魔術三角形變變變

許綺云

台北市立第一女子高級中學

Abstract

Compare to the conventional magic triangle, the subtractive magic triangle is a new concept. Due to the interest in the subject, I study constructions of subtractive magic triangles of order n, the optimal maximum and minimum of the magic difference d. We then combine this with the conventional one to study the perfect magic triangle, which is both conventional and subtractive. Besides, the study also includes the configuration of tetrahedrons and polygons. When doing the research, I first find patterns and give conjectures. We then prove the conjectures. Finally think about whether it can suit other parts of the study. From the study I get the optimal maximum and minimum of the magic difference d for subtractive magic triangles of order n: when n is even and $n \geq 6$, $n(n+2)/4 \leq d \leq 3n^2/4-2$; when n is odd, $(n-1)(n+11)/4 \leq d \leq 3(n+1)^2/4-4$. The result can be proved by constructing a subtractive magic triangle whose magic difference satisfies the maximum or minimum.

摘要: 可減魔術三角形相對於傳統魔術三角形是個全新的概念, 基於對此主題的興趣, 本文研究 n 階可減魔術三角形的建構方法以及魔術差 d 的最佳上下界. 然後結合傳統魔術三角形, 探討同時是傳統和可減魔術三角形的完美魔術三角形, 另外也將結果推廣到四面體及多邊形的情況. 研究過程中先尋找規律, 再大膽猜測, 並證明自己的想法, 最後思考是否能適用於其他部分. 本研究得出 n 階可減魔術三角形魔術差 d 的最佳上下界: 當 n 是偶數且 $n \geq 6$ 時, $n(n+2)/4 \leq d \leq 3n^2/4-2$; 當 n 是奇數時, $(n-1)(n+11)/4 \leq d \leq 3(n+1)^2/4-4$. 並透過找到建構方法證明之.

1 簡介

1.1 研究動機

在一次專題研究課後, 老師希望我們進行科展資料蒐集的工作, 找出自己有興趣的主題. 在《數學傳播》, 我發現一篇有趣的文章 [3], 其中討論有別於傳統魔術三角形的「可減魔術三角形」. 我覺得這個主題很有意思, 而且文中提出的許多問題都尚未解決, 於是決定作更深入的研究.

1.2 研究背景

Ajose 在 1983 年 5 月的 Mathematics Teacher 發表了一篇文章, 名為 Subtractive magic triangles [1], 文中提出「可減魔術三角形」的概念. 王湘君將此篇文章翻譯為〈可減的魔術三角形〉[3] 登於《數學傳播》第 9 卷第 2 期上. 傳統魔術三角形與其推廣, 皆以「和」為基礎, 在這方面的研究很多, 更多的資料請詳見 Heinz 的網站 [2]; 但重點在「差」的可減魔術三角形屬於比較少人知道的區域. 以下簡單介紹魔術三角形: 如圖 1, 若三角形每邊有三個數且數字和都是定值, 稱為 3 階 (傳統) 魔術三角形; 如圖 2, 若每邊有三個數且較大兩數和減最小數的差都是定值, 稱為 3 階可減魔術三角形; 如圖 3, 若每邊有四個數且較大兩數和減較小兩數和的差都是定值, 稱為 4 階可減魔術三角形. 有關它們的定義詳見第 1 至 5 節名詞定義.

1
6 5
2 4 3

9 = 1 + 6 + 2
= 1 + 5 + 3
= 2 + 4 + 3

圖 1. 3 階可減魔術三角形.

1
6 3
2 4 5

7 = (6 + 2) - 1
= (5 + 3) - 1
= (5 + 4) - 2

圖 2. 3 階可減魔術三角形.

2
4 1
7 3
5 8 9 6

6 = (7 + 5) - (4 + 2)
= (6 + 3) - (2 + 1)
= (9 + 8) - (6 + 5)

圖 3. 4 階可減魔術三角形.

1.3 過去相關成果

前面提到 Ajose 的文章主要包括下列成果。首先, 有關存在性的部分, 文中對於 $3 \leq n \leq 7$, 給出一些 n 階可減魔術三角形的例子; 但是當 $n > 7$ 時, 因為沒有找到例子, 尚未確定是否存在 n 階可減魔術三角形. 其次, 概略估計魔術差的範圍: 當 n 是偶數時, $n^2/4 \leq d \leq n(5n-6)/4$; 當 n 是奇數時, $(n+1)^2/4 \leq d \leq 5(n^2-1)/4$; 並聲明這並非最佳上下界. 也提出一些性質: 將每個元素增加一定數 m, 仍維持為可減魔術三角形, 且魔術差變為 $d+m$ (但我發現當 n 為偶數時, 魔術差不變). 將每個元素乘上一定數 k, 若「n 為偶數」或「n 為奇數且 k 為正數」, 則維持為可減魔術三角形, 且魔術差變為 $|k| \times d$; 若「n 為奇數且 k 為負數」, 則不保持其魔術性. 此外, 算術數列亦能排成可減魔術三角形.

1.4 研究目的

針對前述 Ajose 文章中的已知結果, 以及他所提出來的一些未解問題, 我的研究目的主 要有下列數點:

1. 探討 n 階可減魔術三角形的存在性.
2. 尋找魔術差的最佳上下界.
3. 尋找 n 階可減魔術三角形的性質與建構方法.
4. 推廣至 n 階完美魔術三角形, 可減魔術四面體及可減魔術多邊形.

1.5 名詞定義

傳統魔術三角形 (conventioal magic triangle) 是由一群從 1 開始的連續自然數, 排列成中空正三角形的樣子, 使得這個三角形每邊的數字和 D (稱為魔術和) 都相同. 若三角形每邊有 n 個數, 稱為 n 階的傳統魔術三角形, 以符號表示為 CT_n.

可減魔術三角形 (subtractive magic triangle) 的排列方法同上, 設三角形每邊有 n 個數, 從每邊的 n 個數中, 可得到兩個部分和. 若 n 為奇數, 則 l 是 $(n+1)/2$ 個較大數的和, s 是 $(n-1)/2$ 個較小數的和; 若 n 為偶數, 則 l 是 $n/2$ 個較大數的和, s 是 $n/2$ 個較小數的和. 令 d 表 l 與 s 的差 (稱為魔術差), 若三角形每邊的 d 相等, 稱為 n 階的可減魔術三角形, 以符號表示為 ST_n.

同時為傳統和可減的魔術三角形稱為完美魔術三角形 (perfect magic triangle), 若三角形每邊有 n 個數, 稱為 n 階的完美魔術三角形, 以符號表示為 PT_n.

可減魔術四面體 (subtractive magic tetrahedron) 是由一群從 1 開始的連續自然數, 排列成中空正四面體的樣子, 使得這個四面體每條稜邊的魔術差都相同, 若四面體每條稜邊有 n 個數, 稱為 n 階的可減魔術四面體, 以符號表示為 STe_n.

可減魔術多邊形 (subtractive magic polygon) 是由一群從 1 開始的連續自然數, 排列成中空正多邊形的形狀, 使得這個多邊形所有邊的魔術差都相同, 若多邊形有 m 條邊, 每邊有 n 個數, 稱為 n 階的可減魔術 m 邊形, 以符號表示為 S_mP_n.

1.6 本文主要結果

在這份研究報告裡, 我們的主要結果簡述如下:

存在性: $n \geq 3 \Leftrightarrow$ 存在 ST_n; $n \geq 5$ 存在 PT_n; $n \geq 4$ 且 n 是偶數 $\Leftrightarrow$ 存在 STe_n.

魔術差 d 的最佳上下界:

<table>
<tr><th>n</th><th>n 是奇數</th><th>n 是偶數</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ST_n</td><td rowspan="2">$\frac{(n-1)(n+11)}{4} \leq d \leq \frac{3}{4}(n+1)^2 - 4$</td><td>$6 \leq d \leq 9, n = 4$</td></tr>
<tr><td>$\frac{n(n+2)}{4} \leq d \leq \frac{3}{4}n^2 - 2, n \geq 6$</td></tr>
<tr><td>STe_n</td><td>不存在</td><td>$\left\lceil \frac{n(n+2)}{4}, \frac{3}{4}n^2 - 3 \right\rceil \leq d \leq \frac{3}{2}n^2 - 4$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">S_mP_n</td><td rowspan="3">$d \leq \frac{m}{4}n^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, m 是奇數</td><td>$d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m, m \equiv 0 \pmod 8$</td></tr>
<tr><td>$d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \pm \frac{3}{8}, m \equiv \pm 1 \pmod 8$</td></tr>
<tr><td>$d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \mp \frac{1}{4}, m \equiv \pm 2 \pmod 8$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$d \leq \frac{m}{4}n^2 - \frac{m}{2}$, m 是偶數</td><td>$d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \pm \frac{1}{8}, m \equiv \pm 3 \pmod 8$</td></tr>
<tr><td>$d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m + \frac{1}{2}, m \equiv 4 \pmod 8$</td></tr>
</table>

1.7 感謝詞

能完成這份研究, 要感謝很多人的幫忙. 感謝鄭凱鐘老師字斟句酌幫我修改語句, 讓我的想法能更完整地傳達, 也不時提出建議, 使得研究內容更加豐富. 感謝張鎮華教授讓我的報告更加簡要, 也讓我更了解正式的寫法. 感謝父母親在身旁默默的支持我, 使我不須顧慮太多. 還有許多或多或少幫助我的人, 實在無法一一細數, 真的很謝謝你們!

2 文獻探討

Ajose 在他的文章中提出 7 個問題並給了這些問題的簡答. 有些問題並沒有完整解釋, 而且有一個小錯誤, 討論如後.

