將第三線改成一定點, 得出的軌跡圖形為圓錐曲線類圖形, 且此一圖形的焦點就是這一定點; 另外, 從離心率上的討論我建構了一個三角形模型來判斷在兩線一點的軌跡中何時會出現什麼圓錐曲線類型.

1 研究簡介

在高中二年級下學期第四冊數學課本中, 談到關於橢圓的定義: 在平面上動點到兩定點的距離和為一定值 (此定值大於兩點間的距離) 的點集合所形成的軌跡即為橢圓類, 也就是 $d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{定值}$. 我就想如果我把兩點換成兩線, 或一點一線的軌跡會是如何? 又如果我再加入一線變成三線, 也就是滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) + m_3 \cdot d(P, L_3) = \text{定值}$ 的點集合所形成的軌跡為何? 而又若將三線換成兩線一點的情況又是怎樣呢?

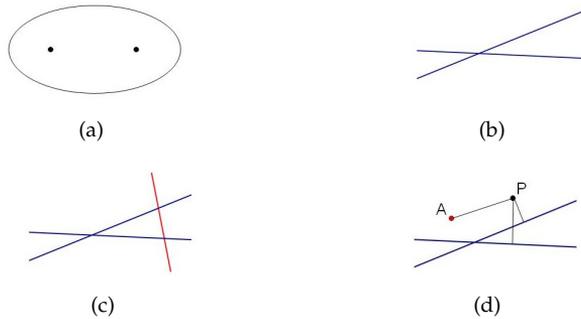


圖 1

面對上述問題,我所使用的方法是先使用繪圖軟體作圖,類似做實驗觀察,觀察所做的軌跡圖看起來像什麼?有什麼特性?軌跡圖與原本的幾何元素之間的關係為何?有了觀察之後,我提出我的猜想:軌跡圖是一次直線?又或是二次的圓錐曲線?軌跡圖的樣子是否與直線的斜率夾角等有關?接著我便使用幾何論證與解析幾何論證交叉證明我所提出的猜想是對或錯,並加以修正;而後再試著去解釋我所發現並已證明完成的軌跡圖性質,是否有在圖形上呈現它的幾何意義,並提出一套模型去加以詮釋這個性質.

以下的簡介中,我以 d_i 來表示 $d(P, L_i)$ 或 $d(P, A)$ 的總稱,而不失一般性,令定值 $= c$, 且 $c \geq 0$.

在「平面上動點 P 滿足 $m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 = c$ 」的部份中:若為兩點或一點一線,軌跡圖為圓錐曲線;若為兩線,則為平行四邊形.

而在「平面上動點 P 滿足 $m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 + m_3 \cdot d_3 = c$ 」的部份中,我先討論 $c = 0$ 且為三線的情形: m_1, m_2, m_3 皆大於 0 時,軌跡不存在; m_1, m_2 兩個同號, m_3 為異號時,我分別就不同種類的三線位置去做討論,包括:三平行線,兩平行線一不平行線,三線交於一點與兩兩相交線.兩兩相交線的情況可視為一般化,其他都只是兩兩相交線中的特例而已.而所繪出的軌跡圖共有五種形式:

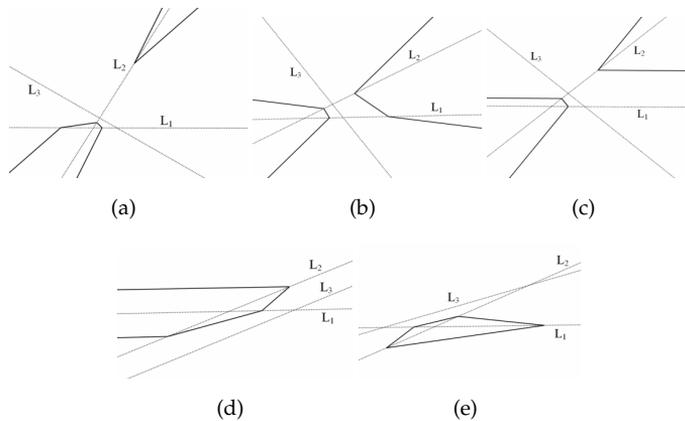


圖 2

在三線 L_1, L_2, L_3 的情形，動點 P 滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = |m_3| \cdot d(P, L_3)$ ，我發現這五種情形皆是由線段或射線組成的軌跡圖，在一般的情形中，圖形會出現 n 個折點，其中 $2 \leq n \leq 4$ ；而 $n \neq 4$ 的情形皆為 $n = 4$ 的極端化；同時我也發現三線兩兩之間的夾角會決定何時會出現上述五種情形，在定理 2.2 會詳加敘述。在這四個折點之間，他們會滿足內外分點比的性質 (引理 2.4)。

在觀察上述五種情形後，我發現這五種情形的形狀與圓錐曲線十分類似，他們都有雙曲線，拋物線或橢圓的形式，只是非曲線而為折線；因而我發現軌跡圖可以利用射影幾何的方法，類比「圓錐曲線類可由直圓錐面與平面相截而成」的性質，使用「直四角錐面」來截出所有在平面上觀察到的軌跡圖。而在平面上的一些變數關係也可在直四角錐模型中觀察到，並具有幾何意義在其中。

而在 $m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 + m_3 \cdot d_3 = c$ 中的 $c > 0$ 的部份，若 m_1, m_2, m_3 皆大於 0 時，所做軌跡為一封閉六邊形； m_1, m_2 大於 0 而 m_3 小於 0 時， $m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 = m_3 \cdot d_3 + c$ ，我發現軌跡會變成複合軌跡，也就是軌跡是由兩組折線各取一部份而成，套用在角錐模型上，我把四角錐頂點的位置作了調整，讓它上下平移 c 的三角函數值，在各取所需要的部份；而 m_1, m_2 小於 0 而 m_3 大於 0 時，繪出圖形仍為複合的軌跡圖，但在角錐上的幾何意義，卻是將點位置做與前述的相反方向位移，而平移量仍舊是 c 的三角函數值。

在兩線一點裡面，動點 P 滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, A)$ ，所繪出的軌跡圖皆為圓錐曲線類的圖形，且軌跡圖在兩線所分割平面的四個區域中各為不同的圓錐曲線；藉由解析幾何的運算，我創造出一種以 m, n 為兩邊， L_1, L_2 的夾角為夾角的三角形模型，用來判斷 m, n, l 在什麼條件下會出現什麼圓錐曲線類型。

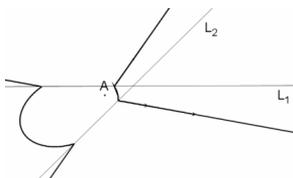


圖 3

接著我使用原解析幾何的軌跡方程式，強制將方程式配成 $e = \frac{PF}{d(P,L)}$ 的形式，直接求出圓錐曲線的離心率，間接得到圓錐曲線的焦點與準線，而這個焦點剛好是兩線一點中的 A 點，而準線與離心率亦只與 L_1, L_2 的夾角大小有關，因此我最終得到兩線一點間的相對位置與軌跡圖的關係： L_1, L_2 的夾角會影響所形成的圓錐曲線類型與大小，而 A 點只影響軌跡圖的位置關係，也就是 A 點的移動會平移整個軌跡圖。

最後感謝丘成桐數學獎讓我有一個這麼好的機會能與教授和同學們一同分享在數學研究上的知識與喜悅；感謝評審們對我的肯定與鼓勵；感謝國立新竹高中給我的環境與栽培；感謝新竹高中洪誌陽老師的指導與付出；此份作品在初期尚有另一位共同作者，此一作者曾以本作品初期之部份內容投稿旺宏科學獎的競賽，但很可惜地未獲青睞；最後，感謝父母和同學們的支持與陪伴，希望大家能繼續一同在數學研究上加以深造，享受思考，享受與人分享討論的樂趣。

2 本研究之詳細內容

(A). $m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 = const.$

2.1 兩點與一點一線

在兩點中 $m_1 \cdot d(P, A_1) + m_2 \cdot d(P, A_2) = c$; m_1, m_2 皆大於 0, 軌跡圖為橢圓類; $m_1 \cdot m_2 < 0$, 圖形為雙曲線類; m_1, m_2 皆小於 0, 軌跡為空集合, 不存在. 在一點一線中 $m_1 \cdot d(P, L) + m_2 \cdot d(P, A) = c$, 所得軌跡亦為圓錐曲線類; 此二部份因軌跡圖方程式本身即為圓錐曲線定義, 故本文不多加著墨.

2.2 兩線

原命題: 平面上兩相異線 L_1, L_2 與動點 P 滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = const.$, 求動點 P 的軌跡圖?

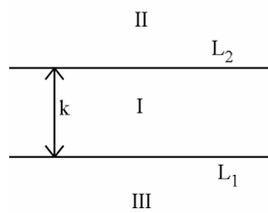


圖 4

2.2.1 兩平行線

命題: 已知平面上有兩平行線 L_1, L_2 相距 k , 動點 P 滿足 $d(P, L_1) + d(P, L_2) = \text{定值} = d$, 令 $T = \{P \in R^2 | P \text{ 滿足 } d(P, L_1) + d(P, L_2) = \text{定值}\}$, 求 T ? 其中 $d \geq k$.

