「格」骨銘「心」的三角戀

陳癸安

臺北市立建國高級中學

Abstract

The purpose of this research is to determine a necessary and sufficient condition for triangles which satisfy that their three vertices and five centers (including barycenter, orthocenter, excenter, incenter and escenter) are all lattice points. In case the lengths of their sides are all rational numbers, I have found three types of such triangles, which are denoted by 「#」, 「$*$」 and「$*$ rotated」. Otherwise, I can just find one type which is a transformation (dilation, rotation) of the three types above. And the lengths of three sides must be similar square roots.

For the necessary condition, I got some partial result: if one of its sides is parallel to the x-axis or the y-axis, as long as its five centers are all lattice points, it must be 「#」or「$*$」.

摘要: 研究當三角形三頂點皆為格子點時, 五心 (重心, 垂心, 外心, 內心, 旁心) 皆在格子點上的三角形的充分必要條件. 我們發現當邊長為有理數的三角形有三種型態滿足五心皆在格子點, 我們定義它們是型態「#」,「$*$」和「$*$ 斜」. 邊長不全為有理數的三角形我們發現有一種型態滿足, 即為以上三種型態經邊長伸縮無理數倍再旋轉過後的結果, 且三邊長必都是無理數且為同類方根.

在五心皆在格子點上的三角形之必要性的探討, 我們發現若有一邊平行於 x 軸或 y 軸的三角形, 只要其五心在格子點上, 那就一定是型態「#」或型態「$*$」.

1 簡介

1.1 研究動機

接觸到向量那單元時, 常常會被要求算外心, 重心, 內心和垂心坐標, 然而, 出來的答案往往不是漂亮的數字, 容易含有根號, 因此就開始思考能不能找到外心, 重心, 內心, 垂心都在格子點上如此美麗的三角形呢? 若能, 又是否可歸納並證明出其所需條件? 於是我隨手拿了一張紙, 畫起了三角形. 一開始我先以最簡單的直角三角形來畫, 沒多久便找到了一個滿足四心都在格子點上的例子, 但當我要擴大範圍至銳角三角形時, 就覺得有些難度, 亦覺得有趣, 甚至想到如果再加上三個旁心, 結果又會是如何呢? 所以想研究這個題目.

1.2 研究目的

1. 找出五心的坐標公式 (規定三頂點坐標).
2. 找出「五心都在格子點上」的三角形.

1.3 主要結果敘述

研究當三角形三頂點皆為格子點時, 五心 (重心, 垂心, 外心, 內心, 旁心) 皆在格子點上的三角形的型態. 我們發現當邊長為有理數的三角形有下列三種型態滿足五心皆在格子點:

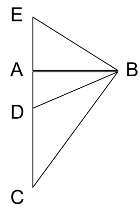

圖 1

「#」: 三邊長都是 6 的倍數的直角三角形.

「$*$」: 圖 1 中的 $\triangle BCD, \triangle BCE$. 條件: $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ABE$ 皆為型態「#」, 且有一邊與 x 軸或 y 軸平行再分別滿足 $2 \times \overline{AB} | \overline{AE} \times \overline{AC}, 2 \times \overline{AB} | \overline{AD} \times \overline{AC}$.

「$*$ 斜」: 由型態「$*$」的三角形經由邊長放大 $\sqrt{a^2+b^2}$ ($\sqrt{a^2+b^2}$ 為整數) 且再旋轉 θ 角後 (其中 $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的三角形.

邊長不全為有理數的三角形我們發現有一種型態滿足, 即為以上三種型態經邊長伸縮無理數倍再旋轉過後的結果, 且三邊長必都是無理數且為同類方根.

在五心皆在格子點上的三角形之必要性的探討, 我們發現若有一邊平行於 x 軸或 y 軸的三角形, 只要其五心在格子點上, 那就一定是型態「#」或型態「$*$」.

1.4 感謝詞

其實我原本也沒想到這份還不算完整的作品能入選, 首先感謝各位教授的青睞, 再來要感謝父母給我一個良好的學習環境, 還有各位數學組同學的互相砥礪, 老師以及實習老師的不吝付出, 以及社團的好友們願意提供寧靜的社辦與電腦讓我做報告, 謝謝你們!