2.1 文章概要

Ajose 的文章開頭舉了三階傳統魔術三角形, 三階和四階可減魔術三角形的例子, 並定義這兩種魔術三角形. 提出的 7 個問題與簡答簡述如下:

1. 除了開頭的例子, 是否有其他可減魔術三角形? 簡答: 有, 並舉了另兩個三階和四階的例子.
2. 對每一自然數 n ($n \geq 2$) 而言, 是否可由前 $3n$ 個自然數組成一可減魔術三角形? 簡答: 當 $2 \leq n \leq 6$, 可以, 並舉出例子: 但當 $n > 6$, 尚未確定.
3. 把每一邊每一元素增加一定數 m, 此可減魔術三角形是否保持魔術性? 簡答: 是.
4. 每一元素乘上一定數 k, 結果如何? 簡答: 若可減魔術三角形為「偶數階」或「奇數階且 k 為正數」, 則保持魔術性.
5. 在 3, 4 問中, 魔術差是多少? 簡答: 增加一定數 m, 魔術差變為 $d + m$; 乘上一定數 k, 若保持魔術性, 魔術差變為 $|k| \times d$.
6. 已知階次 n, 魔術差最大, 最小為多少? 簡答: 當 n 是偶數時, $n^2/4 \leq d \leq n(5n-6)/4$; 當 n 是奇數時, $(n+1)^2/4 \leq d \leq 5(n^2-1)/4$.
7. 算術數列是否能排成可減魔術三角形? 簡答: 可以.

2.2 文中的小錯誤

第 2.1 節中第 5 題前半部: 把 ST_n 的每個元素增加一個定數 m, 魔術差是多少? 其簡答是: 魔術差變為 $d+m$. 但事實上, 當 n 是偶數, 將 ST_n 的每個元素增加定數 m, 較大的和變為 $l+mn/2$, 較小的和變為 $s+mn/2$, 所以新的魔術差 $d'=(l+mn/2)-(s+mn/2)=l-s=$ 原來魔術差 d. 也就是說, 正確的答案是:「若 n 為偶數, ST_n 魔術差維持 d; 若 n 為奇數, ST_n 魔術差變為 $d+m$」.

2.3 文中魔術差上下界的由來

第 2.1 節中第 6 題: 已知階次 n, 魔術差最大, 最小為多少? 文中的簡答為: 當 n 是偶數時, $n^2/4 \le d \le n(5n-6)/4$; 當 n 是奇數時, $(n+1)^2/4 \le d \le 5(n^2-1)/4$. 但這個範圍只是 d 的上下界, 並非最佳上下界. 由於作者並沒有寫到如何解出這個範圍, 所以我揣測他的想法是這樣給出來的:

假設魔術差 d 發生於三角形的某一邊, 其所含的 n 個數 $a_1>a_2>\cdots>a_n$. 當 n 是偶數時, 較大的 $n/2$ 個數滿足 $a_i \le 3n-2-i$, 其中 $1\le i\le n/2$; 而較小的 $n/2$ 個數滿足 $a_j \ge n+1-i$, 其中 $n/2+1\le j\le n$, 所以

$$\begin{aligned} d &\le \Big((3n-3)+(3n-4)+\cdots+(\frac{5}{2}n-2)\Big)-(1+2+\cdots+\frac{n}{2}) \\ &= \frac{n}{4}(5n-6). \end{aligned}$$

其次, 對 $1\le i\le n/2$, 因為 $a_i>a_{i+1}>\cdots>a_{i+n/2}$, 所以 $a_i-a_{i+n/2}\ge n/2$, 因此

$$\begin{aligned} d &= (a_1-a_{1+n/2})+(a_2-a_{2+n/2})+\cdots+(a_{n/2}-a_{n/2+n/2}) \\ &\ge \frac{n}{2}\times\frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

當 n 是奇數時, 較大的 $(n+1)/2$ 個數滿足 $a_i\le 3n-2-i$, 其中 $1\le i\le (n+1)/2$; 而較小的 $(n-1)/2$ 個數滿足 $a_j\ge n+1-j$, 其中 $(n+3)/2\le j\le n$, 所以

$$\begin{aligned} d &\le \Big((3n-3)+(3n-4)+\cdots+(\frac{5n}{2}-\frac{5}{2})\Big)-\Big(1+2+\cdots+\frac{1}{2}(n-1)\Big) \\ &= \frac{5}{4}(n^2-1). \end{aligned}$$

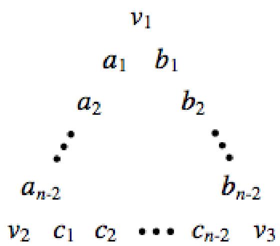
其次, $a_1 \geq n$ 而且對 $2 \leq i \leq (n+1)/2$, 因為 $a_i > a_{i+1}a > \cdots > a_{i+(n-1)/2}$, 所以 $a_i - a_{i+(n-1)/2} \geq (n-1)/2$, 因此

$$\begin{aligned} d &= a_1 + (a_2 - a_{2+(n-1)/2}) \\ &\quad + (a_3 - a_{3+(n-1)/2}) + \cdots + (a_{(n+1)/2} - a_{(n+1)/2+(n-1)/2}) \\ &\geq n + \frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

上述論證所得到的上下界不會是最佳上下界, 因為我們把大的 a_i ($1 \leq i \leq n/2$) 以及小的 a_j ($n/2+1 \leq j \leq n$) 都用最壞的情況估計, 如果把三邊的 a_i 值拿出來用, 平均來講就應該有顯著的不同.

3 可減魔術三角形

為了方便呈現, 我們利用 $3 \times n$ 矩陣表示 ST_n. 矩陣的每一列代表 ST_n 的每一邊, 以 E_1, E_2, E_3 分別表示矩陣的第一, 二, 三列, 兩端頂點上的數則置於一列的兩側. 令頂點上的數 $v_1 < v_2 < v_3$, E_1 的頂點為 v_1 和 v_2, E_2 的頂點為 v_1 和 v_3, E_3 的頂點為 v_2 和 v_3. 除了頂點上的數之外, 將每一列的數由左而右, 從小到大排列, 如圖 4 所示. 設 d_i 為 E_i 的 d ($i = 1, 2, 3$), 當 $d_1 = d_2 = d_3$ 時, 即為一個 ST_n.



$$\begin{bmatrix} v_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & v_2 \\ v_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & v_3 \\ v_2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & v_3 \end{bmatrix}_{3\times n}$$

圖 4. ST_n 的圖形及矩陣表示.

定理 3.1. 當 $n \geq 6$ 且為偶數時, 存在魔術差是 $\frac{3}{4}n^2 - 2$ 或 $\frac{n(n+2)}{4}$ 的 ST_n.

證明. 首先, 考慮下面的 ST_n:

$$\begin{aligned} &v_1 = 1, \quad v_2 = 3n-5, \quad v_3 = 3n-3; \\ &a_i = 3i+1\,(i = 1, 2, \cdots, n-3), \quad a_{n-2} = 3n-4; \\ &b_i = 3i\,(i = 1, 2, \cdots, n-3), \quad b_{n-2} = 3n-7; \\ &c_i = 3i-1\,(i = 1, 2, \cdots, n-3), \quad c_{n-2} = 3n-6. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \langle 4 & 7 & \cdots & 3n-8\rangle & 3n-4 & 3n-5 \\ 1 & \langle 3 & 6 & \cdots & 3n-9\rangle & 3n-7 & 3n-3 \\ 3n-5 & \langle 2 & 5 & \cdots & 3n-10\rangle & 3n-6 & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= \Big((3n-4)+(\frac{3}{2}n+1)\Big)-\Big((\frac{3}{2}n-2)+1\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-2)=\frac{3}{4}n^2-2, \\ d_2 &= \Big((3n-7)+\frac{3}{2}n\Big)-\Big((\frac{3}{2}n-6)+1\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-2)=\frac{3}{4}n^2-2, \\ d_3 &= \Big((3n-3)+(3n-5)+(3n-6)\Big) \\ &\quad -\Big((\frac{3}{2}n-1)+(\frac{3}{2}n-4)+(\frac{3}{2}n-7)\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-3)=\frac{3}{4}n^2-2, \end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-2$ 的 ST_n. 其次考慮下面的 ST_n:

$$\begin{aligned} &v_1=n, \quad v_2=3n/2-1, \quad v_3=2n-2; \\ &a_i=i\,(i=1,2,\cdots,n-2); \\ &b_1=n-1, \quad b_i=n-1+i\,(i=2,3,\cdots,n/2-1), \\ &b_i=n+i\,(i=n/2,n/2+1,\cdots,n-3), \quad b_{n-2}=2n-1; \\ &c_i=2n-1+i\,(i=1,2,\cdots,n-2). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} n & \langle 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n-2\rangle & \frac{3}{2}n-1 \\ n & n-1 & \langle n+1 & n+2 & \cdots\rangle & \langle\frac{3}{2}n & \frac{3}{2}n+1 & \cdots\rangle & 2n-1 & 2n-2 \\ \frac{3}{2}n-1 & \langle 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & 2n+4 & 2n+5 & \cdots & 3n-3\rangle & 2n-2 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= \Big((\frac{3}{2}n-1)+n\Big)-\Big(\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1)\Big)+\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-2)=\frac{n(n+2)}{4}, \\ d_2 &= (\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}=\frac{n(n+2)}{4}, \\ d_3 &= \Big((\frac{5}{2}n-1)+(\frac{5}{2}n-2)\Big) \\ &\quad -\Big((2n-2)+(\frac{3}{2}n-1)\Big)+\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-2)=\frac{n(n+2)}{4}, \end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $n(n+2)/4$ 的 ST_n. □

但當 $n=4$ 時, 列出 ST_4 所有情況之後, 發現魔術差的最小上界不是 $3/4\cdot 4^2-2=10$, 而是 9. 圖 5 是魔術差為 $3n^2/4-2$ 的例子; 圖 6 是魔術差為 $n(n+2)/4$ 的例子.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 14 & 13 \\ 1 & 3 & 6 & 9 & 11 & 5 \\ 13 & 2 & 5 & 8 & 12 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & 11 & 10 \\ 8 & 12 & 13 & 14 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

圖 5. $ST_6, d=25$.　　圖 6. $ST_6, d=12$.