命題結論:

1. 當 $d = k \Leftrightarrow T = I \cup L_1 \cup L_2$.
2. 當 $d > k \Leftrightarrow T$ 在 II, III 區分別距 $L_2, L_1 \frac{d-k}{2}$ 處. (圖 5 的 L)

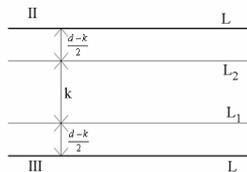


圖 5

2.2.2 兩相交線

定理 2.1. 平面上兩相異線 L_1, L_2 與動點 P 滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = \text{const.}$, 動點 P 的軌跡為一平行四邊形, 如圖 6.

證明. 1. 證明所繪軌跡 T 即為所求:

在 L_1, L_2 上各找一點 P_1, P_2 , 使得 P_1, P_2 滿足所要求條件, 作 $\overline{P_2A} \perp L_1$ 於 A , $\overline{P_1B} \perp L_2$ 於 B , 且令 $\overline{P_2A} = d_1$, $\overline{P_1B} = d_2$, 任取 $P \in \overline{P_1P_2}$ 作 $\overline{PC} \perp L_1$ 於 C , $\overline{PD} \perp L_2$ 於 D , 令 $\overline{P_1P} : \overline{P_2P} = a : b$, 欲證

$$m_1 \cdot \overline{PC} + m_2 \cdot \overline{PD} = \text{const.} = c, c \in \mathbb{R}^+,$$

如圖 7. 因為 $P_1, P_2 \in T$, 即 $m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2 = c$, 因為 $\triangle P_1PC \sim \triangle P_1P_2A$ (AA), $\triangle P_2PD \sim \triangle P_2P_1B$ (AA), 所以

$$m_1 \cdot \overline{PC} + m_2 \cdot \overline{PD} = m_1 \cdot \frac{b}{a+b} \cdot d_1 + m_2 \cdot \frac{a}{a+b} \cdot d_2 = m_1 \cdot d_1 \cdot \frac{a+b}{a+b} = c.$$

其他三區軌跡亦同理.

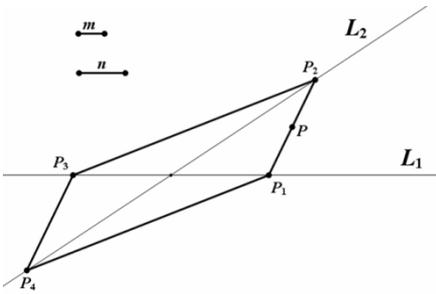


圖 6

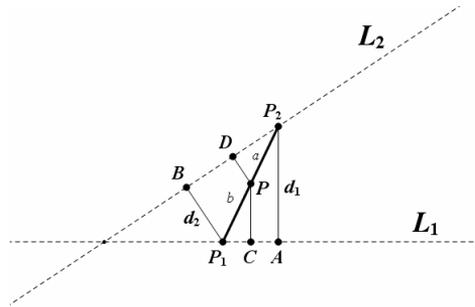


圖 7

2. 證明其他區域不合:

不失一般性, 令 $P \in \overline{P_1P_2}$, 作射線 \overrightarrow{OP} , 圖 8, 令 $P' \in \overrightarrow{OP} - P$, $\overline{P'H} \perp L_1$ 於 H , $\overline{P'K} \perp L_2$ 於 K .

(a) 當 $P' \in \overrightarrow{OP} - P$, 因為 $\overline{P'I} > \overline{P'H}$, $\overline{P'J} > \overline{P'K}$, 所以 $m_1 \cdot \overline{P'I} + m_2 \cdot \overline{P'J} > m_1 \cdot \overline{P'H} + m_2 \cdot \overline{P'K} \Rightarrow P' \notin T$.

(b) 同理, 當 $P' \in \overrightarrow{OP} - \overline{OP} \Rightarrow m_1 \cdot \overline{P'I} + m_2 \cdot \overline{P'J} > m_1 \cdot \overline{P'H} + m_2 \cdot \overline{P'K} \Rightarrow P' \notin T$.

(c) 由 (a), (b) 可以分別證明圖 9 與圖 10 所成區域皆不合.

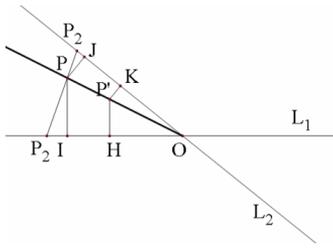


圖 8

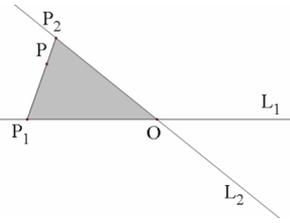


圖 9

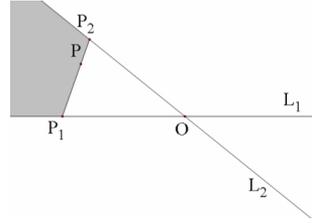


圖 10

(d) 同理可證被 L_1, L_2 分割的另外三塊區域, 故 $T = \{P \in R^2 | P \text{ 滿足 } m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = \text{const.}\}$ 時, T 為平行四邊形. \square

現在我們將 m_2 前的正號改成負號: $m_1 \cdot d(P, L_1) - m_2 \cdot d(P, L_2) = \text{const.}$, 所得的軌跡圖為圖 11.

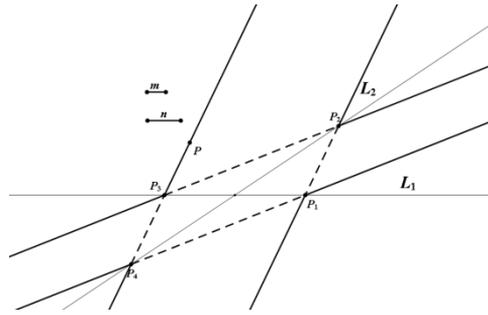


圖 11

其中虛線為 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = \text{const.}$ 的軌跡圖, 實線部分為 $|m_1 \cdot d(P, L_1) - m_2 \cdot d(P, L_2)| = \text{const.}$ 的軌跡圖.

證明. $|L_1|, |L_2|$ 意義說明, 令 $p(x, y), L : ax + by + c = 0, |L| = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 令 L_1, L_2 交點為坐標原點定坐標系.

由定理 2.1 已知虛線為 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = \text{const.}$ 的軌跡圖, 也就是 $m_1 \cdot |L_1| + m_2 \cdot |L_2| = \text{const.}$, 若 L_1, L_2 同時取正, 絕對值拆開後的方程式為 $m_1 \cdot L_1 + m_2 \cdot L_2 = \text{const.}$ 也就是 $\overrightarrow{P_1P_2}$, 在 $(+, +)$ 區所得軌跡為 $\overline{P_1P_2}$.

欲求的方程式 $m_1 \cdot |L_1| - m_2 \cdot |L_2| = \text{const.}$ 若 L_1 取正, L_2 取負, 所得方程式 $m_1 \cdot L_1 + m_2 \cdot L_2 = \text{const.}$, 亦為 $\overrightarrow{P_1P_2}$, 在 $(+, -)$ 區所得軌跡為 $\{\overrightarrow{P_1P_2} - \overline{P_1P_2}\}$; 其他部分亦同, 得證. \square

$$(B). m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 + m_3 \cdot d_3 = \text{const.}$$

2.3 三線

原命題: 平面上三相異線 L_1, L_2, L_3 與滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) + m_3 \cdot d(P, L_3) = \text{const.}$ 動點 P , 求動點 P 的軌跡圖?

$$2.3.1 \quad m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) + m_3 \cdot d(P, L_3) = c$$

作圖.

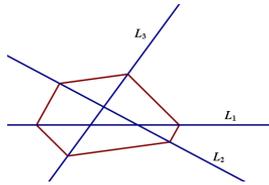


圖 12

作圖結果為一六邊形封閉圖形, 且 $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ 時, 六邊形對邊平行.

證明. $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) + m_3 \cdot d(P, L_3) = c$ 軌跡為一六邊形, 我先讓 L_1, L_2, L_3 交於同一點:

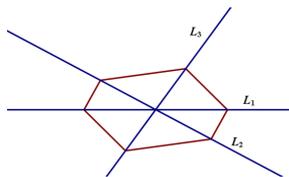


圖 13

令 $L_1 : y = 0, L_2 : y = kx, L_3 : y = ax$, 軌跡方程式

$$m_1|y| + \frac{m_2|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} + \frac{m_3|ax - y|}{\sqrt{a^2 + 1}} = c,$$

分別取正負號出來會有三種斜率, 六條直線, 那六條分別是圖 13 所見的各區六個線段, 現在我把 L_3 移開, 令 $L_3 : y = ax + b$, 軌跡方程式變成

$$m_1|y| + \frac{m_2|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} + \frac{m_3|ax - y + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = c,$$

因為 b 是加在常數的地方, 所以不會影響圖形出現之後的斜率, 所以絕對值取正負號拆開後仍就可得三種斜率的六條直線, 在各區取線段之後, 軌跡亦與會突出的圖形相同. \square

2.3.2 由極端化情形找 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3)$ 軌跡圖

為了要找地方著手問題, 我先將 m_1, m_2, m_3 取成 1, 取命題的極端情形. 命題變為平面上三不平行線 L_1, L_2, L_3 與一動點 P , 使得 $d(P, L_1) + d(P, L_2) = d(P, L_3)$, 令軌跡圖為 T , 不失一般性, 我們可以以圖 14 為區域圖.