2 研究結果

2.1 各心之關係探討

我們先探討外心與垂心坐標成為格子點的相關條件, 首先是一個簡單的引理.

引理 2.1. 給定三角形 $\triangle ABC$, 設三頂點坐標 $A(0,0)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$, 則

1. 外心 $= K(\frac{y_2({x_1}^2+{y_1}^2)-y_1({x_2}^2+{y_2}^2)}{2(x_1y_2-x_2y_1)}, \frac{x_1({x_2}^2+{y_2}^2)-x_2({x_1}^2+{y_1}^2)}{2(x_1y_2-x_2y_1)})$.
2. 垂心 $= H(\frac{(x_1x_2+y_1y_2)(y_1-y_2)}{x_1y_2-y_1x_2}, \frac{(x_1x_2+y_1y_2)(x_1-x_2)}{x_1y_2-y_1x_2})$.

證明. 利用直線求交點的代數方法可以解得此二心的坐標. □

定理 2.2. 若一個三角形的三頂點與外心皆在格子點上, 則其垂心亦在格子點上.

證明. 由引理 2.1, 可得到若外心為 $K(k,t)$, 則垂心為 $H(2k-(x_1+x_2), -2t+(y_1+y_2))$. 故若外心為格子點, 則垂心也是格子點. □

我們接下來要做的就是找到使外心和內心成為格子點的條件. 從一堆數據中, 我們發現許多三角形的五心都落在格子點上, 但往往一經旋轉後, 心又變成不是格子點了, 很難歸納出共同條件. 不過, 很特別的是滿足定理 2.3 和定理 2.5 的三角形其五心都是格子點.

2.2 邊長為有理數且五心皆為格子點的各種三角形型態

定理 2.3. 設一直角三角形的三邊長分別為 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 且三頂點皆在格子點上, 若 $6|a, 6|b, 6|c$, 則此三角形五心皆為格子點.

證明. 首先, 我們先固定直角於原點, 兩邊分別與 x, y 軸正向重疊, 三頂點依序為 $(0,0), (a,0), (0,b)$, 這樣一來, 其四心坐標分別為重心 $G(\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$, 外心 $K(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, 垂心 $H(0,0)$, 內心 $I(\frac{a+b-c}{2}, \frac{a+b-c}{2})$, 由於 $6|a, 6|b, 6|c$, 因此四心都是格子點. 旁心的部份

$$P_O\Big(\frac{ab}{a+b-c}, \frac{ab}{a+b-c}\Big), \quad P_A\Big(\frac{-ab}{a+c-b}, \frac{ab}{a+c-b}\Big), \quad P_B\Big(\frac{ab}{b+c-a}, \frac{-ab}{b+c-a}\Big),$$

因為這是一個直角三角形, 故可令 $a = 2xyt$, $b = (x^2-y^2)t$, $c = (x^2+y^2)t$, 因此可得 $P_O(x(x+y)t, x(x+y)t)$, $P_A(-x(x-y)t, x(x-y)t)$, $P_B(y(x+y)t, -y(x+y)t)$ 都是格子點.

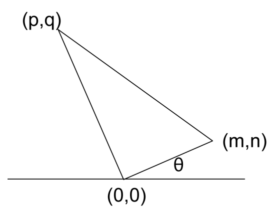

圖 2

接下來, 要驗證「斜的」三角形是否也會成立. 我們可經由平移使直角移至原點, 那麼不妨設剛剛的三角形旋轉了 θ 角, 參考圖 2. 而坐標將變成 $(0,0)$, (m,n), (p,q), 其中, $m = a\cos\theta$, $n = a\sin\theta$, $p = -b\sin\theta$, $q = b\cos\theta$,

又 $6|a \Rightarrow 6|m^2+n^2$, 利用同餘可得 $m,n \equiv 3 \pmod 6 \vee m,n \equiv 0 \pmod 6$.
又 $6|a \Rightarrow 36|a^2 \Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod 4$, 故 $m,n \equiv 3 \pmod 6$ 這一組解不合, 否則

$$a^2 \equiv m^2+n^2 \equiv (6x+3)^2+(6y+3)^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