定理 3.2. 對於 $n\geq 4$ 且為偶數時, 存在 $\dfrac{3(n-1)^2+1}{4}\leq d\leq \dfrac{3}{4}n^2-3$ 的 ST_n

證明. 首先, 考慮下面的 ST_n:

$$\begin{aligned}
&a_1=1, \quad a_2=5, \quad a_i=3i\,(i=3,4,\cdots,n-2);\\
&b_1=3, \quad b_2=4, \quad b_i=3i-1\,(i=3,4,\cdots,n-2);\\
&c_1=2, \quad c_2=6, \quad c_i=3i-2\,(i=3,4,\cdots,n-2).
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-5 & 1 & 5 & \langle 9 & 12 & \cdots & 3n-6\rangle & 3n-4 \\ 3n-5 & 3 & 4 & \langle 8 & 11 & \cdots & 3n-7\rangle & 3n-3 \\ 3n-4 & 2 & 6 & \langle 7 & 10 & \cdots & 3n-8\rangle & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \Big((3n-4)+(3n-5)+(\frac{3}{2}n+6)+(\frac{3}{2}n+3)\Big) \\
&\quad -\Big(\frac{3}{2}n+(\frac{3}{2}n-3)+5+1\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
d_2 &= \Big((3n-3)+(3n-5)+(\frac{3}{2}n+5)+(\frac{3}{2}n+2)\Big) \\
&\quad -\Big((\frac{3}{2}n-1)+(\frac{3}{2}n-4)+4+3\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
d_3 &= \Big((3n-3)+(3n-4)+(\frac{3}{2}n+4)+(\frac{3}{2}n+1)\Big) \\
&\quad -\Big((\frac{3}{2}n-2)+(\frac{3}{2}n-5)+6+2\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3^2}{4}-3,
\end{aligned}
$$

所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-3$ 的 ST_n. 將頂點上三數 $3n-3$, $3n-4$, $3n-5$ 與比這三個數小 3 的數 $3n-6$, $3n-7$, $3n-8$ 交換, 計算各邊的魔術差均為 $3n^2/4-6$, 所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-6$ 的 ST_n. 依此類推, 可得到魔術差為 $3n^2/4-9, 3n^2/4-12, \cdots, [3(n-1)^2+1]/4$ 的 ST_n.

其次考慮下面的 ST_n:

$$
\begin{aligned}
&v_1=3n-6, \quad v_2=3n-5, \quad v_3=3n-4; \\
&a_i=3i-2\,(i=1,2,\cdots,n-2); \\
&b_i=3i\,(i=1,2,\cdots,n-3), \quad b_{n-2}=3n-3; \\
&c_i=3i-1\,(i=1,2,\cdots,n-2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
3n-6 & \langle 1 & 4 & \cdots & 3n-8\rangle & 3n-5 \\
3n-6 & \langle 3 & 6 & \cdots\rangle & 3n-3 & 3n-4 \\
3n-5 & \langle 2 & 5 & \cdots & 3n-7\rangle & 3n-4
\end{bmatrix}
$$

可以計算各邊的魔術差如下：

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (3n-6)-(\frac{3}{2}n-2)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-1)=\frac{3}{4}n^2-4, \\
d_2 &= (3n-4)-\frac{3}{2}n+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-1)=\frac{3}{4}n^2-4, \\
d_3 &= (3n-5)-(\frac{3}{2}n-1)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-1)=\frac{3}{4}n^2-4,
\end{aligned}
$$

所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-4$ 的 ST_n. 將頂點上三數 $3n-4, 3n-5, 3n-6$ 與比這三個數小 3 的數 $3n-7, 3n-8, 3n-9$ 交換, 計算各邊的魔術差均為 $3n^2/4-7$, 所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-7$ 的 ST_n. 依此類推, 可得到魔術差為 $3n^2/4-10, 3n^2/4-13, \cdots, 3n^2/4-3n/2+2$ 的 ST_n.

再考慮下面的 ST_n:

$$\begin{aligned}
&v_1 = 3n-7, \quad v_2 = 3n-6, \quad v_3 = 3n-5;\\
&a_i = 3i-1\,(i=1,2,\cdots,n-3), \quad a_{n-2} = 3n-4;\\
&b_i = 3i-2\,(i=1,2,\cdots,n-2);\\
&c_i = 3i\,(i=1,2,\cdots,n-3), \quad c_{n-2} = 3n-3.
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-7 & \langle 2 & 5 & \cdots\rangle & 3n-4 & 3n-6 \\ 3n-7 & \langle 1 & 4 & \cdots & 3n-8\rangle & 3n-5 \\ 3n-6 & \langle 3 & 6 & \cdots\rangle & 3n-3 & 3n-5 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下：

$$\begin{aligned}
d_1 &= (3n-6) - (\frac{3}{2}n-1) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-1) = \frac{3}{4}n^2-5,\\
d_2 &= (3n-7) - (\frac{3}{2}n-2) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-1) = \frac{3}{4}n^2-5,\\
d_3 &= (3n-5) - \frac{3}{2}n + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-1) = \frac{3}{4}n^2-5,
\end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-5$ 的 ST_n. 將頂點上三數 $3n-5, 3n-6, 3n-7$ 與比這三個數小 3 的數 $3n-8, 3n-9, 3n-10$ 交換, 計算各邊的魔術差均為 $3n^2/4-8$, 所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-8$ 的 ST_n. 依此類推, 可得到魔術差為 $3n^2/4-11, 3n^2/4-14, \cdots, 3n^2/4-3n/2+1$ 的 ST_n. □

圖 7, 圖 8 分別為 ST_4, ST_6 的例子.

$$\underset{d=7}{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}} \qquad \underset{d=8}{\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}} \qquad \underset{d=9}{\begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 9 \\ 8 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}}$$

圖 7. $ST_6, d=7,\cdots,9$.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 & 11 & 14 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 7 & 13 & 10 \\ 9 & 3 & 6 & 12 & 15 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 & 7 & 13 & 10 \\ 9 & 3 & 6 & 12 & 15 & 11 \\ 10 & 2 & 5 & 8 & 14 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 & 7 & 13 & 11 \\ 10 & 3 & 4 & 8 & 14 & 12 \\ 11 & 2 & 6 & 9 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

$d = 19$ $\qquad$ $d = 20$ $\qquad$ $d = 21$

$$\begin{bmatrix} 11 & 2 & 5 & 8 & 14 & 12 \\ 11 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 12 & 3 & 6 & 9 & 15 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 12 & 3 & 6 & 9 & 15 & 14 \\ 13 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 13 & 1 & 5 & 7 & 10 & 14 \\ 13 & 3 & 4 & 8 & 11 & 15 \\ 14 & 2 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$d = 22$ $\qquad$ $d = 23$ $\qquad$ $d = 24$

圖 8. $ST_6, d = 19, \cdots, 24.$

定理 3.3. 當 $n \geq 3$ 且為奇數時, 存在魔術差是 $\dfrac{3}{4}(n+1)^2 - 4$ 或 $\dfrac{(n-1)(n+11)}{4}$ 的ST_n.

證明. 首先, 考慮下面的ST_n:

$$\begin{aligned} &v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3; \\ &a_i = 3i-2 \, (i = 1, 2, \cdots, n-2); \\ &b_i = 3i-1 \, (i = 1, 2, \cdots, n-2); \\ &c_i = 3i \, (i = 1, 2, \cdots, n-2). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-5 & \langle 1 & 4 & \cdots & 3n-8 \rangle & 3n-4 \\ 3n-5 & \langle 2 & 5 & \cdots & 3n-7 & 3n-3 \\ 3n-4 & \langle 3 & 6 & \cdots & 3n-6 & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= (3n-4) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2 - 4, \\ d_2 &= \Big((3n-3) + (3n-5)\Big) - \frac{3n-5}{2} + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-3}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2 - 4, \\ d_3 &= (3n-4) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2 - 4, \end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4 - 4$ 的 ST_n.

其次考慮下面的 ST_n:

$$\begin{aligned}&v_1 = 2n-3, \quad v_2 = 2n-1, \quad v_3 = 3n-3;\\ &a_i = i\,(i=1,2,\cdots,n-2);\\ &b_i = n-2+i\,(i=1,2,\cdots,n-2);\\ &c_1 = 2n-2, \quad c_i = 2n-2+i\,(i=2,3,\cdots,n-2).\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2n-3 & \langle 1 & 2 & \cdots & n-2\rangle & 2n-1 \\ 2n-3 & \langle n-1 & n & \cdots & 2n-3\rangle & 3n-3 \\ 2n-1 & 2n-2 & \langle 2n & 2n+1 & \cdots\rangle & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= \Big((2n-1)+(2n-3)+(n-2)\Big) - \Big(\frac{n-1}{2}+\frac{n-3}{2}\Big) + \frac{n-1}{2}(\frac{n-5}{2}) \\ &= \frac{(n-1)(n+11)}{4}, \\ d_2 &= \Big((3n-3)+(2n-3)+(2n-4)\Big) - \Big(\frac{3n-5}{2}+\frac{3n-7}{2}\Big) + \frac{n-1}{2}(\frac{n-5}{2}) \\ &= \frac{(n-1)(n+11)}{4}, \\ d_3 &= (3n-3)+\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{(n-1)(n+11)}{4}, \end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $(n-1)(n+11)/4$ 的 ST_n. □

圖 9 是魔術差為 $3(n+1)^2/4-4$ 的例子; 圖 10 是魔術差為 $(n-1)(n+11)/4$ 的例子.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

圖 9. $ST_3, d=8$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

圖 10. $ST_3, d=7$.

定理 3.4. 對於 $n \geq 3$ 且為奇數時, 存在 $\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4} \leq d \leq \frac{3}{4}(n+1)^2-4$ 的 ST_n.