要在 L_2 上找一個軌跡點 $P_1, P_1 \in T$, 使 P_1 符合 $d(P_1, L_1) + d(P_1, L_2) = d(P_1, L_3)$, 因為 $P_1 \in L_2$, 所以

$$d(P_1, L_2) = 0 \Rightarrow d(P_1, L_1) = d(P_1, L_3)$$

作 L_1, L_3 銳交角平分線交 L_2 於 P_1, P_1 即為所求.

同理, $\exists P_2 \in (L_1 \cup L_2) \cap T$, 如圖 15, 軌跡為

$$T = (\overrightarrow{P_1P_3} \cup \overrightarrow{P_2P_4}) - (\overline{P_1P_3} \cup \overline{P_2P_4}) + (\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4}).$$

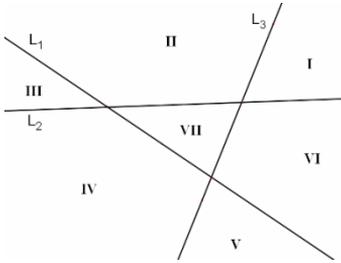


圖 14

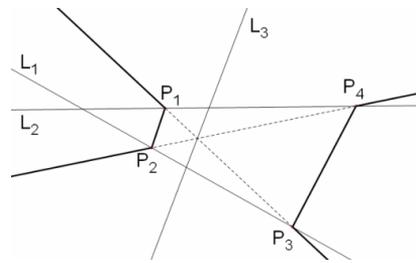


圖 15

定理 2.2. 所得圖形為滿足命題的動點 P 的軌跡.

證明. 1. $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4}$ 部分 (圖 16):

不失一般性, 在 $\overline{P_1P_2}$ 上取一動點 P , 作 $\overline{PX} \perp L_1$ 於 X , $\overline{PY} \perp L_2$ 於 Y , $\overline{PZ} \perp L_3$ 於 Z . 欲證 $\overline{PX} + \overline{PY} = \overline{PZ}$, 作 $\overline{P_1X_1} \perp L_1$, $\overline{P_1Z_1} \perp L_3$, $\overline{P_2Y_2} \perp L_2$, $\overline{P_2Z_2} \perp L_3$, 在 $\triangle PXP_2$ 和 $\triangle P_1X_1P_2$ 中, 因為 $\angle PP_2X = \angle P_1P_2X_1$, $\angle PXP_2 = \angle P_1X_1P_2 = 90^\circ$, 所以

$$\triangle PXP_2 \sim \triangle P_1X_1P_2 (AA), \triangle PYP_1 \sim \triangle P_2Y_2P_1 (AA).$$

令 $\overline{P_1X_1} = a$. 目前 P_1 為 $\angle ABC$ 角平分線上一點, 所以 $\overline{P_1X_1} = \overline{P_1Z_1} = a$. 同理, 令 $\overline{P_2Y_2} = b$, 因 $\overline{P_2Y_2} = \overline{P_2Z_2} = b$, 則

$$\overline{PX} : \overline{P_1X_1} = \overline{P_2P} : \overline{P_2P_1} \Rightarrow \overline{PX} = \frac{\overline{P_1X_1} \cdot \overline{P_2P}}{\overline{P_2P_1}} = a \cdot \frac{\overline{P_2P}}{\overline{P_2P_1}}, \quad (1)$$

$$\overline{PY} : \overline{P_2Y_2} = \overline{P_1P} : \overline{P_1P_2} \Rightarrow \overline{PY} = \frac{\overline{P_2Y_2} \cdot \overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}} = b \cdot \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}, \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \overline{PX} + \overline{PY} = a \cdot \frac{\overline{P_2P}}{\overline{P_2P_1}} + b \cdot \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{a\overline{P_2P} + b\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}.$$

因為 $\overline{P_1Z_1} \perp L_3, \overline{PZ} \perp L_3, \overline{P_2Z_2} \perp L_3$, 且 $\overline{P_1Z_1} \parallel \overline{PZ} \parallel \overline{P_2Z_2}$, 可得

$$\overline{PZ} = \frac{\overline{P_1P} \cdot \overline{P_2Z_2} + \overline{P_2P} \cdot \overline{P_1Z_1}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{a\overline{P_2P} + b\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}},$$

所以

$$\overline{PX} + \overline{PY} = \frac{a\overline{P_2P} + b\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}} = \overline{PZ}.$$

證畢, 所繪軌跡圖上的動點皆滿足命題條件.

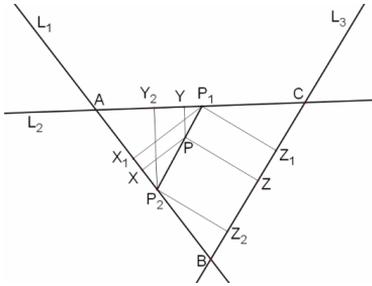


圖 16

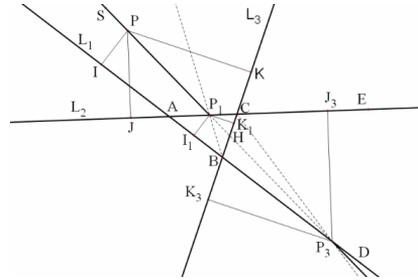


圖 17

2. $\overline{P_1S} \cup \overline{P_2T} \cup \overline{P_3U} \cup \overline{P_4V}$ 部分: 同上理, 可得證 (圖 17).

3. 不合部分:

其他區部分分成 13 個區塊, 如圖 18, 在分區作證明.

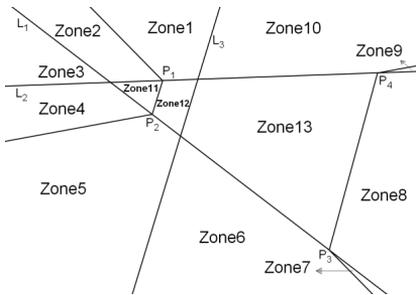


圖 18

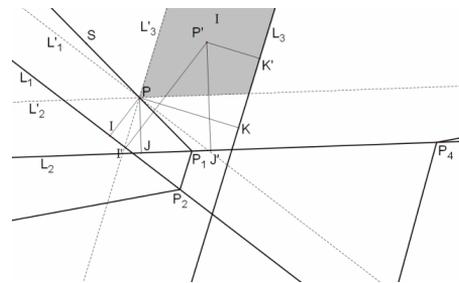


圖 19

(a) 區域 1 (圖 19):

在 $\overline{P_1S}$ 取一動點 P , 作 $\overline{PI} \perp L_1$ 於 I , $\overline{PJ} \perp L_2$ 於 J , $\overline{PK} \perp L_3$ 於 K , 已知 $\overline{PI} + \overline{PJ} = \overline{PK}$, 作 $L'_1 \parallel L_1, L'_2 \parallel L_2, L'_3 \parallel L_3$, 令 L_3, L'_2, L'_3 在區域 1 中圍成區塊為 I , 在 I 中取一動點 P' , 因為 $L'_1 \parallel L_1$, 所以 $\overline{P'I} > \overline{PI}$, 因為 $L'_2 \parallel L_2$, 所以

$\overline{P'J'} > \overline{PJ}$, 因為 $L'_3 \parallel L_3$, 所以

$$\begin{aligned} \overline{P'K'} < \overline{PK} &\Rightarrow \overline{PI} + \overline{PJ} = \overline{PK} > \overline{P'K'} \\ &\Rightarrow \overline{P'I'} + \overline{P'J'} > \overline{P'K'} \\ &\Rightarrow \text{在 I 中任意點皆不合.} \end{aligned}$$

因 P 為 $\overrightarrow{P_1S}$ 上的動點, 隨著 P 移動, I 可以涵蓋整個區域 1, 故區域 1 不合.

(b) 區域 2 ~ 13:

用類似區域 1 的方法, 皆可得證區域 2 ~ 13 不合. □

我發現其實軌跡不只這一種圖形, 隨著三線的夾角改變, m_1, m_2, m_3 取 1 的時候會出現以下五種圖形:

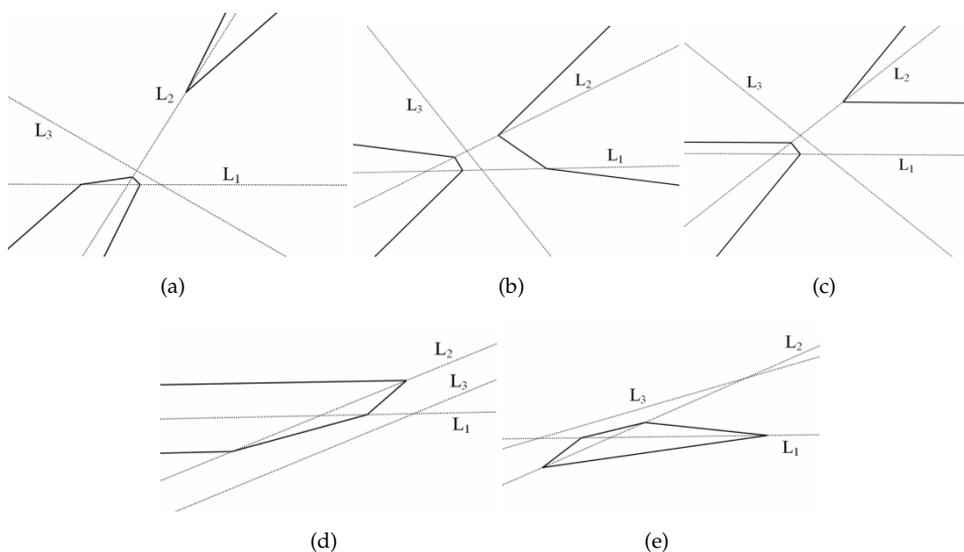


圖 20

2.3.3 $m \cdot d(P, L_1) + n \cdot d(P, L_2) = l \cdot d(P, L_3)$

令 $L_1 : y = 0, L_2 : y = (\tan \theta)x, L_3 : y = (\tan \phi)x$

定理 2.3.

$$\frac{\sin \phi}{\sin \theta} > \frac{n}{l} \quad \text{或} \quad \frac{\sin \phi - \theta}{\sin \theta} > \frac{m}{l'}$$

才會有軌跡圖.