其中 $x,y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 但是這與 $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ 矛盾, 故 $6|m,n$.
同理 $6|p,q$, 即有 $6|m,n,p,q$, 故 $\frac{a\cos\theta}{6}, \frac{a\sin\theta}{6}, \frac{b\sin\theta}{6}, \frac{b\cos\theta}{6} \in \mathbb{Z}$.
新的五心分別為:

1. 重心 $G'(x_1,y_1)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} \end{bmatrix}.$$

   由 $\frac{a\cos\theta}{6}, \frac{a\sin\theta}{6}, \frac{b\sin\theta}{6}, \frac{b\cos\theta}{6} \in \mathbb{Z}$, 可得 $x_1,y_1 \in \mathbb{Z}$, 即 G' 為格子點.

2. 外心 $K'(x_2,y_2)$:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{bmatrix}.$$

   同理, 可得 $x_2,y_2 \in \mathbb{Z}$, 即 K' 為格子點.

3. 垂心 $H'(x_3,y_3)=(0,0)$ 亦為格子點.

4. 內心 $I'(x_4,y_4)$:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \end{bmatrix}.$$

   因為 $\frac{a\cos\theta}{6}, \frac{a\sin\theta}{6}, \frac{b\sin\theta}{6}, \frac{b\cos\theta}{6} \in \mathbb{Z}$, 故若 $\gcd(\frac{a}{6},\frac{b}{6})|\frac{a+b-c}{2}$, 則 $x_4 \in \mathbb{Z}$.
   讓我們令 $\gcd(a,b,c)=6d$, $a=6dx$, $b=6dy$, $c=6dz$, 則 $d|\frac{6d(x+y-z)}{2}$ 成立, 即 $\gcd(\frac{a}{6},\frac{b}{6})|\frac{a+b-c}{2}$ 成立. 所以可得 $x_4 \in \mathbb{Z}$. 同理 $y_4 \in \mathbb{Z}$, 由此知 I' 為格子點.

5. 旁心 $P'_O(x_5,y_5)$, $P'_A(x_6,y_6)$, $P'_B(x_7,y_7)$:

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(x+y)t \\ x(x+y)t \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x(x-y)t \\ x(x-y)t \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x+y)t \\ -y(x+y)t \end{bmatrix}.$$

又有

$$\frac{a\cos\theta}{6}=\frac{2xyt\cos\theta}{6}\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$\frac{b\cos\theta}{6}=\frac{(x^2-y^2)t\cos\theta}{6}\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

再由內心得到的

$$\frac{(a+b-c)\cos\theta}{2}=(x^2+xy)t\cos\theta\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

此三式可線性組合出以上所有的坐標 (乘上 $\sin\theta$ 的項亦同理), 即可得到 $P'_O(x_5,y_5)$, $P'_A(x_6,y_6)$, $P'_B(x_7,y_7)$ 都是格子點.

綜合以上可知, 無論是「正的」或是「斜的」三角形, 當邊長是 6 的倍數, 且三頂點為格子點的直角三角形, 其五心都會是格子點, 得證. □

定義 2.4. 設一直角三角形的三邊長分別為 $a,b,c\in\mathbb{N}$, 且三頂點皆在格子點上, 若 $6|a, 6|b, 6|c$, 則稱此三角形為型態「#」.

定理 2.5. 如圖 1, 若 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ABE$ 皆滿足型態「#」, 且有一邊與 x 軸或 y 軸平行, 若再分別滿足 $2\times\overline{AB}|\overline{AE}\times\overline{AC}$, $2\times\overline{AB}|\overline{AD}\times\overline{AC}$, 則 $\triangle BCE, \triangle BCD$ 的五心亦為格子點.

我們稱此兩種三角形為「相加」以及「相減」型. 接下來我證明相減的部分.