證明. 首先, 考慮下面的 ST_n:

$$\begin{aligned}&v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3;\\ &a_i = 3i-2\,(i=1,2,\cdots,n-2);\\ &b_i = 3i-1\,(i=1,2,\cdots,n-2);\\ &c_i = 3i\,(i=1,2,\cdots,n-2).\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-5 & \langle 1 & 4 & \cdots & 3n-8\rangle & 3n-4 \\ 3n-5 & \langle 2 & 5 & \cdots & 3n-7\rangle & 3n-3 \\ 3n-4 & \langle 3 & 6 & \cdots & 3n-6\rangle & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= (3n-4)+\frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-4, \\ d_2 &= \Big((3n-3)+(3n-5)\Big)-\frac{3n-5}{2}+\frac{3n-3}{2}(\frac{n-3}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-4, \\ d_3 &= (3n-4)+\frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-4, \end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4-4$ 的 ST_n. 將頂點上三數 $3n-3$, $3n-4$, $3n-5$ 與比這三個數小 3 的數 $3n-6$, $3n-7$, $3n-8$ 交換, 計算各邊的魔術差均為 $3(n+1)^2/4-7$, 所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4-7$ 的 ST_n. 依此類推, 可得到魔術差為 $3(n+1)^2/4-10, 3(n+1)^2/4-13, \cdots,$ $3n^2/4+5/4$ 的 ST_n.

其次考慮下面的ST_n:

$$\begin{aligned} & v_1 = 3n-6, \quad v_2 = 3n-5, \quad v_3 = 3n-4; \\ & a_i = 3i\,(i=1,2,\cdots,n-3), \quad a_{n-2} = 3n-3; \\ & b_i = 3i-2\,(i=1,2,\cdots,n-2); \\ & c_i = 3i-1\,(i=1,2,\cdots,n-2). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-6 & \langle 3 & 6 & \cdots\rangle & & 3n-3 & 3n-5 \\ 3n-6 & \langle 1 & 4 & \cdots & 3n-8\rangle & & 3n-4 \\ 3n-5 & \langle 2 & 5 & \cdots & 3n-7\rangle & & 3n-4 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= (3n-5)+\frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-5, \\ d_2 &= \Big((3n-4)+(3n-6)\Big)-\frac{3n-7}{2}+\frac{3n-3}{2}(\frac{n-3}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-5, \\ d_3 &= (3n-5)+\frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-5, \end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4-5$ 的 ST_n. 將頂點上三數 $3n-4$, $3n-5$, $3n-6$ 與比這三個數小 3 的數 $3n-7$, $3n-8$, $3n-9$ 交換, 計算各邊的魔術差均為 $3(n+1)^2/4-8$, 所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4-8$

的 ST_n. 依此類推, 可得到魔術差為 $3(n+1)^2/4-11, 3(n+1)^2/4-14, \cdots,$ $3n^2/4+1/4$ 的 ST_n.

再考慮下面的 ST_n:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = 3n-7, \quad v_2 = 3n-6, \quad v_3 = 3n-5;\\
&a_i = 3i-1\,(i=1,2,\cdots,n-3), \quad a_{n-2} = 3n-4;\\
&b_i = 3i\,(i=1,2,\cdots,n-3), \quad b_{n-2} = 3n-3;\\
&c_i = 3i-2\,(i=1,2,\cdots,n-2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
3n-7 & \langle 2 & 5 & \cdots\rangle & 3n-4 & 3n-6\\
3n-7 & \langle 3 & 6 & \cdots\rangle & 3n-3 & 3n-5\\
3n-6 & \langle 1 & 4 & \cdots & 3n-8\rangle & 3n-5
\end{bmatrix}
$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (3n-6) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-6,\\
d_2 &= \Big((3n-5)+(3n-7)\Big) - \frac{3n-9}{2} + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-3}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-6,\\
d_3 &= (3n-6) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}(n+1)^2-6,
\end{aligned}
$$

所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4-6$ 的 ST_n. 將頂點上三數 $3n-5$, $3n-6$, $3n-7$ 與比這三個數小 3 的數 $3n-8, 3n-9, 3n-10$ 交換, 計算各邊的魔術差均為 $3(n+1)^2/4-9$, 所以這是一個魔術差為 $3(n+1)^2/4-9$ 的 ST_n. 依此類推, 可得到魔術差為 $3(n+1)^2/4-12, 3(n+1)^2/4-15, \cdots,$ $3n^2/4+9/4$ 的 ST_n. □

圖 11, 圖 12 分別為 ST_3, ST_5 的例子.

$$
\begin{matrix}
\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4\\ 3 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}\\
d=7 & d=8
\end{matrix}
$$

圖 11. $ST_3, d=7,8$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 12 & 7 \\ 6 & 1 & 4 & 10 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 11 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 & 10 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 11 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 & 11 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 12 & 10 \\ 9 & 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$d = 19 \qquad d = 20 \qquad d = 21$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 & 12 & 10 \\ 9 & 1 & 4 & 7 & 11 \\ 10 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 & 7 & 11 \\ 10 & 2 & 5 & 8 & 12 \\ 11 & 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$d = 22 \qquad d = 23$$

圖 12. $ST_5, d = 19, \cdots, 23$.

定理 3.5. *ST_n 存在若且唯若 $n \geq 3$.*

證明. $n = 1$, 只有一個數, 不構成三角形的條件. 當 $n = 2$, 只有一種排法, 如圖 13, 而三邊的魔術差不相等. 所以「若 ST_n 存在, 則 $n \geq 3$」.

當 $n \geq 3$ 時, 如果能找到一個 ST_n 的建構方法, 就證明了「若 $n \geq 3$, 則 ST_n 存在」. 所需的 ST_n 的建構方法參見定理 3.1 及 3.3. □

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

圖 13.

如圖 14 為一個 ST_4, 由以下三式觀察 d 發現:

$$6 = (7+5) - (4+2)$$
$$6 = (6+3) - (2+1)$$
$$6 = (9+8) - (6+5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

圖 14. $ST_4, d = 6$.

將三式相加可得 $6 \times 3 = (3+5+6+7+8+9) - (1+2+2+4+5+6)$. 因為所有的 ST_4 都是由 $1, \cdots, 9$ 組成, $1, \cdots, 9$ 的數字和為不變量, 所以再將式子改寫為:

$$6 \times 3 = \Big[(1+2+\cdots+9) + 2+5+6\Big] - 2(1+2+2+4+5+6),$$

其中 2, 5, 6 為頂點上的數, $1+2+2+4+5+6$ 為所有減數的和.

將這個做法推廣到 ST_n 之後, 易知 $3d$ 等於三角形所有數之和減掉兩倍的減數和再加上頂點上三數和:

$$3d = \Big[1+2+\cdots+(3n-3)\Big] - 2\times \text{減數和} + \text{頂點上三數和} \qquad (*)$$

定理 3.6. 當 $n \geq 6$ 且為偶數時, $\dfrac{n(n+2)}{4} \leq d \leq \dfrac{3}{4}n^2 - 2$.

證明. 從 $(*)$ 得知, 要得到 d 的最小上界, 須使頂點上三數和盡可能大, 減數和盡可能小, 即從 1 開始的連續自然數. 又頂點上的數對於它的兩邊都是其中一個元素, 所以減數中最多可有三個數各重複一次, 即有三個數減了兩次, 但同時它也必須為「頂點上的數」. 據此可寫出:

$$\begin{aligned}
3d &\leq \Big[1+2+\cdots+(3n-3)\Big] \\
&\quad -2\Big[1+2+\cdots+(\frac{3}{2}n-3)+(x_1+x_2+x_3)\Big]+(v_1+v_2+v_3) \\
&= (\frac{9}{4}n^2-3)-2(x_1+x_2+x_3)+(v_1+v_2+v_3).
\end{aligned}$$

其中, 因為減數中最多可有三個數各重複一次, 所以有三個數不確定, 設為 x_1, x_2, x_3, 設兩集合 $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ 有 i 個元素相同 $(i = 0, 1, 2, 3)$. 不失一般性, 令 $x_1 = v_1, \cdots, x_i = v_i$,

$$\begin{aligned}
3d &\leq (\frac{9}{4}n^2-3)-2\Big(\sum_{k=1}^{i} v_k+\sum_{k=i+1}^{3} x_k\Big)+(v_1+v_2+v_3) \\
&= (\frac{9}{4}n^2-3)-2\sum_{k=i+1}^{3} x_k-\sum_{k=1}^{i} v_k+\sum_{k=i+1}^{3} v_k \\
&\leq (\frac{9}{4}n^2-3)-2\sum_{k=i+1}^{3}(\frac{3}{2}n-k+1)-\sum_{k=1}^{i} k+\sum_{k=i+1}^{3}(3n-6+k) \\
&= \frac{9}{4}n^2-\frac{9}{2}-2(i-\frac{3}{2})^2.
\end{aligned}$$

因為 $(i-3/2)^2 \geq 1/4$, 所以 $3d \leq 9n^2/4-9/2-2/4$, 也就是 $d \leq 3n^2/4-5/3$, 其中 $3n^2/4$ 為整數, 所以 $d \leq 3n^2/4-2$.