1. 令 $d(P, L_1) = d_1, d(P, L_2) = d_2, d(P, L_3) = d_3$, 作 $A, C \in L_1, B, D \in L_2$, 且 $d(A, L_2) = d_2, d(C, L_2) = d_2, d(B, L_1) = d_1, d(D, L_1) = d_1$, 連接 A, B, C, D 所形成的平行四邊形為 $m \cdot d(P, L_1) + n \cdot d(P, L_2) = \text{定值的圖}$.

2. 作 $L'_3, L''_3 \parallel L_3$, 且相距為 d_3 的兩條線交 1. 的平行四邊形於 $P_i, i \in N$, 則隨定值的增大將所有的 P_i 連在一起形成軌跡圖, 如圖 21 (粗線), 我發現當 (m, n, l) 為某一數組時, 會沒有圖形, 如圖 23.

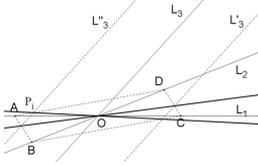


圖 21

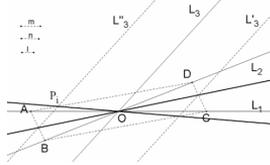


圖 22

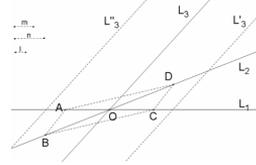


圖 23

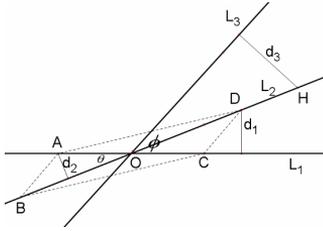


圖 24

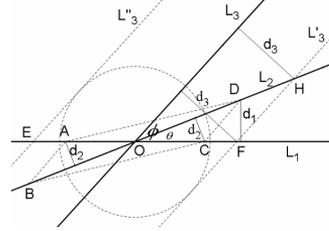


圖 25

證明. 我們發現當平行四邊形的四個頂點 A, B, C, D 要與 L'_3, L''_3 , 才会有軌跡圖的出現. 所以我們就這項性質和解析幾何加以討論. 令

$$\begin{aligned} L_1 : y &= 0, \quad L_2 : y = (\tan \theta)x, \quad L_3 : y = (\tan \phi)x, \\ d(B, L_1) &= d_1, \quad d(A, L_2) = d_2, \quad d(H, L_3) = d_3, \\ m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) &= m_3 \cdot d(P, L_3) = d, \end{aligned}$$

如圖 24, 25 出現圖形 $\Rightarrow \overline{OC} > \overline{OF}$ 或 $\overline{OD} > \overline{OH}$.

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \frac{d_2}{\sin \theta} = \frac{d}{n \cdot \sin \theta}, \quad \overline{OF} = \frac{d_3}{\sin \phi} = \frac{d}{l \cdot \sin \phi} \\ \overline{OD} &= \frac{d_1}{\sin \theta} = \frac{d}{m \cdot \sin \theta}, \quad \overline{OH} = \frac{d_3}{\sin \phi - \theta} = \frac{d}{l \cdot \sin \phi - \theta} \\ \overline{OC} > \overline{OF} &\Rightarrow \frac{1}{n \cdot \sin \theta} > \frac{1}{l \cdot \sin \phi} \Rightarrow \frac{\sin \phi}{\sin \theta} > \frac{n}{l}, \\ \overline{OD} > \overline{OH} &\Rightarrow \frac{1}{m \cdot \sin \theta} > \frac{1}{l \cdot \sin \phi - \theta} \Rightarrow \frac{\sin \phi - \theta}{\sin \theta} > \frac{m}{l}. \quad \square \end{aligned}$$

引理 2.4. 四個折點的距離滿足內外點分比.

在三線的軌跡圖中, 我們發現有如以下的性質:

由 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3)$, 不失一般性, 可令 $m_3 = 1$, 在 L_2 上取 M 為 L_2 與 L_3 之交點, 取 O 為 L_1 與 L_2 之交點, 取 B, C 為 L_2 與軌跡之交點.

M, B, O, C 滿足 $\frac{MB}{OB} = \frac{MD}{OD}$, 即 $(MO, BC) = -1$.

證明. 如圖 26. 以封閉軌跡圖形為例, 作 $\overline{BE} \perp L_3$ 於 E , $\overline{BF} \perp L_1$ 於 F ; $\overline{DG} \perp L_3$ 於 G , $\overline{DH} \perp L_1$ 於 H , B 滿足 $m_1 \cdot d(B, L_1) + m_2 \cdot d(B, L_2) = d(B, L_3)$, 因為 $B \in L_2 \Rightarrow d(B, L_2) = 0$.

$$m_1 \cdot d(B, L_1) = d(B, L_3) \Rightarrow m_1 = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}},$$

同理

$$m = \frac{d(D, L_3)}{d(D, L_1)} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DH}}.$$

因為 $\overline{BE} \parallel \overline{DG} \Rightarrow \triangle MBE \sim \triangle MDG(AA)$, 同理 $\triangle OBF \sim \triangle ODH(AA)$,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DH}} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{OD}},$$

同理 L_1 上四點亦同, 另外六種狀況亦同. □

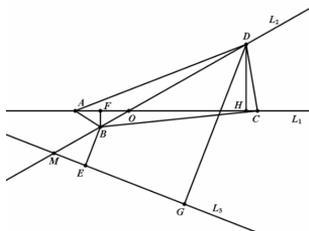


圖 26

2.3.4 直四角錐模型

我覺得符合 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3)$ 的六種軌跡皆與圓錐曲線類似, 如下圖:

我所作出的軌跡圖是否與圓錐曲線相同, 可使用射影幾何的觀念截出我所需要的軌跡圖? 圓錐曲線的射影幾何, 是自一投影點投出, 打在一個圓上, 形成一個圓錐曲面, 我推想: 我所要做的圖也許是自一投影點投出, 打在一個正方形上, 即為一個直四角錐的模型, 如圖 28, 29. 圖 30, 31, 32 為平面上截於直四角錐面的例子.

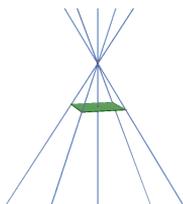


圖 28

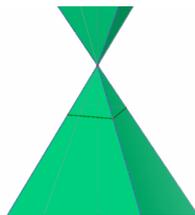


圖 29

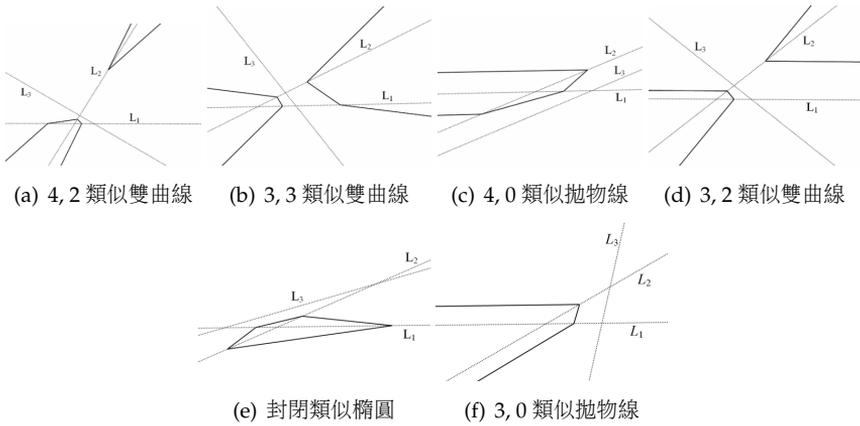


圖 27

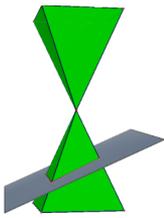


圖 30

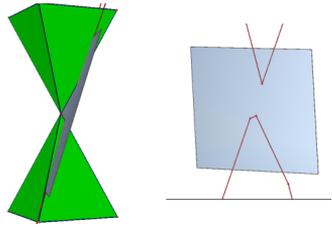


圖 31

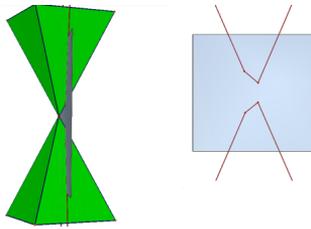


圖 32

由引理 2.4 內外點分比可知 L_1, L_2 必過四個折點, 那我就問了一個問題: L_3 在哪裡?

