歐翰青作品評述

林長壽教授

國立臺灣大學數學系

論文「多邊形的尋短」是討論對一給定的 n 邊多邊形, 考慮所有的內接 n 邊多邊形, 它的頂點落在原多邊形的邊上 (這裡邊是不含原多邊形的頂點), 同時不同的頂點要落在不同的邊上. 多邊形的尋短問題是問這類內接多邊形中是否存在周長最短的內接多邊形. 這種問題是屬於古典歐氏幾何的極值問題. 由於平面歐氏幾何在國中, 高中一直都是學生比較熟悉的題材, 因此很適合高中生作為研究的主題. 學過微積分的人都知道這類問題似乎也適合微積分的應用, 但是在仔細的思考後, 似乎又沒有那樣的容易, 因為這個極值問題的定義域並非是緊緻集, 僅是緊緻集的一個開子集合, 所以解並不能保證存在解不存在的情況是, 這個最小周長的內接多邊的有些頂點會和原 n 多邊形的某些頂點 (例如 P) 重合, 事實上, 這個內接多邊形在 P 的兩條邊上的兩個頂點會同時和 P 重合, 這是三角不等式的結果. 在這篇論文裡, 作者稱這是退化的情況.

這個問題最簡單的情形是 $n = 3$. 當銳角三角形時, 解是存在且是唯一. 原三角形三條垂線在三邊的垂足, 三個垂足作為頂點所劃出的三角形就是周長最小的內接三角形. 對一般三角形三邊的垂足均要落在三角形內 (不包括頂點) 的充要條件是這個三角形必須是銳角三角形. 因此在 $n = 3$, 解存在的充要條件是原三角形必是銳角三角形, 這個解的充要條件在坊間的數學書裡也含有解法, 例如 M.Berger 的 Geometry I 就有證明, 所用的方法也是本論文所採用的鏡射法. 作為開始熱身的練習, 本文作者將若原三角形不是銳角三角形時, 其退化解也很完整的解出來.

在這篇論文, 個人覺得作者最重要完整的工作是 $n = 4$ 的情況. 他證明四邊多邊形有解的充要條件是此四邊形的四個頂點一定共圓, 同時這個外接圓的圓心一定落在這個四邊形內部. 此時, 解必有無限多個. 另外, 他很詳細且完整地討論不存在解時, 那些退化解究竟是什麼. 這個結果具有數學的標準風格: 簡潔, 且完整. 他的方法仍是鏡射法, 但他發現一個簡單且漂亮的原理, 他觀察到原內接四邊形經過三次鏡射後, 如下圖的 $\overline{D''C''}$ 和 $\overline{DC}$ 會平行.

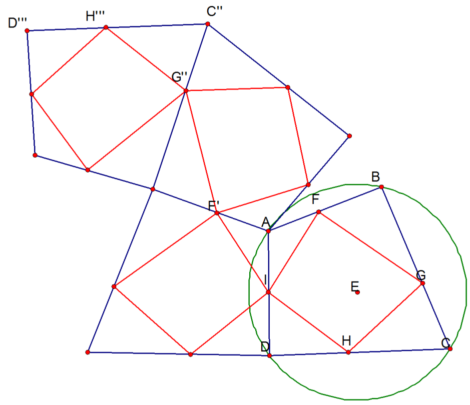

圖 1:

這個漂亮的引理能讓作者處理一般偶數邊多邊形的解存在的充要條件, 另外他在本文裡亦證明奇數邊多邊形的解存在的充要條件. 這是一篇探討相當完整的論文, 作者雖是一個高中生, 但仍企圖對一個相當複雜的問題做一個完整的探討. 鏡射法雖是相當樸質的方法, 但作者在此問題能一致性地應用此方法, 尤其是上面所述的漂亮引理, 顯示出作者的數學成熟度.

對退化解的探討, 作者亦有詳盡的探討, 但其中有些證明似乎還沒講的清楚 (不像解存在的證明清楚), 但這個缺點並不能抹滅他整篇文章的成就.

無可避免地, 這個問題在以前確實也有其它人做過, 作者也在第 1 節研究簡介裡, 有簡略地討論這和以前工作的差異. 它這一方面的論述, 我也曾詳細地查過, 還算公允. 他的證明比起前人的工作, 比較幾何 (較少繁複的計算), 方法比較簡潔 (elegant), 討論也非常完整, 特別是四邊形無論是有解或無解的情況. 單就這一點而言, 我就認為極為難得.