我們用反證法證明下界, 假設存在一個 ST_n, 其魔術差 $d \leq n(n+2)/4-1$. 對於任一邊, 假設其中的 n 個數 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$, 則 $a_i - a_{i-1+n/2} \geq (n-2)/2$ 對 $2 \leq i \leq n/2$ 均成立. 所以

$$
\begin{aligned}
d &= (a_1 - a_n) + (a_2 - a_{2-1+n/2}) + (a_3 - a_{3-1+n/2}) + \cdots + (a_n/2 - a_{n/2-1+n/2}) \\
&\geq a_1 - a_n + \frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}),
\end{aligned}
$$

設 ST_n 中包含 $3n-3$ 的邊是 E_r, 此邊的最大數 $a_1' = 3n-3$, 所以最小數 $a_n' \geq 3n/2-1$; 設 ST_n 中包含 1 的邊是 E_s, 此邊的最小數 $a_n'' = 1$, 所以最大數 $a_1'' \leq 3n/2-1$. 所以此兩邊相交的頂點上的數事實上等於 $a_n' = a_1'' = 3n/2-1$. 因此, 剩下的第三邊包含了分別與 E_r, E_s 相交的頂點上的數, 以及所有不在 E_r 和 E_s 出現的數, 這些數有 $n/2$ 個大於 $3n/2-1$, $n/2$ 個小於 $3n/2-1$. 從這個邊去算魔術差可以得到,

$$
\begin{aligned}
d \geq &\Big[(2n-1) + (2n-2) + (2n-3) + \cdots + \frac{3}{2}n\Big] \\
&- \Big[(\frac{3}{2}n-2) + (\frac{3}{2}n-3) + \cdots + n + (n-1)\Big] = \frac{n(n+2)}{4},
\end{aligned}
$$

和 $d \leq n(n+2)/4-1$ 的假設矛盾. 所以, 事實上 $d \geq n(n+2)/4$. □

由定理 3.1 得知上述的上下界為最佳上下界.

定理 3.7. 當 $n \geq 3$ 且為奇數時, $\frac{(n-1)(n+11)}{4} \leq d \leq \frac{3}{4}(n+1)^2 - 4$.

證明. 用與定理 3.6 證明中一樣的符號 $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$ 可以得到:

$$
\begin{aligned}
3d &\leq \Big[1 + 2 + \cdots + (3n-3)\Big] \\
&\quad - 2\Big\{1 + 2 + \cdots + \Big[\frac{3}{2}(n-1) - 3\Big] + (x_1 + x_2 + x_3)\Big\} + (v_1 + v_2 + v_3) \\
&= (\frac{9}{4}n^2 + \frac{9}{2}n - \frac{51}{4}) - 2\sum_{k=i+1}^{3} x_k - \sum_{k=1}^{i} v_k + \sum_{k=i+1}^{3} v_k \\
&\leq (\frac{9}{4}n^2 + \frac{9}{2}n - \frac{51}{4}) - 2\sum_{k=i+1}^{3}\Big[\frac{3}{2}(n-1) - k + 1\Big] - \sum_{k=1}^{i} k + \sum_{k=i+1}^{3}(3n-6+k) \\
&= \frac{9}{4}n^2 + \frac{9}{2}n - \frac{69}{8} - 2(i - \frac{3}{4})^2.
\end{aligned}
$$

因為 $(i-3/4)^2 \geq 1/16$, 所以 $3d \leq 9n^2/4 + 9n/2 - 69/8 - 1/8$, 也就是

$$
d \leq \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{35}{12} = \frac{3(n+1)^2}{4} - 4 + \frac{1}{4},
$$

其中 $3n^2/4+3n/2$ 為整數加 $1/4$, 所以 $d \leq 3(n+1)^2/4-4$.

為了得到最大下界, 考慮包含 $3n-3$ 的邊, 假設這一邊的 n 個數 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$, $a_1 = 3n-3$. 對 $2 \leq i \leq (n+1)/2$, $a_i - a_{i+(n-1)/2} \geq (n-1)/2$ 均成立, 因此

$$\begin{aligned} d &= (3n-3) + (a_2 - a_{2+(n-1)/2}) + (a_3 - a_{3+(n-1)/2}) + \cdots \\ &\quad + (a_{(n+1)/2} - a_{(n+1)/2+(n-1)/2}) \\ &\geq (3n-3) + \frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{(n-1)(n+11)}{4}. \end{aligned}$$

□

由定理 3.3 得知上述的上下界為最佳上下界.

4 完美魔術三角形

定理 4.1. PT_n 存在若且唯若 $n \geq 5$.

證明. 設 PT_n 的魔術和為 D, 魔術差為 d, 從每邊的 n 個數中, 可得到兩個部分和. 令 L_i 表 E_i 較大的數的集合, S_i 表 E_i 較小的數的集合; l_i 表 E_i 較大數的和, s_i 表 E_i 較小數的和 $(i = 1,2,3)$, 若 n 為奇數, 則 l_i 是 $(n+1)/2$ 個數的和, s_i 是 $(n-1)/2$ 個數的和; 若 n 為偶數, 則 l_i 是 $n/2$ 個數的和, s_i 是 $n/2$ 個數的和. 由定義可知, $D = l_1 + s_1 = l_2 + s_2 = l_3 + s_3$, $d = l_1 - s_1 = l_2 - s_2 = l_3 - s_3$, 也就是說, $l_1 = l_2 = l_3$, $s_1 = s_2 = s_3$.

當 $n = 3$, s 為一個數, 且 $s_1 = s_2 = s_3$, 但一個數不能同時出現於三邊, 因此顯然不存在 PT_3.

當 $n = 4$, 因為 s 為兩個數的和, 若集合 S_i, S_j $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ 有一個共同的數, 則 S_i, S_j 有兩個共同的數, 矛盾, 所以 S_i, S_j 沒有共同的數; 同理, 集合 L_i, L_j 也沒有共同的數. 因此只有 $l_1 = 9+3$, $l_2 = 8+4$, $l_3 = 7+5$ 和 $l_1 = 9+4$, $l_2 = 8+5$, $l_3 = 7+6$ 兩種可能, 得知集合 S 中的數都小於 6; 又因為 S_i, S_j 沒有共同的數, 所以一定有一個 S_i 包含 6, 矛盾. 因此不存在 PT_4.

由以上可得「若 PT_n 存在, 則 $n \geq 5$」. 另外, 當 $n \geq 5$ 時, 如果能找到一個 PT_n 的建構方法, 就證明了「若 $n \geq 5$, 則 PT_n 存在」. PT_n 的建構方法如下.

當 $n \equiv 1 \pmod 4$, l 是奇數個數的和, s 是偶數個數的和:

$$\begin{aligned} &v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3; \\ &a_i = 3i\,(i = 1,3,\cdots), \quad a_i = 3i-2(i = 2,4,\cdots); \\ &b_i = 3i-1\,(i = 1,2,\cdots); \\ &c_i = 3i-2\,(i = 1,3,\cdots), \quad c_i = 3i(i = 2,4,\cdots). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-5 & \langle 3 & 4 & 9 & \cdots \rangle & 3n-4 \\ 3n-5 & \langle 2 & 5 & 8 & \cdots \rangle & 3n-3 \\ 3n-4 & \langle 1 & 6 & 7 & \cdots \rangle & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術和 D_i 與魔術差 d_i如下:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 3\Big(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big) - 2(\frac{n-3}{2}) + (3n-4) + (3n-5) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
D_2 &= 3\Big(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big) - (n-2) + (3n-3) + (3n-5) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
D_3 &= 3\Big(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big) - 2(\frac{n-1}{2}) + (3n-3) + (3n-4) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
d_1 &= (3n-4) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}, \\
d_2 &= \Big((3n-3) + (3n-5)\Big) - \frac{3n-5}{2} + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-3}{2}) = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}, \\
d_3 &= (3n-4) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-1}{2}) = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4},
\end{aligned}$$

所以這是一個魔術和為 $3n/2^2 + n/2 - 3$, 魔術差為 $3n^2/4 + 3n/2 - 13/4$ 的 PT_n.

當 $n \equiv 2 \pmod 4$, l 是奇數個數的和, s 是奇數個數的和:

$$\begin{aligned}
&v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3; \\
&a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_i = 3i-2\,(i = 3,5,\cdots), \quad a_i = 3i\,(i = 4,6,\cdots); \\
&b_1 = 3, \quad b_2 = 4, \quad b_i = 3i-1\,(i = 3,4,\cdots); \\
&c_1 = 1, \quad c_2 = 5, \quad c_i = 3i\,(i = 3,5,\cdots), \quad c_i = 3i-2\,(i = 4,6,\cdots).
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3n-5 & 2 & 6 & \langle 7 & 12 & 13 & \cdots \rangle & 3n-4 \\ 3n-5 & 3 & 4 & \langle 8 & 11 & 14 & \cdots \rangle & 3n-3 \\ 3n-4 & 1 & 5 & \langle 9 & 10 & 15 & \cdots \rangle & 3n-3 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術和與魔術差如下:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 3\Big(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\Big) - 2(\frac{n-4}{2}) + (3n-4) + (3n-5) + 6 + 2 \\
&= \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
D_2 &= 3\Big(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\Big) - (n-4) + (3n-3) + (3n-5) + 4 + 3 \\
&= \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
D_3 &= 3\Big(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\Big) - 2(\frac{n-4}{2}) + (3n-3) + (3n-4) + 5 + 1 \\
&= \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 = &\Big((3n-4) + (3n-5) + (\frac{3}{2}n+4) + (\frac{3}{2}n+3)\Big) \\
&- \Big((\frac{3}{2}n-2) + (\frac{3}{2}n-3) + 6 + 2\Big) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) + 2 = \frac{3}{4}n^2 - 3, \\
d_2 = &\Big((3n-3) + (3n-5) + (\frac{3}{2}n+5) + (\frac{3}{2}n+2)\Big) \\
&- \Big((\frac{3}{2}n-1) + (\frac{3}{2}n-4) + 4 + 3\Big) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) = \frac{3}{4}n^2 - 3, \\
d_3 = &\Big((3n-3) + (3n-4) + (\frac{3}{2}n+6) + (\frac{3}{2}n+1)\Big) \\
&- \Big(\frac{3}{2}n + (\frac{3}{2}n-5) + 5 + 1\Big) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) - 2 = \frac{3}{4}n^2 - 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
3n-5 & 2 & 6 & \langle 7 & 12 & 13 & \cdots\rangle & 3n-10 & 3n-6 & 3n-4 \\
3n-5 & 3 & 4 & \langle 8 & 11 & 14 & \cdots\rangle & 3n-9 & 3n-8 & 3n-3 \\
3n-4 & 1 & 5 & \langle 9 & 10 & 15 & \cdots\rangle & 3n-11 & 3n-7 & 3n-3
\end{bmatrix}$$

所以這是一個魔術和為 $3n^2/2 + n/2 - 3$, 魔術差為 $3n^2/4 - 3$ 的 PT_n.