定理 2.5. 已知截平面與過頂點垂直軸的平面, 第三線為此兩平面之交線.

證明. 以下, 我們使用內外點分比的結論證明:

作圖. 若 $L_1 \parallel L_2$

A 為 L_1, L_2 交點, B 為母線 ML_1 與平面 E_1 的交點, C 為 E_1 與 E_2 的交線與 L_1 的交點, D 為母線 ML_2 與平面 E_1 的交點, 作 $\overline{BH_1} \perp L_3, \overline{DH_2} \perp L_3, \overline{BH_3} \perp L_2, \overline{DH_4} \perp L_2$, 則

欲證

$$\overline{BH_1} : \overline{BH_3} = \overline{DH_2} : \overline{DH_4},$$

即證

$$\overline{BH_1} : \overline{DH_2} = \overline{BH_3} : \overline{DH_4},$$

如圖 33.

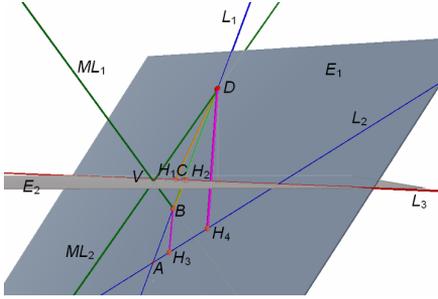


圖 33

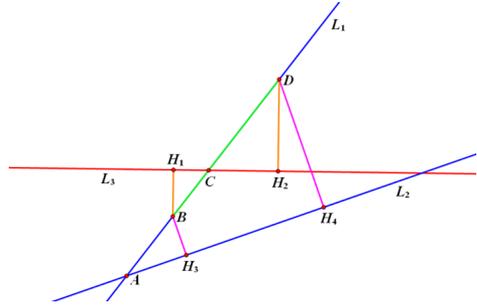


圖 34

為了方便分析,我們將平面 E_1 另外作成一張平面圖,如圖 34.

$$\begin{aligned} \triangle BCH_1 &\sim \triangle DCH_2, \triangle BAH_3 \sim \triangle DAH_4 (AA) \\ \Rightarrow \overline{BH_1} : \overline{DH_2} &= \overline{BC} : \overline{CD}, \overline{BH_3} : \overline{DH_4} = \overline{AB} : \overline{AD}, \end{aligned}$$

接著在回到空間中,作 $\overline{DG} \perp$ 軸於 G ,如圖 35,我們將 $\triangle AGD$ 另外作成一張平面圖 36.

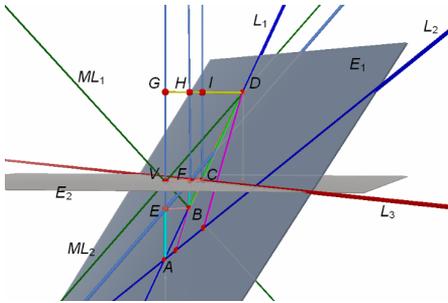


圖 35

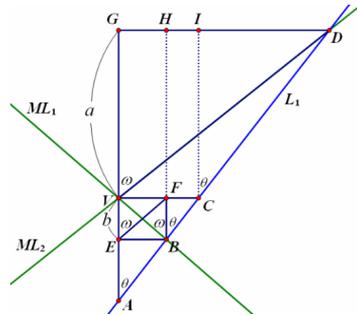


圖 36

求證. $\overline{BH_1} : \overline{DH_2} = \overline{BH_3} : \overline{DH_4}$, 即 $\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AD}$

即證. $\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{AD}$

作 $\overline{BE}, \overline{CV}$ 垂直軸於 E 和 V , $\overline{BH}, \overline{CI}$ 垂直 \overline{DG} 於 H 和 I , \overline{BH} 交 \overline{CV} 於 F , 因為 $\triangle ABE \sim \triangle BCF (AA)$, 所以

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{FC} : \overline{IF} = \overline{HI} : \overline{GH}, \quad (3)$$

又因 $\triangle CDI \sim \triangle ADG(AA)$, 所以

$$\overline{CD} : \overline{AD} = \overline{ID} : \overline{GD}. \quad (4)$$

由 (3), (4) 知, 若 $\overline{HI} : \overline{GH} = \overline{ID} : \overline{GD}$ 則得證.

令 $\overline{VG} = a, \overline{VE} = b$, 軸與母線 ($ML_i, i = 1, 2, 3, 4$) 的銳夾角為 ω , L_1 與軸的銳夾角 θ , 則 $\overline{ID} = a \tan \theta, \overline{GD} = a \tan \omega, \overline{HI} = \overline{FC} = b \tan \theta, \overline{GH} = \overline{VF} = b \tan \omega$

$$\Rightarrow \frac{\overline{HI}}{\overline{GH}} = \frac{\tan \theta}{\tan \omega}, \frac{\overline{ID}}{\overline{GD}} = \frac{\tan \theta}{\tan \omega}$$

若 $L_1 \nparallel$ 不平行於 L_2 , 得證.

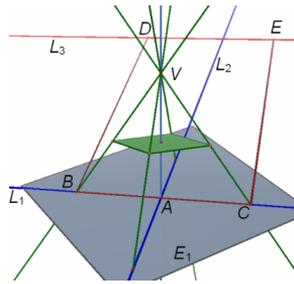


圖 37

若 $L_1 \parallel L_3$ (即 $\theta = \frac{\pi}{2}$), 如圖 37, 因為

$$\overline{BD} = \overline{CE} = d(I_1, I_3), \overline{AB} = \overline{AC} \text{ (因為 } VA \text{ 有軸)},$$

所以

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{CA}}.$$

因此可得, L_3 為「過直四角錐頂點垂直軸的平面與截平面的交線」. □

知道了第三線的位置, 我接著去尋找這個模型與我原本的軌跡圖式子 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3)$ 有什麼關係? 並定義以下符號:

1. 軸與母線的夾角 ω .
2. 軸與平面法線向量夾角 α .
3. 軸與 L_1 的夾角 θ_1 .
4. 軸與 L_2 的夾角 θ_2 .
5. L_1 與 L_2 的夾角 θ , 如圖 38.

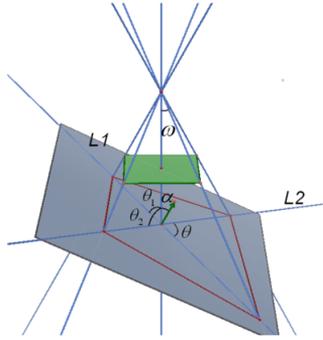


圖 38

定理 2.6. 在 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3)$ 中, 令 $m_3 = 1$, 則 $m_1 = \frac{\sin \theta_2}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta}$, $m_2 = \frac{\sin \theta_1}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta}$.

證明. 令直四角錐頂點 V, L_1, L_2 交點 O , 截平面 E , 過 V 垂直軸的平面 E_1 , 軌跡與 L_1, L_2 交在 A, B, C, D 四點, 不失一般性, 以下以 B 點證明, 圖 39 ~ 44.

作 $\overline{BQ} \perp L_1$ 於 $Q, \overline{BH} \perp L_3$ 於 $H, \overline{BK} \perp$ 軸於 $K, \overline{BF} \perp E_1$ 於 F .

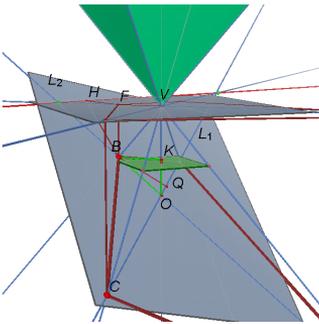


圖 39

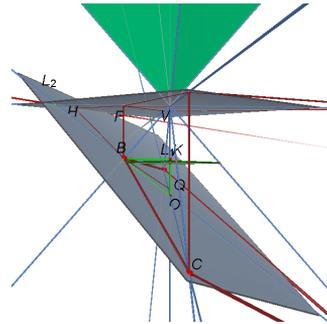


圖 40

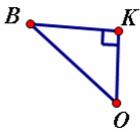


圖 41

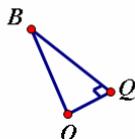


圖 42

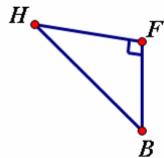


圖 43

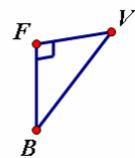


圖 44

將 B 點帶入式子 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = d(P, L_3)$ 中得

$$m_1 \cdot d(B, L_1) = d(B, L_3),$$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{\overline{BH}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{BF} \cdot \csc \alpha}{\overline{BO} \cdot \sin \theta} = \frac{(\overline{FV} \cdot \cot \omega) \cdot \csc \alpha}{(\overline{BK} \cdot \csc \theta_2) \cdot \sin \theta'}$$

因為 $BFVK$ 是矩形, 所以 $\overline{FV} = \overline{BK}$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{\sin \theta_2}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta'}, m_2 = \frac{\sin \theta_1}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta'}$$

同理其他六種軌跡圖亦同. □

定理 2.7. $\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$.