1. 重心 $G(\frac{c}{3},\frac{a+b}{3})$: 因 $6|a,b,c$, 故 G 為格子點.
2. 外心 $K(\frac{ab}{2c}+\frac{c}{2},\frac{a+b}{2})$: 因 $\frac{ab}{2c}\in\mathbb{Z}$, 故 K 為格子點.
3. 垂心 H: 由定理 2.2, 外心為格子點 $\Rightarrow$ 垂心亦是, 故 H 為格子點.
4. 內心 I:

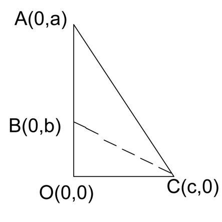

圖 3

由於圖 4 中有兩個直角三角形, 故我們可令

$$a=2x_2y_2s,\quad b=2x_1y_1t,\quad c=({x_2}^2-{y_2}^2)s=({x_1}^2-{y_1}^2)t,$$

於是內心的座標變為

$$I\Big(\frac{s(x_2-y_2)(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1-y_1},\frac{s(x_2-y_2)(x_1y_2+x_2y_1)}{x_1-y_1}\Big).$$

又從外心得到的結果

$$2c|ab \Rightarrow \frac{2x_2y_2s \times 2x_1y_1t}{2({x_2}^2-{y_2}^2)s} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x_1y_1t}{({x_2}^2-{y_2}^2)} \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \frac{x_1y_1s}{({x_1}^2-{y_1}^2)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{s}{x_1-y_1} \in \mathbb{Z},$$

故 I 為格子點.

5. 三個旁心 P_A, P_B, P_C:

$$P_A\Big(\frac{s(x_2-y_2)(x_1x_2+y_1y_2)}{x_1+y_1}, \frac{s(x_2-y_2)(x_1x_2-y_1y_2)}{x_1+y_1}\Big),$$
$$P_B\Big(\frac{s(x_2+y_2)(x_1x_2+y_1y_2)}{x_1-y_1}, \frac{s(x_2+y_2)(x_1x_2-y_1y_2)}{x_1-y_1}\Big),$$
$$P_C\Big(\frac{-s(x_2+y_2)(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1+y_1}, \frac{-s(x_2+y_2)(x_1y_2+x_2y_1)}{x_1+y_1}\Big),$$

由內心得到的 $\frac{s}{({x_1}^2-{y_1}^2)} \in \mathbb{Z}$, 可推得三旁心皆為格子點.

相加的部分同理可證五心皆為格子點, 這部分還沒有證明到「擺斜」的部分, 由於其外心的部分很難證出它會是一個格子點, 於是這部分在之後將會用一個新的定義予以說明. 而如上這種「擺正」的三角形, 我將其定義如下:

定義 2.6. 由兩個型態「#」併列在一起所拼湊出來的三角形, 並且有一邊與 x 軸或 y 軸平行, 再分別滿足 $2 \times \overline{AB}|\overline{AE} \times \overline{AC}$, $2 \times \overline{AB}|\overline{AD} \times \overline{AC}$ 的三角形, 如圖 1 的 $\triangle BCD$ 與 $\triangle BCE$ 稱之為型態「$*$」.

舉例.

型態「$*$」三角形:

1. 「相減」型

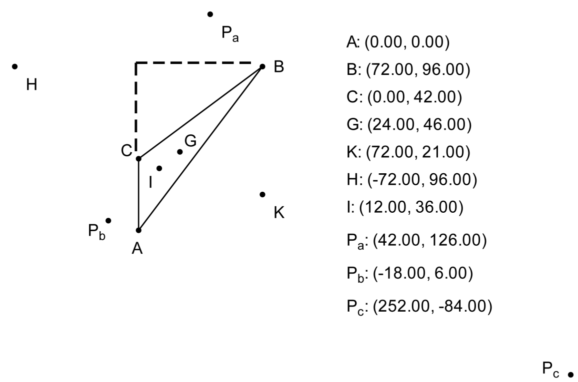

圖 4

2. 「相加」型

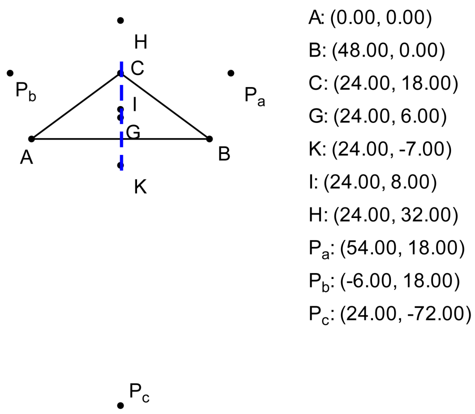

圖 5

2.3 邊長非有理數且五心皆為格子點的各種三角形型態

以上討論的皆是邊長為整數的情況, 那麼接下來我們來看看邊長為無理數的情況. 設一格點三角形三頂點為 (m,n), (p,q), (r,s), 則其內心坐標為

$$\Big(\frac{r\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2}+p\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}+m\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}}{\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2}+\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}+\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}},$$
$$\frac{s\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2}+q\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}+n\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}}{\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2}+\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}+\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}}\Big)$$

若其要是一個格子點的話, 令其坐標為 (t,u) (為格子點), 則有

$$\begin{cases} (r-t)\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2} \\ \quad +(p-t)\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}+(m-t)\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}=0, \\ (s-u)\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2} \\ \quad +(q-u)\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}+(n-u)\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}=0. \end{cases}$$

之後可分為三種情況討論:

1. 三個根號皆為不同類方根
   此時等式成立的話必有 $r=p=m=t$, $s=q=n=u$, 但這樣三頂點便成為同一點, 矛盾.

2. 其中有兩個為同類方根, 另一個不是
   不失一般性, 可假設 $\sqrt{(p-m)^2+(n-q)^2}$ 與其他兩個為不同類方根, 則等式成立的

話必有 $r=t, s=u$, 且我們令 $\sqrt{(m-r)^2+(n-s)^2}=k\sqrt{v}$, $\sqrt{(r-p)^2+(s-q)^2}=k'\sqrt{v}$ 其中 k 與 k' 為正整數且 v 的正因數中沒有大於 1 的完全平方數. 代入等式後我們又可得到

$$\begin{cases} pk-kt+k'm-k't=0 \Rightarrow r=t=\dfrac{pk+k'm}{k+k'}, \\ qk-ku+k'n-k'u=0 \Rightarrow s=u=\dfrac{qk+k'n}{k+k'}. \end{cases}$$

但如此的話則三點共線, 又矛盾.

3. 三個皆為同類方根

   於是這三個根號只有一種可能, 就是三個皆為同類方根. 由此, 我們可再建立一種建構方法, 依據之前所得出的兩種型態, 以型態「#」為例 (又以其中「擺正」的為例), 我們可將三角形的三邊長各乘上 $\sqrt{a^2+b^2}$, 其中 a, b 為互質的正整數, 然後再將此三角形逆時針旋轉 θ 角, 其中 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 於是新得到的三角形三頂點皆在格子點上, 且各心坐標的矩陣皆是原本坐標的矩陣乘上 $\begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix}$ (此為 $\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 化簡後的結果), 於是新的各心坐標仍然會是整數. 值得一提的是, 當 $\sqrt{a^2+b^2}$ 為整數時, 便是原本型態「#」中擺斜的三角形.

   同理, 型態「$*$」的三角形中也可以由「擺正」的情形經由以上的操作得出邊長帶有根號的新型態三角形以及原本型態「$*$」中擺斜的三角形.

   由此, 我便可以定義出之前型態「$*$」中「擺斜」的三角形了:

定義 2.7. 由型態「$*$」的三角形經由邊長放大 $\sqrt{a^2+b^2}$ ($\sqrt{a^2+b^2}$ 為整數) 且再旋轉 θ 角後 (其中 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的三角形, 稱為型態「$*$ 斜」.

以及我可以找出邊長為無理數的三角形型態:

結論. 由型態「#」, 型態「$*$」以及型態「$*$ 斜」的三角形經由邊長放大 $\sqrt{a^2+b^2}$ ($\sqrt{a^2+b^2}$ 非整數) 且再旋轉 θ 角後 (其中 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的三角形, 其五心都在格子點上.