當 $n \equiv 3 \pmod 4$, l 是偶數個數的和, s 是奇數個數的和:

$$\begin{aligned}
&v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3; \\
&a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_i = 3i-2\,(i = 3, 5, \cdots), \\
&a_i = 3i\,(i = 4, 6, \cdots), \quad a_{n-3} = 3n-10, \quad a_{n-2} = 3n-6; \\
&b_1 = 3, \quad b_2 = 4, \quad b_i = 3i-1\,(i = 3, 4, \cdots), \\
&b_{n-3} = 3n-9, \quad b_{n-2} = 3n-8; \\
&c_1 = 1, \quad c_2 = 5, \quad c_i = 3i\,(i = 3, 5, \cdots), \\
&c_i = 3i-2\,(i = 4, 6, \cdots), \quad c_{n-3} = 3n-11, \quad c_{n-2} = 3n-7.
\end{aligned}$$

可以計算各邊的魔術和與魔術差如下:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 3\Big(\frac{(n-1)(n-6)}{2}\Big) - 2(\frac{n-5}{2}) \\
&\quad + (3n-4) + (3n-5) + (3n-6) + (3n-10) + 6 + 2 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
D_2 &= 3\Big(\frac{(n-1)(n-6)}{2}\Big) - (n-6) \\
&\quad + (3n-3) + (3n-5) + (3n-8) + (3n-9) + 4 + 3 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \\
D_3 &= 3\Big(\frac{(n-1)(n-6)}{2}\Big) - 2(\frac{n-7}{2}) \\
&\quad + (3n-3) + (3n-4) + (3n-7) + (3n-11) + 5 + 1 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \Big((3n-4) + (3n-10) + \frac{3n+5}{2} + \frac{3n+3}{2}\Big) \\
&\quad - (\frac{3n-19}{2} + 6 + 2) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-7}{2}) \\
&= \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}, \\
d_2 &= \Big((3n-3) + (3n-5) + (3n-8) + (3n-9) + \frac{3n+7}{2} + \frac{3n+1}{2}\Big) \\
&\quad - (\frac{3n-5}{2} + \frac{3n-11}{2} + \frac{3n-17}{2} + 4 + 3) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-11}{2}) \\
&= \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}, \\
d_3 &= \Big((3n-4) + (3n-7) + (3n-11) + \frac{3n+9}{2} + \frac{3n-1}{2}\Big) \\
&\quad - (\frac{3n-13}{2} + \frac{3n-15}{2} + 5 + 1) + \frac{3n-3}{2}(\frac{n-9}{2}) \\
&= \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4},
\end{aligned}$$

所以這是一個魔術和為 $3n^2/2 + n/2 - 3$, 魔術差為 $3n^2/4 + 3n/2 - 13/4$ 的 PT_n.

當 $n \equiv 0 \pmod 4$, l 是偶數個數的和, s 是偶數個數的和:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3;\\
&a_i = 3i\,(i = 1,3,\cdots), \quad a_i = 3i-2\,(i = 2,4,\cdots),\\
&a_{n-3} = 3n-10, \quad a_{n-2} = 3n-6;\\
&b_i = 3i-1\,(i = 1,2,\cdots), \quad b_{n-3} = 3n-9, \quad b_{n-2} = 3n-8;\\
&c_i = 3i-2\,(i = 1,3,\cdots), \quad c_i = 3i\,(i = 2,4,\cdots),\\
&c_{n-3} = 3n-11, \quad c_{n-2} = 3n-7.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
3n-5 & \langle 3 & 4 & 9 & \cdots \rangle & 3n-10 & 3n-6 & 3n-4\\
3n-5 & \langle 2 & 5 & 8 & \cdots \rangle & 3n-9 & 3n-8 & 3n-3\\
3n-4 & \langle 1 & 6 & 7 & \cdots \rangle & 3n-11 & 3n-7 & 3n-3
\end{bmatrix}
$$

可以計算各邊的魔術和與魔術差如下:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 3\Big(\frac{(n-3)(n-4)}{2}\Big)\\
&\quad -2(\frac{n-4}{2}) + (3n-4) + (3n-5) + (3n-6) + (3n-10)\\
&= \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3,\\
D_2 &= 3\Big(\frac{(n-3)(n-4)}{2})\\
&\quad -(n-4) + (3n-3) + (3n-5) + (3n-8) + (3n-9)\\
&= \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3,\\
D_3 &= 3\Big(\frac{(n-3)(n-4)}{2}\Big)\\
&\quad -2(\frac{n-4}{2}) + (3n-3) + (3n-4) + (3n-7) + (3n-11)\\
&= \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \Big((3n-4)+(3n-5)+(3n-6)+(3n-10)\Big) \\
&\quad - \Big((\frac{3}{2}n-2)+(\frac{3}{2}n-3)+(\frac{3}{2}n-8)+(\frac{3}{2}n-9)\Big) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
d_2 &= \Big((3n-3)+(3n-5)+(3n-8)+(3n-9)\Big) \\
&\quad - \Big((\frac{3}{2}n-1)+(\frac{3}{2}n-4)+(\frac{3}{2}n-7)+(\frac{3}{2}n-10)\Big) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
d_3 &= \Big((3n-3)+(3n-4)+(3n-7)+(3n-11)\Big) \\
&\quad - \Big(\frac{3}{2}n+(\frac{3}{2}n-5)+(\frac{3}{2}n-6)+(\frac{3}{2}n-11)\Big) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3,
\end{aligned}
$$

所以這是一個魔術和為 $3n^2/2+n/2-3$, 魔術差為 $3n^2/4-3$ 的 PT_n.

□

定理 4.2. $\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+3 \leq D \leq \frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$ 為最佳上下界.

證明. 由魔術和 D 的定義, 易知三角形所有數之和加上頂點上三數和會等於 $3D$. 也就是說, $3D=[1+2+\cdots+(3n-3)]+$ 頂點上的數, 因此

$$
D=\frac{(n-1)(3n-2)}{2}+\frac{1}{3}\times \text{頂點上的數},
$$

從而

$$
\begin{aligned}
D &\leq \frac{3n^2-5n+2}{2}+\frac{1}{3}\Big[(3n-3)+(3n-4)+(3n-5)\Big]=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3, \\
D &\geq \frac{3n^2-5n+2}{2}+\frac{1}{3}(1+2+3)=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+3.
\end{aligned}
$$

由定理 4.1 得知 $3n^2/2+n/2-3$ 為最小上界; 魔術和為 $3n^2/2-5n/2+3$ 的 PT_n 的建構方法如下:

當 $n \equiv 0 \pmod 4$, l 是偶數個數的和, s 是偶數個數的和:

$$\begin{aligned}
&v_1 = 1, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 3;\\
&a_1 = 5, \quad a_2 = 9, \quad a_i = 3i+3\,(i = 3,5,\cdots), \quad a_i = 3i+1\,(i = 4,6,\cdots);\\
&b_1 = 6, \quad b_2 = 7, \quad b_i = 3i+2\,(i = 3,4,\cdots);\\
&c_1 = 4, \quad c_2 = 8, \quad c_i = 3i+1\,(i = 3,5,\cdots), \quad c_i = 3i+3\,(i = 4,6,\cdots).
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 5 & 9 & \langle 12 & 13 & 18 & \cdots \rangle & 2\\
1 & 6 & 7 & \langle 11 & 14 & 17 & \cdots \rangle & 3\\
2 & 4 & 8 & \langle 10 & 15 & 16 & \cdots \rangle & 3
\end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術和與魔術差如下:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 3\Big(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\Big) + 2(n-4) + 9 + 5 + 2 + 1 = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3,\\
D_2 &= 3\Big(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\Big) + 2(n-4) + 7 + 6 + 3 + 1 = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3,\\
D_3 &= 3\Big(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\Big) + 2(n-4) + 8 + 4 + 3 + 2 = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3,
\end{aligned}$$

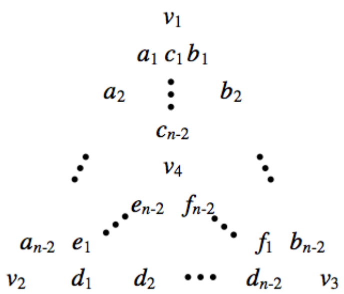
$$\begin{aligned}
d_1 &= \Big((\frac{3}{2}n+7) + (\frac{3}{2}n+6) + (\frac{3}{2}n+1) + \frac{3}{2}n\Big)\\
&\quad - (9+5+2+1) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) = \frac{3}{4}n^2 - 3,\\
d_2 &= \Big((\frac{3}{2}n+8) + (\frac{3}{2}n+5) + (\frac{3}{2}n+2) + (\frac{3}{2}n-1)\Big)\\
&\quad - (7+6+3+1) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) = \frac{3}{4}n^2 - 3,\\
d_3 &= \Big((\frac{3}{2}n+9) + (\frac{3}{2}n+4) + (\frac{3}{2}n+3) + (\frac{3}{2}n-2)\Big)\\
&\quad - (8+4+3+2) + \frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) = \frac{3}{4}n^2 - 3,
\end{aligned}$$

所以這是一個魔術和為 $3n^2/2 - 5n/2 + 3$, 魔術差為 $3n^2/4 - 3$ 的 PT_n. □

5 可減魔術四面體

為了方便呈現, 利用 $6 \times n$ 矩陣表示 STe_n. 矩陣的每一列代表 STe_n 的每一稜邊, 以 $E_1, E_2, \cdots, E_6$ 分別表示矩陣的第一, 二, $\cdots$, 六列. 兩端頂點上的數則置於一列的兩側. 令頂點上的數 $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$, E_1 的頂點為 v_1

和 v_2, E_2 的頂點為 v_1 和 v_3, E_3 的頂點為 v_1 和 v_4, E_4 的頂點為 v_2 和 v_3, E_5 的頂點為 v_2 和 v_4, E_6 的頂點為 v_3 和 v_4. 除了頂點上的數之外, 將每一列的數由左而右, 從小到大排列, 如圖 15. 設 δ_i 為 E_i 的 δ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$, 當 $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_6$ 時, 即證明為一個 STe_n.



$$\begin{bmatrix} v_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & v_2 \\ v_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & v_3 \\ v_1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & v_4 \\ v_2 & d_1 & d_2 & \cdots & d_{n-2} & v_3 \\ v_2 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-2} & v_4 \\ v_3 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-2} & v_4 \end{bmatrix}_{6\times n}$$

圖 15. ST_n 的圖形及矩陣表示.