直四角錐模型中, L_1 與 L_2 的夾角 θ , 軸與 L_1 的夾角 θ_1 , 軸與 L_2 的夾角 θ_2 , 其中 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$, 圖 45 ~ 47.

證明. 令直四角錐頂點 V , L_1, L_2 交點 O , $\overline{OV} = c$, L_1, L_2 分別交 L_3 於 A, B , 其中 $\angle BVA = 90^\circ$, 不失一般性, 我們可固定 ω 與 α , 意即保持 $d(V, L_3) = \text{定值} = r$, 因正四角錐底面為正方形, 故不失一般性, 在 $\angle BVA$ 內以 r 為半徑做圓弧, 動點 P 在圓弧上, 其中 $\overline{VP} \perp L_3$ 於 P 且 $\overline{VP} = r$, 令 $\angle PVA = \beta$.

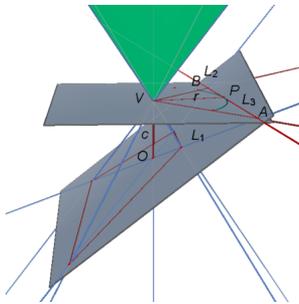


圖 45

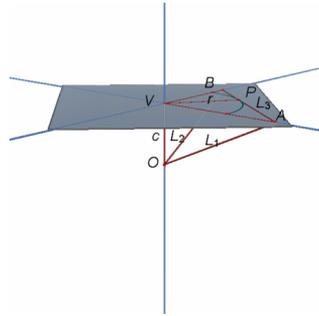


圖 46

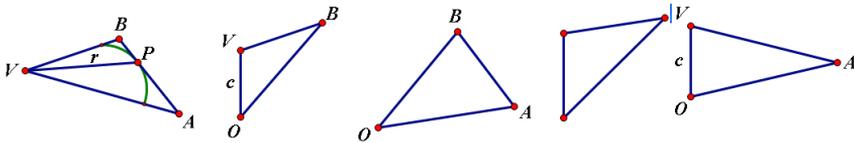


圖 47

首先, 先定坐標系: 以 V 為原點, \overrightarrow{VA} 為 x 軸正向, \overrightarrow{VB} 為 y 軸正向, \overrightarrow{OV} 為 z 軸正向, $P(r \cos \beta, r \sin \beta)$, $A(\frac{\sec \beta}{r}, 0)$, $B(0, \frac{\csc \beta}{r})$, 看上圖五個三角形, $\tan \theta_1 = \frac{\csc \beta}{rc}$, $\tan \theta_2 = \frac{\sec \beta}{rc}$, $\tan \alpha = \frac{c}{r}$, 看 $\triangle OAB$ 與餘弦定理

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2c^2}{2\sqrt{(c^2 + \frac{\csc^2 \beta}{r^2})(c^2 + \frac{\sec^2 \beta}{r^2})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 \theta_1)(1 + \tan^2 \theta_2)}} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

得證.

□

2.3.5 推理作圖方法

由這三個式子我們可以在直四角錐上截出任何所欲求的軌跡.
作法.

1. 有軌跡可連轉折點得 L_1, L_2 , 連與平面 E_1 的交點可得 L_3 .
2. 有 L_1, L_2, L_3 可用轉折點求得 m_1, m_2 .
3. 因 ω 以固定, 決定截面截入角度 α 可得 $\theta, \theta_1, \theta_2$ 之聯立方程, 可解得 $\theta, \theta_1, \theta_2$.
4. 按以上求得變數便可截出欲求軌跡的截法.

說明: 給定一個軌跡圖 \rightarrow 給定 m_1, m_2 與三線 \rightarrow 給定 m_1, m_2, θ

已知

$$m_1 = \frac{\sin \theta_2}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta}, m_2 = \frac{\sin \theta_1}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta}, \cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2,$$

所以

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}.$$

令

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = k,$$

解聯立方程式

$$\begin{cases} \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = k \\ \cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \end{cases}$$

解得

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{(k^2 - 1) \pm \sqrt{(k^2 - 1)^2 + 4k^2 \cos^2 \theta}}{2k^2}. \quad (\text{取正, 負不合})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2 \theta_1 = 1, \lim_{k \rightarrow 0} \cos^2 \theta_1 = 1,$$

$k = 1$ 時,

$$\cos^2 \theta_1 = \cos^2 \theta, \cos \theta \leq \cos^2 \theta_1 < 1,$$

必可得一組解 $\cos \theta_1, \cos \theta_2$, 因為

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \cos \theta_1, \cos \theta_2 \leq \frac{\pi}{2},$$

所以可以任選滿足上述條件的 α 做截平面的角度, 藉由

$$m_1 = \frac{\sin \theta_2}{\tan \omega \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta}$$

可得

$$\tan \omega = \frac{\sin \theta_2}{m_1 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta'}$$

有了 ω 可得角錐的類型.

2.3.6 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3) + c$

作圖.

作圖法同 2.3.3 所提, 使用定理 2.1 的平行四邊形圖形即可. 現在我想討論加入的這個常數 c 對原本軌跡圖的影響, 讓我們回到前面 2.3.2 與定理 2.2 所提及的極端化作 $d(P, L_1) + d(P, L_2) + d(P, L_3)$ 軌跡圖的作圖法: 想要在 L_2 上找一個軌跡點 P_1 , $P_1 \in T$, 使 P_1 符合 $d(P_1, L_1) + d(P_1, L_2) = d(P_1, L_3)$, 因為 $P_1 \in L_2$, 所以

$$d(P_1, L_2) = 0 \Rightarrow d(P_1, L_1) = d(P_1, L_3),$$

作 L_1, L_3 銳交角平分線交 L_2 於 P_1 , P_1 即為所求.

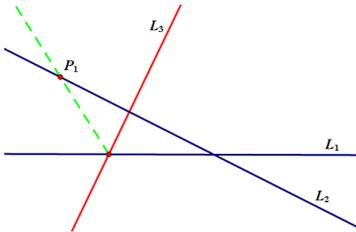


圖 48

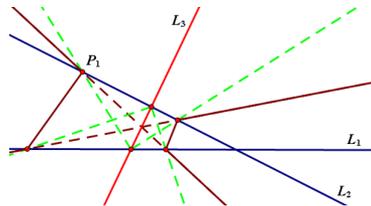


圖 49

而加入常數 c 之後, 可看成將 L_3 平移 c 至 L' , 以圖 50 為例, 所要的軌跡圖 T 為以 L_1, L_2, L' 三線做出的新軌跡圖 T' , 取以 L_3 為界, 與 L' 不同邊的軌跡, 即圖中標示 A, B 的一線段與兩射線. 如圖 50, 另一邊亦同, 可得複合軌跡, 如圖 51.

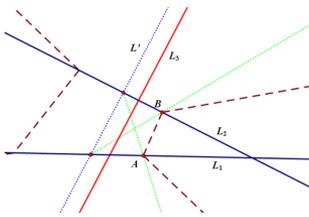


圖 50

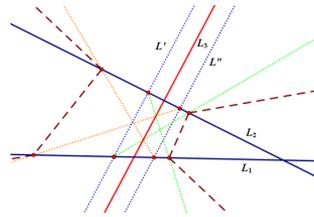


圖 51

放入直四角錐模型中, 因為截平面會與過頂點垂直軸的平面交於紅線 L_3 , 現在平移了 c 到 L' , 所以頂點也會上下平移 $c \sin \alpha$, 這裡的 α 為截平面法向量與軸的夾角, 形成一個複合直四角錐, 圖 52 ~ 53:

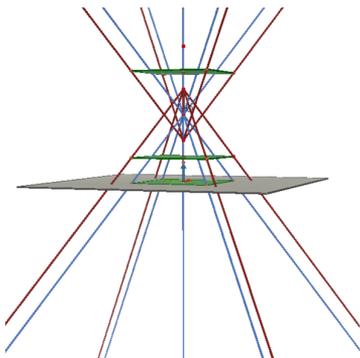


圖 52

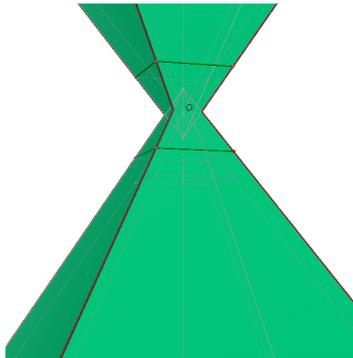


圖 53

平面截法與前面相同, 只是所取的軌跡部份以 L_3 為界, 一邊取上四角錐, 一邊取下四角錐即可。

我同時也考慮了 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, L_3) - c$ 的情況, 所產生的直四角錐模型也是做頂點平移分上下兩四角錐, 只是兩頂點並不像上圖平移方向為互相靠近, 而是互相遠離, 因此所做的直四角錐模型為上下兩個分開的直四角錐。

2.4 兩線一點

原命題: 平面上兩相異線 L_1, L_2 , 一定點 A 與滿足 $m_1 \cdot d(P, L_1) + m_2 \cdot d(P, L_2) = m_3 \cdot d(P, A)$ 的動點 P , 求動點 P 的軌跡圖? 為方便表示, 此小節一律令 $m_1 = m, m_2 = n, m_3 = l$.