2.4 五心皆在格子點上的三角形之必要條件

之前我的研究只討論出了如何建構出五心皆在格子點上的三角形, 然而是否只要五心在格子點上, 那都會是我所建構出的三角形型態其中之一呢? 目前我只能處理「擺正」的情形, 也就是: 有一邊平行於 x 軸或 y 軸的三角形, 只要其五心在格子點上, 那就一定是我所找出「擺正」的型態中 (型態「#」, 型態「$*$」) 二者之一. 至於「擺斜」的各種型態, 則尚未找出其完整的必要條件.

定理 2.8. 邊長為整數, 五心皆為格子點, 且其有一邊平行 x 軸或 y 軸的三角形型態只有兩種, 即為型態「#」, 型態「$*$」.

由此, 我們可令一個三角形如圖:

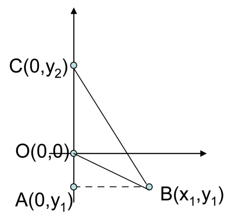

圖 6

1. $y_1=0$: $G(\frac{x_1}{3},\frac{y_2}{3})$, $K(\frac{x_1}{2},\frac{y_2}{2})\Rightarrow 6|x_1,y_2$ 且 $\sqrt{{x_1}^2+{y_2}^2}\in\mathbb{Z}$. 於是這樣的三角形與定義 2.4 (型態「#」) 相符.

2. $y_1\neq 0$: $G(\frac{x_1}{3},\frac{y_1+y_2}{3})$, $K(\frac{{x_1}^2+y_1(y_1-y_2)}{2x_1},\frac{y_2}{2})$,由 G 的坐標以及 K 的 y 坐標可有以下的分類:

$$\begin{cases} x_1\equiv 0 \pmod 6 \\ \begin{cases} y_2 \equiv 2 \\ y_1 \equiv 1\vee 4 \\ \quad (\times)(\times) \end{cases} \begin{cases} y_2 \equiv 4 \\ y_1 \equiv 2\vee 5 \\ \quad (\times)(\times) \end{cases} \begin{cases} y_2 \equiv 0 \\ y_1 \equiv 0\vee 3 \\ \quad (\times) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3\equiv 0 \pmod 6 \\ \begin{cases} y_2 \equiv 2 \\ y_1 \equiv 1\vee 4 \\ \quad (\times)(\times) \end{cases} \begin{cases} y_2 \equiv 4 \\ y_1 \equiv 2\vee 5 \\ \quad (\times)(\times) \end{cases} \begin{cases} y_2 \equiv 0 \\ y_1 \equiv 0\vee 3 \\ \quad (\times)\otimes \end{cases} \end{cases}$$

其中 $(\times)$ 的部分無法滿足 K 的 x 坐標為整數, 而 $\otimes$ 則是因為 $\sqrt{{x_1}^2+{y_2}^2}\in\mathbb{Z}$, 而 $(6a+3)^2+(6b+3)^2\equiv 2\pmod 4$, 因此產生矛盾. 於是只有一組同餘解可行, 即是 $x_1\equiv y_1\equiv y_2\equiv 0\pmod 6$. 因此, $\triangle ABO$ 以及 $\triangle ABC$ 皆屬於型態「#」.

而又因 O 為格點必須滿足 $\frac{{x_1}^2+y_1(y_1-y_2)}{2x_1}\in\mathbb{Z}$, 即 $\frac{y_1(y_1-y_2)}{2x_1}\in\mathbb{Z}$ (因 $\frac{x_1}{2}\in\mathbb{Z}$), 即 $2\overline{AB}|\overline{AC}\times\overline{AO}$. 由以上的推論, 此三角形必為型態「$*$」. 於是證明完畢, 邊長為整數, 五心皆為格子點, 且其有一邊平行 x 軸或 y 軸的三角形必為型態「#」或「$*$」.

參考文獻

[1] 黃家禮,《幾何明珠》, 九章書局, 2000.

[2] 賀功保, 葉美雄,《三角形的五心》, 哈爾濱工業大學, 2009.

[3] 南一版數學課本第三, 四冊.