定理 5.1. 當 $n \geq 4$ 且為偶數時, 存在魔術差是 $\dfrac{3}{2}n^2 - 4$ 或 $\dfrac{3}{4}n^2 - 3$ 的 STe_n.

證明. 首先, 考慮下面的 STe_n:

$$\begin{aligned} & v_1 = 1, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 6n-9, \quad v_4 = 6n-8; \\ & a_i = 6i+3\,(i = 1,2,\cdots,n-3), \quad a_{n-2} = 6n-10; \\ & b_i = 6i-2\,(i = 1,2,\cdots,n-2); \\ & c_i = 6i\,(i = 1,2,\cdots,n-3), \quad c_{n-2} = 6n-13; \\ & d_i = 6i-1\,(i = 1,2,\cdots,n-3), \quad d_{n-2} = 6n-12; \\ & e_i = 6i+1\,(i = 1,2,\cdots,n-2); \\ & f_1 = 3, \quad f_i = 6i-4\,(i = 2,3,\cdots,n-2). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \langle 9 & 15 & \cdots \rangle & 6n-10 & 2 \\ 1 & \langle 4 & 10 & 16 & \cdots \rangle & 6n-9 \\ 1 & \langle 6 & 12 & \cdots \rangle & 6n-13 & 6n-8 \\ 2 & \langle 5 & 11 & \cdots \rangle & 6n-12 & 6n-9 \\ 2 & \langle 7 & 13 & 19 & \cdots \rangle & 6n-8 \\ 6n-9 & 3 & \langle 8 & 14 & \cdots \rangle & 6n-8 \end{bmatrix}$$

可以計算各邊的魔術差如下:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \Big((6n-10)+(3n+3)+(3n-3)\Big) - \Big((3n-9)+2+1\Big) \\
&\quad + 3n(\frac{n}{2}-3) = \frac{3}{2}n^2-4, \\
\delta_2 &= \Big((6n-9)+(3n-2)\Big) - \Big((3n-8)+1\Big) \\
&\quad + 3n(\frac{n}{2}-2) = \frac{3}{2}n^2-4, \\
\delta_3 &= \Big((6n-8)+(6n-13)+3n\Big) - \Big((3n-6)+(3n-12)+1\Big) \\
&\quad + 3n(\frac{n}{2}-3) = \frac{3}{2}n^2-4, \\
\delta_4 &= \Big((6n-9)+(6n-12)+(3n-1)\Big) - \Big((3n-7)+(3n-13)+2\Big) \\
&\quad + 3n(\frac{n}{2}-3) = \frac{3}{2}n^2-4, \\
\delta_5 &= \Big((6n-8)+(3n+1)\Big) - \Big((3n-5)+2\Big) \\
&\quad + 3n(\frac{n}{2}-2) = \frac{3}{2}n^2-4, \\
\delta_6 &= \Big((6n-8)+(6n-9)+(3n+2)\Big) - \Big((3n-4)+(3n-10)+3\Big) \\
&\quad + 3n(\frac{n}{2}-3) = \frac{3}{2}n^2-4,
\end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3n^2/2-4$ 的 STe_n. 其次考慮下面的 STe_n:

$v_1 = 3n-5, \quad v_2 = 3n-4, \quad v_3 = 3n-3, \quad v_4 = 3n-2;$
$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_i = 3i-2\,(i = 3,4,\cdots,n-2);$
$b_1 = 3, \quad b_2 = 4, \quad b_i = 3i-1\,(i = 3,4,\cdots,n-2);$
$c_i = 3i+3n-2\,(i = 1,2,\cdots,n-4), \quad c_{n-3} = 6n-13, \quad c_{n-2} = 6n-9;$
$d_1 = 2, \quad d_2 = 6, \quad d_i = 3i\,(i = 3,4,\cdots,n-2);$
$e_i = 3i+3n-3\,(i = 1,2,\cdots,n-4), \quad e_{n-3} = 6n-11, \quad e_{n-2} = 6n-10;$
$f_i = 3i+3n-4\,(i = 1,2,\cdots,n-4), \quad f_{n-3} = 6n-12, \quad f_{n-2} = 6n-8.$

$$\begin{bmatrix}
3n-5 & 1 & 5 & \langle 9 & 12 & \cdots\rangle & 3n-4 \\
3n-5 & 3 & 4 & \langle 8 & 11 & \cdots\rangle & 3n-3 \\
3n-5 & \langle 3n+1 & 3n+4 & \cdots\rangle & 6n-13 & 6n-9 & 3n-2 \\
3n-4 & 2 & 6 & \langle 7 & 10 & \cdots\rangle & 3n-3 \\
3n-4 & \langle 3n & 3n+3 & \cdots\rangle & 6n-11 & 6n-10 & 3n-2 \\
3n-3 & \langle 3n-1 & 3n+2 & \cdots\rangle & 6n-12 & 6n-8 & 3n-2
\end{bmatrix}$$

(其中矩陣的第一, 二, 四列由 ST_n 的建構方法得來.)

可以計算各邊的魔術差 δ_i 如下:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \Big((3n-4)+(3n-5)+(\frac{3}{2}n+6)+(\frac{3}{2}n+3)\Big) \\
&\quad -\Big(\frac{3}{2}n+(\frac{3}{2}n-3)+5+1\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
\delta_2 &= \Big((3n-3)+(3n-5)+(\frac{3}{2}n+5)+(\frac{3}{2}n+2)\Big) \\
&\quad -\Big((\frac{3}{2}n-1)+(\frac{3}{2}n-4)+4+3\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
\delta_3 &= \Big((6n-9)+(6n-13)\Big)-\Big((\frac{9}{2}n-8)+(\frac{9}{2}n-11)\Big) \\
&\quad +\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-2) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
\delta_4 &= \Big((3n-3)+(3n-4)+(\frac{3}{2}n+4)+(\frac{3}{2}n+1)\Big) \\
&\quad -\Big((\frac{3}{2}n-2)+(\frac{3}{2}n-5)+6+2\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_5 &= \Big((6n-10)+(6n-11)+(\frac{9}{2}n-3)+(\frac{9}{2}n-6)\Big) \\
&\quad -\Big((\frac{9}{2}n-9)+(\frac{9}{2}n-12)+(3n-2)+(3n-4)\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3, \\
\delta_6 &= \Big((6n-8)+(6n-12)+(\frac{9}{2}n-4)+(\frac{9}{2}n-7)\Big) \\
&\quad -\Big((\frac{9}{2}n-10)+(\frac{9}{2}n-13)+(3n-2)+(3n-3)\Big)+\frac{3n}{2}(\frac{n}{2}-4) \\
&= \frac{3}{4}n^2-3,
\end{aligned}$$

所以這是一個魔術差為 $3n^2/4-3$ 的 STe_n. □

定理 5.2. 當 n 是奇數, 不存在 STe_n.

證明. 假設當 n 為奇數時, STe_n 存在, 其魔術差為 δ.

$$6\delta = (6n-7)(3n-4) - 2 \times \text{減數和} + 2 \times \text{頂點上四數和},$$

因為 n 為奇數, $(6n-7)(3n-4)$ 為奇數, 所以等號右方為奇數, 但等號左方為偶數, 矛盾. 所以當 n 為奇數, STe_n 不存在. □

定理 5.3. STe_n 存在若且唯若 $n \geq 4$ 且為偶數.

證明. 當 $n = 2$, 只有一種排法, 如圖 16, 而六稜邊的魔術差不相等. 由定理 5.1可知「若 STe_n 存在, 則 $n \geq 4$ 且為偶數」.

當 $n \geq 4$ 且為偶數, 如果能找到一個 STe_n 的建構方法, 就證明了「若 $n \geq 4$ 且為偶數, 則 STe_n 存在」, STe_n 的建構方法參見定理 5.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 12 & 4 \\ 31 & 4 \end{bmatrix}$$

圖 16.

由魔術差 δ 的定義, 易知:

$$6\delta = \frac{(6n-7)(6n-8)}{2} - 2 \times \text{減數和} + 2 \times \text{頂點上四數和}.$$

□

定理 5.4. 當 $n \geq 4$ 且為偶數時, $\delta \leq \dfrac{3}{2}n^2 - 4$.