2.4.1 軌跡圖類型

定理 2.8. 所得軌跡圖必為兩圓錐曲線類的部分圖形。

證明. 我用解析幾何證明, 因為 m, n, l 不影響圓錐曲線類型, 令三者皆為 1.

令 $L_1 : y = 0, L_2 : y = kx, A(a, b)$, 不失一般性, 令 $k > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |y| + \frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ \Leftrightarrow y^2 + 2|y| \frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} + \left(\frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

1. 當 $y(kx - y) > 0, P(x, y) \in I$ 或 III (同號區) 時, (5) 式可整理成

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + 1}x^2 + \frac{2k(1 - \sqrt{k^2 + 1})}{k^2 + 1}xy \\ + \frac{2\sqrt{k^2 + 1} - 1}{k^2 + 1}y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = 0. \end{aligned}$$

其中

$$\delta = B^2 - 4AC = \frac{4k^2(1 - \sqrt{k^2 + 1})^2 - 8\sqrt{k^2 + 1} + 4}{(k^2 + 1)^2},$$

當

$$\delta > 0 \Leftrightarrow \frac{4k^2(1 - \sqrt{k^2 + 1})^2 - 8\sqrt{k^2 + 1} + 4}{(k^2 + 1)^2} > 0,$$

簡化得 $k > 0$ 或 $k < -\sqrt{3}$.

- (a) 當 L_2 斜率大於 $\sqrt{3}$ 時軌跡為雙曲線類, 如圖 54.
- (b) 當 $\delta = 0$ 時 $\Leftrightarrow k = \sqrt{3}$, 當 L_2 斜率等於 $\sqrt{3}$ 時軌跡為拋物線類, 如圖 55.
- (c) 當 $\delta < 0$ 時 $\Leftrightarrow 0 < k < \sqrt{3}$, 當 L_2 斜率介於 $(0, \sqrt{3})$ 時軌跡為橢圓類, 如圖 56.

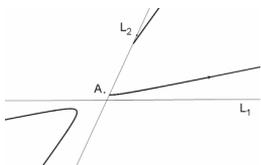


圖 54

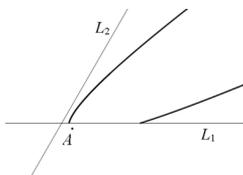


圖 55

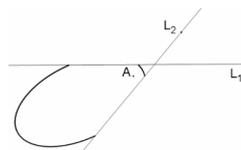


圖 56

我加入退化情況的探討:

檢查當 $\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$ 時, 可得

$$a^2k^2 + b^2k^2 - 2b^2\sqrt{k^2+1} - 2b^2 - 2abk\sqrt{k^2+1} + 2abk = 0.$$

- (a) 當 $a = 0$, 即 A 點在 $x = 0$ 上的情況

$$\Rightarrow b^2k^2 - 2b^2\sqrt{k^2+1} - 2b^2 = 0$$

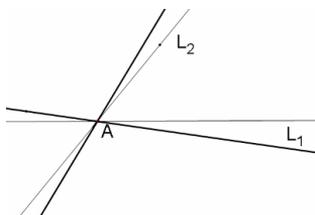


圖 57

- i. 當 $b = 0$, 即 A 點為原點時, 圖形恆退化, 如圖 57.

ii. 當 $b \neq 0$

$$\Rightarrow k^2 - 2\sqrt{k^2 + 1} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2\sqrt{k^2 + 1} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2\sqrt{2} - 1}.$$

當 A 點在 $x = 0$ 上, L_2 的斜率為 $\sqrt{2\sqrt{2} - 1}$ 亦會退化.

(b) $a \neq 0$, 即 A 點不在 $x = 0$ 上的情況, 同除 a^2 , 並令 $p = \frac{b}{a}, k = \tan \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow k^2 + p^2 k^2 - 2p^2 \sqrt{k^2 + 1} - 2p^2 - 2pk \sqrt{k^2 + 1} + 2pk = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{k(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{2\sqrt{k^2 + 1} - 2 - k^2} = \frac{\tan \theta (\sec \theta - 1)}{2(\sec \theta - 1) - \tan^2 \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$$

\Rightarrow 當 A 在 $y = [\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})]x$ 的線上時, 圓錐曲線在 I, III 區會退化.

雙曲線會退化成兩條過 A 點直線, 同時拋物線亦有此情形, 如圖 58 ~ 59.

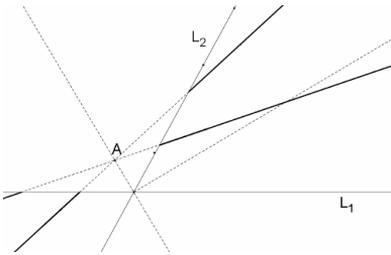


圖 58

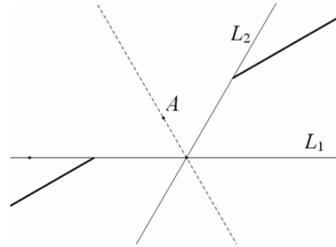


圖 59

但是我作圖始終在 I, III 區觀察不到橢圓的退化型, 我猜測那一個退化點可能是不存在的, 以下是證明:

證明. 軌跡方程:

$$\frac{1}{k^2 + 1} x^2 + \frac{2k(1 - \sqrt{k^2 + 1})}{k^2 + 1} xy + \frac{2\sqrt{k^2 + 1} - 1}{k^2 + 1} y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = 0$$

橢圓退化點 $(\frac{2CD - BE}{\delta}, \frac{2AE - BD}{\delta})$, 在 I, III 區:

$$\frac{2CD - BE}{\delta} > 0, \frac{2AE - BD}{\delta} > 0.$$

因為圓錐曲線退化, 由上一結論知

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = p = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

將上述兩不等式簡化為

$$\Rightarrow -k\sqrt{k^2+1} + 2k + 2k^3 - \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} + \frac{1}{k} < 0, \text{ 且 } k^2+1 < 0$$

$\Rightarrow k$ 無實數解

\Rightarrow 不論圖形為何, 皆不會出現橢圓的退化情況.

2. 當 $y(kx - y) < 0$, 在 II, IV 區 (異號區) 時,

$$\delta = B^2 - 4AC = \frac{4k^2(1 + \sqrt{k^2+1})^2 + 8\sqrt{k^2+1} + 4}{(k^2+1)^2}.$$

當 $\delta > 0$

$$\Leftrightarrow (k^2+1)^2 + 2(k^2+1)\sqrt{k^2+1} > 0,$$

簡化得 $\sqrt{k^2+1} > -2 \Rightarrow$ 恆成立, 軌跡恆為雙曲線類, 如圖 60.

3. 若雙曲線退化 $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = 0$, 令 $k = \tan \theta$, 設退化線 $y = px$, 可

解得

$$p = \frac{k(\sqrt{k^2+1}+1)}{2+2\sqrt{k^2+1}+k^2} = \frac{k(\sqrt{k^2+1}+1)}{(\sqrt{k^2+1}+1)^2} = \tan \frac{\theta}{2},$$

A 點在 $y = [\tan \frac{\theta}{2}]x$ 會退化, 圖 61. □

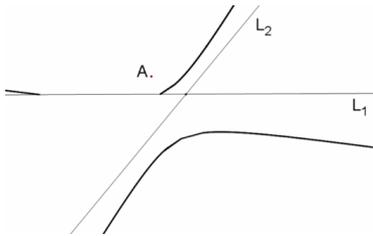


圖 60

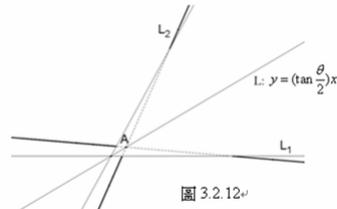


圖 61

定理 2.8 總結:

1. 在同號區 L_2 的斜率會以 $\sqrt{3}$ 為界改變圓錐曲線的種類.

2. 在異號區則必為雙曲線類.

3. 同號區當 A 在 $y = [\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})]x$ 會退化, 異號區當 A 在 $y = [\tan(\frac{\theta}{2})]x$ 會退化.

定理 2.9. 令 $L : k_1L_1 + k_2L_2$ 且 $A \in L$ 時, 所得軌跡圖皆相似.

已知. L 為過原點一直線, $A, A' \in L$, 令 $A(a, b), A'(ta, tb), t \in R$, 令 A 對應軌跡方程

$$T : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2al^2x + 2bl^2y - l^2(a^2 + b^2) = 0.$$

說明. 欲証對所有 $\{A\} \in L$ 所對應的 $\{T\}$ 皆相似, 圖 62. 設 A 對應軌跡方程 $T : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2al^2x + 2bl^2y - l^2(a^2 + b^2) = 0$, A' 對應軌跡方程 $T' : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2tal^2x + 2tbl^2y - l^2t^2(a^2 + b^2) = 0$, 若 $P(u, v) \in T$ 且 $P'(tu, tv) \in T'$, 即可得證.