證明. 得到 δ 的最小上界, 須使頂點上四數和盡可能大, 減數和盡可能小, 即從 1 開始的連續自然數. 又頂點上的數對於它的三稜邊都是其中一個元素, 所以減數中最多可有四個數各重複兩次, 即有四個數減了三次, 但同時它也必須為「頂點上的數」. 據此可寫出:

$$\begin{aligned} 6\delta \leq\ & \frac{(6n-7)(6n-8)}{2} - 2\Big[1 + 2 + \cdots + (3n-8) + (x_1 + x_2 + \cdots + x_8)\Big] \\ & + 2(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \\ =\ & (9n^2 - 28) - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_8) + 2(v_1 + v_2 + v_3 + v_4), \end{aligned}$$

其中, 因為減數中最多可有四個數各重複一次, 所以有八個數不確定, 設為 $x_1, x_2, \cdots, x_8$; 設兩集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 有 i 個元素也在集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_8\}$ 內 $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, j 個元素重複兩次 $(j = 0, 1, \cdots, i)$. 不失一般性, 令 $x_1 = v_1, \cdots, x_i = v_i, x_{i+1} = v_1, \cdots, x_{i+j} = v_j$.

$$\begin{aligned}
6\delta &\le (9n^2-28) - 2\Big(\sum_{k=1}^{i} v_k + \sum_{k=1}^{j} v_k + \sum_{k=i+j+1}^{8} x_k\Big) + 2(v_1+v_2+v_3+v_4) \\
&= (9n^2-28) - 2\sum_{k=i+j+1}^{8} x_k - 2\sum_{k=1}^{j} v_k + 2\sum_{k=i+1}^{4} v_k \\
&\le (9n^2-28) - 2\sum_{k=i+j+1}^{8} (3n-k+1) - 2\sum_{k=1}^{j} k + 2\sum_{k=i+1}^{4} (6n-12+k) \\
&= 9n^2 - 6(i-j)n - 2(i^2+ij+j^2-12i+24).
\end{aligned}$$

隨著 n 值越來越大, 一次項的影響會大於常數項, 因此為了得到 6δ 的最小上界, 必須使 $i-j$ 最小, 又因為 $i \ge j$, 所以 $i-j \ge 0$, 這時 $i = j$, 且

$$6\delta \le 9n^2 - 2(3i^2 - 12i + 24) = 9n^2 - 6(i-2)^2 - 24 \le 9n^2 - 24.$$

也就是 $\delta \le 3n^2/2 - 4$. □

定理 5.5. 當 $n \ge 4$ 且為偶數時, δ 的最大下界介於 $\Big[\dfrac{n(n+2)}{4}, \dfrac{3}{4}n^2 - 3\Big]$.

證明. 首先, 由定理 5.1 得知存在魔術差為 $3n^2/4 - 3$ 的 STe_n. 其次考慮 STe_n 的其中一個三角形面, 設其所含的 $3n-3$ 個數 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{3n-3}$, 則 $a_1 - a_{3n-3} \ge 3n-4$.

若三角形中 $a_1 - a_{3n-3} = 3n-4$, 則對 $1 \le i \le 3n-4$, $a_i = i + m$ $(0 \le m \le 3n-5$, m是整數) 均成立, 可將此三角形視為一個所有元素都增加一定數 m 的 ST_n, 因為其魔術差範圍相同, 所以三角形的魔術差

$$\delta \ge \frac{n(n+2)}{4}.$$

若三角形中 $a_1 - a_{3n-3} \ge 3n-3$, 其魔術差範圍與一個 $a_{3n-3} = 1$, $a_1 = k$ 的三角形相同, 其中 $k \ge 3n-2$. 假設 δ 為此三角形的魔術差, 且

$$\delta \le \frac{n(n+2)}{4} - 1.$$

對於任一邊, 假設其中的 n 個數 $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$, 則 $b_i - b_{i+(n-2)/2} \geq (n-2)/2$ 對 $2 \leq i \leq n/2$ 均成立. 所以

$$\begin{aligned}\delta &= (b_1 - b_n) + (b_2 - b_{2+(n-2)/2}) + (b_3 - b_{3+(n-2)/2}) + \cdots + (b_{n/2+(n-2)/2}) \\ &\geq b_1 - b_n + \frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}),\end{aligned}$$

再由上式 δ 的上界 $n(n+2)/4-1$, 可以得到 $b_1 - b_n \leq 3n/2 - 2$.

包含 k 的邊 E_r, 其最大數 $b_1' = k$, 所以最小數

$$b_n' \geq k - (\frac{3}{2}n - 2) \geq (3n-2) - (\frac{3}{2}n - 2) = \frac{3}{2}n;$$

而包含 1 的邊 E_s, 其最小數 $b_n'' = 1$, 所以最大數 $a_1'' \leq \frac{3}{2}n - 1$. 因此這兩邊相交的頂點上的數不存在, 與假設矛盾, 所以, 事實上 $\delta \geq n(n+2)/4$. 因為連 STe_n 其中一個三角形的 $\delta \geq n(n+2)/4$, 所以 STe_n 的 $\delta \geq n(n+2)/4$.

由以上得知, 最大下界介於 $[n(n+2)/4, 3n^2/4-3]$. □

6 可減魔術 m 邊形

由魔術差 d 的定義, 易知:

$$md = \frac{(mn-m+1)(mn-m)}{2} - 2 \times \text{減數和} + \text{頂點上 } m \text{ 數和}.$$

定理 6.1. 當 n 是偶數, $\begin{cases} \text{且 } m \text{ 是偶數時, } d \leq \frac{m}{4}n^2 - \frac{m}{2} \\ \text{且 } m \text{ 是奇數時, } d \leq \frac{m}{4}n^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2}. \end{cases}$

證明. 要得到 d 的最小上界, 須使頂點上 m 數和盡可能大, 減數和盡可能小, 即從 1 開始的連續自然數. 又頂點上的數對於它的兩邊都是其中一個元素, 所以減數中最多可有 m 個數各重複一次, 即有 m 個數被減了兩次, 但同時它也必須為「頂點上的數」. 據此可寫出:

$$\begin{aligned}md \leq{} & \frac{(mn-m+1)(mn-m)}{2} \\ & -2\Big[1+2+\cdots+(mn-2m)+(x_1+x_2+\cdots+x_m)\Big] \\ & \quad +(v_1+v_2+\cdots+v_m) \\ ={} & \frac{m}{4}(mn^2-2m+2) - 2(x_1+x_2+\cdots+x_m) + (v_1+v_2+\cdots+v_m).\end{aligned}$$

其中, 因為減數中最多可有 m 個數各重複一次, 所以有 m 個數無法確定, 設為 $x_1, x_2, \cdots, x_m$; 而 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 代表頂點上的 m 個數, 設集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 有 i 個元素也在集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 內 $(i = 0, 1, \cdots, m)$. 不失一般性, 令 $x_1 = v_1, \cdots, x_i = v_i$.

$$\begin{aligned}
md &\le \frac{m}{4}(mn^2 - 2m + 2) - 2\Big(\sum_{k=1}^{i} v_k + \sum_{k=i+1}^{m} x_k\Big) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_m) \\
&= \frac{m}{4}(mn^2 - 2m + 2) - 2\sum_{k=i+1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{i} v_k + \sum_{k=i+1}^{m} v_k \\
&\le \frac{m}{4}(mn^2 - 2m + 2) - 2\sum_{k=i+1}^{m} (\frac{n}{2}\cdot m - k + 1) - \sum_{k=1}^{i} k + \sum_{k=i+1}^{m} (mn - 2m + k) \\
&= \frac{m^2}{4}n^2 - \frac{m^2}{2} - 2(i - \frac{m}{2})^2.
\end{aligned}$$

由以上得知:

當 m 是偶數, 可得到 d 的上界: $d \le mn^2/4 - m/2$;

當 m 是奇數, 可得到 d 的上界: $d \le mn^2/4 - m/2 - 1/2$. □

定理 6.2. 當 n 是奇數, $\begin{cases} \text{且 } m \equiv 0 \pmod 8 \text{ 時}, d \le \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m; \\ \text{且 } m \equiv \pm 1 \pmod 8 \text{ 時}, d \le \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \pm \frac{3}{8}; \\ \text{且 } m \equiv \pm 2 \pmod 8 \text{ 時}, d \le \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \mp \frac{1}{4}; \\ \text{且 } m \equiv \pm 3 \pmod 8 \text{ 時}, d \le \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \pm \frac{1}{8}; \\ \text{且 } m \equiv 4 \pmod 8 \text{ 時}, d \le \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m + \frac{1}{2}. \end{cases}$

證明.

$$\begin{aligned}
md &\le \frac{m}{4}(mn^2 + 2mn - 7m + 4) - 2\Big(\sum_{k=1}^{i} v_k + \sum_{k=i+1}^{m} x_k\Big) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_m) \\
&= \frac{m}{4}(mn^2 + 2mn - 7m + 4) - 2\sum_{k=i+1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{i} v_k + \sum_{k=i+1}^{m} v_k \\
&\le \frac{m}{4}(mn^2 + 2mn - 7m + 4) \\
&\quad - 2\sum_{k=i+1}^{m} (\frac{n-1}{2}\cdot m - k + 1) - \sum_{k=1}^{i} k + \sum_{k=i+1}^{m} (mn - 2m + k) \\
&= \frac{m^2}{4}n^2 + \frac{m^2}{2}n - \frac{9}{8}m^2 + \frac{m}{2} - 2(i - \frac{m}{4})^2.
\end{aligned}$$

由以上得知,

當 $m \equiv 0 \pmod 8$, 可得到 d 的上界如下: $d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m$;

當 $m \equiv \pm 1 \pmod 8$, $d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \pm \frac{3}{8}$;

當 $m \equiv \pm 2 \pmod 8$, $d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \mp \frac{1}{4}$;

當 $m \equiv \pm 3 \pmod 8$, $d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m \pm \frac{1}{8}$;

當 $m \equiv 4 \pmod 8$, $d \leq \frac{m}{4}n^2 + \frac{m}{2}n - \frac{9}{8}m + \frac{1}{2}$.

□

7 討論

目前的研究是對「奇、偶數」、「各種不同的圖」分開討論, 未來也許可以用高斯符號整合奇、偶數, 或是利用圖論的概念對各種圖形有更基本的認識.

參考文獻

[1] Sunday A. Ajose. (1983). *Subtractive magic triangles*. Mathematics Teacher, 76 (5), 346 - 347.

[2] Harvey Heinz. (2006, Nov.29). *Perimeter magic triangles*. In Subtractive magic triangles. Retrieved from http://www.magic-squares.net/perimeter.htm

[3] 王湘君 (民 74 年 6月). 〈可減的魔術三角形〉.《數學傳播》, 第 9 卷第 2 期, 86 - 87, 取自: http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d92/9214.pdf