證明.

$$P(u, v) \in T$$

$$\Leftrightarrow t^2[Au^2 + Buv + Cv^2 + 2al^2u + 2bl^2v - l^2(a^2 + b^2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow A(tu)^2 + B(tu)(tv) + C(tv)^2 + 2al^2(tu) + 2bl^2(tv) - l^2t^2(a^2 + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow P'(tu, tv) \in T'$$

\Leftrightarrow 定點 A 在過 L_1, L_2 交點的線上所形成的軌跡圖彼此相似. □

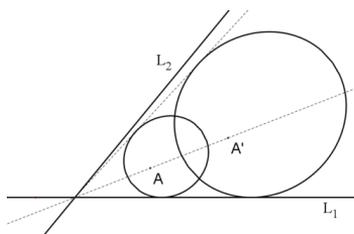


圖 62

2.4.2 準線觀點

接下來我要把軌跡圖式子

$$|y| + \frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

做一點點修正, 在同號區得

$$\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}x + \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{\sqrt{k^2 + 1}}y = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

同乘 x, y 項係數平方和再開根號的值可得

$$\sqrt{\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{k^2+1}-1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2} \left| \frac{\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}x + \frac{\sqrt{k^2+1}-1}{\sqrt{k^2+1}}y}{\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{k^2+1}-1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2} \right|$$

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

令 $k = \tan \theta$, 不失一般性 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; θ 為 L_1, L_2 夾角, 後經化簡得

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\left| \frac{(\sin \theta)x + (1 - \cos \theta)y}{\sqrt{(\sin \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2}} \right|}.$$

由圓錐曲線定義 $e = \frac{\overline{PF}}{d(P, L)}$ 可知 A 點為圓錐曲線焦點, $(\sin \theta)x + (1 - \cos \theta)y$ 為其準線。

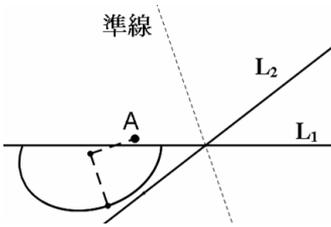


圖 63

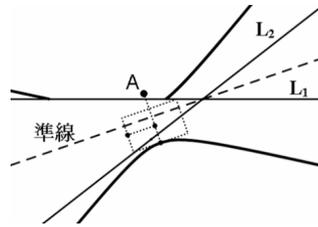


圖 64

而準線可寫成 $y = [\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})]x$, 即 2.4.1 中求得 A 點若在其上會退化的退化線, 同時也是 L_1, L_2 的角平分線, 而異號區亦有相同結論. 接著我將這個結論推廣到 (m, n, l) :

$$\text{原軌跡式: } m|y| + n \cdot \frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} = l \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

我們使用和前面一樣的方法試著配出 $e = \frac{\overline{PF}}{d(P, L)}$ 的形式, 在同號區的結果:

$$\frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}}{l} = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\frac{(n \sin \theta)x + (m - n \cos \theta)y}{\sqrt{(n \sin \theta)^2 + (m - n \cos \theta)^2}}},$$

其中

$$e = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}}{l}.$$

當 $l > \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta} \Rightarrow e < 1 \Rightarrow$ 圓錐曲線為橢圓類,

當 $l = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta} \Rightarrow e = 1 \Rightarrow$ 圓錐曲線為拋物線類,

當 $l < \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta} \Rightarrow e > 1 \Rightarrow$ 圓錐曲線為雙曲線類。
 同理我們求出異號區的離心率

$$e = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos(\pi - \theta)}}{l}$$

2.4.3 三角形模型

結合同號區的離心率結果 $e = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}}{l}$, 我覺得這形勢很像餘弦定理, 所以我建構一三角形模型。

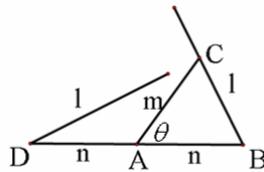


圖 65

$\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = n, \overline{AC} = m, \angle CAB = \theta$			
可用以表示同號區的圓錐曲線類型			
	$l > BC$	$l = BC$	$l < BC$
類型	橢圓類	拋物線類	雙曲線類

$\triangle ADC$ 中 $\overline{AD} = n, \overline{AC} = m, \angle CDB = \pi - \theta$			
可用以表示異號區的圓錐曲線類型			
	$l > DC$	$l = DC$	$l < DC$
類型	橢圓類	拋物線類	雙曲線類

底下我們看幾個例子:

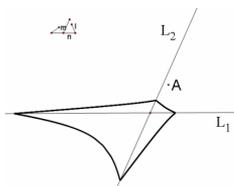


圖 66

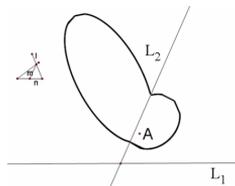


圖 67

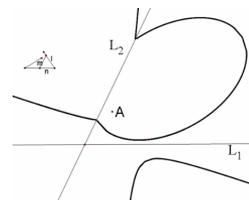


圖 68

圖 66. l 皆未大於三角形第三邊, 所以在同號與異號區皆為雙曲線。

圖 67. l 皆大於三角形第三邊, 所以在同號區和異號區皆為橢圓。

圖 68. l 大於右邊三角形的第三邊, 小於右邊三角形的第三邊, 所以在同號區為橢圓, 異號區為雙曲線。

2.4.4 推理焦點與準線

當 $m \cdot d(P, L_1) + n \cdot d(P, L_2) = l \cdot d(P, A)$ 時, 根據以上所有結論顯示:

1. 軌跡圖必為圓錐曲線類型.
2. 兩線一點中的那一點為圓錐曲線中的一個焦點.
3. 過兩線交點的直線: $(n \sin \theta)x + (m - n \cos \theta)y = 0$ 為圓錐曲線準線, 且這條準線與 2. 所述之焦點為同一組配對, 當 A 點位於此線時, 圓錐曲線會退化, 退化情形如下:

根據 1., 2. 當兩線決定時, 準線與離心率亦同時被決定, 所以我們可以重設坐標系, 以 L_1, L_2 焦點為原點, 令準線 $x = a$, 因 $A \in$ 準線, 令 $A(a, b)$, $\overline{PF} = e \cdot d(P, L)$, 在同號區:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} &= e \cdot |x-a| \\ \Rightarrow (1-e^2)(x-a)^2 + (y-b)^2 &= 0, \end{aligned}$$

異號區同理.

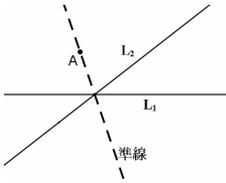


圖 69

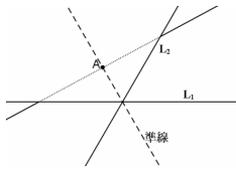


圖 70

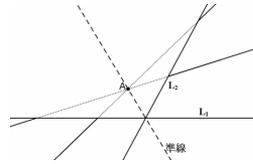


圖 71

圖 69. 當軌跡為橢圓時, $0 < e < 1 \Rightarrow x = a, y = b$ 圖形退化為 A 點, 當因 A 點不在同號區, 所以看不到異號區的退化情形.

圖 70. 當軌跡為拋物線時, $e = 1 \Rightarrow y = b$ 圖形退化為過 A 點的且垂直準線的直線.

圖 71. 當軌跡為雙曲線時, $e > 1 \Rightarrow (y-b)^2 - (e^2-1)(x-a)^2 = 0 \Rightarrow y-b \pm (x-a)\sqrt{e^2-1} = 0$ 為兩條直線通過同號區的部份.

圓錐曲線離心率只與兩線夾角有關, 在

- (a) 同號區為 $\frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}}{l}$.
- (b) 異號區為 $\frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos(\pi - \theta)}}{l}$.

2.4.5 推理兩線一點相對位置關係與軌跡圖的影響

根據以上結論，我們將準線定為鉛直線，且令 A 點到準線距離為 p ，如圖 72，歸納得：

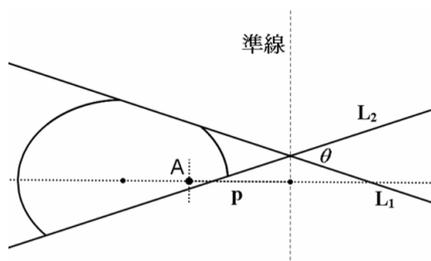


圖 72

1. 兩線: 因為離心率只與夾角有關，兩線夾角 θ 直接決定離心率的大小，再配合三角形模型，可簡單決定圓錐曲線類型。
2. 一點:
 - (a) 當 A 點延著準線方向移動時，因 p 固定不變，圓錐曲線大小不變，只跟著 A 點做平移動作。
 - (b) 當 A 點延著準線法向量方向移動時， p 會隨 A 點移動而改變，造成圓錐曲線依 p 放大倍率而放大。
 - (c) 由 (a), (b) 知，當 A 點任意移動時，可將其移動分解成 (a), (b) 兩種方向，而知其如何平移與放大縮小。

參考文獻

- [1] 《高級中學數學》，李虎雄，陳昭地，黃登源，李政貴，林炳堂，儲啓政等編，三版，康熙圖書網路股份有限公司，1 至 64 頁，中華民國九十年出版。
- [2] 《The Geometer's Sketchpad 操作手冊》，翁永福，四版，私人出版。
- [3] 《幾何學辭典》，筈部貞市郎，三版，九章出版社，中華民國八十年出版。
- [4] 《複數解析幾何 數學傳播季刊選集 11》，許振容，呂素齡，中央研究院數學研究所，中華民國八十年六月。
- [5] 《高中數學實驗教材第四冊、第五冊》，高中數學實驗教材編輯小組蔣彥士等，修訂三版，國立編譯館，中華民國七十三年一月。