超立方體最小控制數下界的提升
Improved Lower Bounds On The Domination Number Of Hypercubes

台北市私立復興實驗高級中學 吳映賢
指導老師：陳俊佑

Abstract

The domination number is the size of a minimum dominating set of a graph. Determining the domination number is an important optimization problem in graph theory, as well as one of Karp ’s 21 NP-complete problems in computational complexity theory. The domination problem on hypercubes is equivalent to the covering code problem, and hence is closely related to code theory. It is still an open problem to determine the domination problem of n-dimensional hypercubes when n is greater than 9. In this article, we improved the lower bounds on the domination number of n-dimensional hypercubes when n is a multiple of 6.

中文摘要

最小控制數，亦即最小控制集的大小，是圖論中重要的最佳化問題，也是計算複雜度理論中卡普的 21 個 NP 完全問題之一。超立方體上的控制集問題等價於二元覆蓋編碼問題，與編碼理論關聯密切。決定十維以上超立方體的最小控制數仍是數學界的未解難題。本文使用初等的手法提升了維度為 6 的倍數的超立方體最小控制數的下界。

1 簡介

控制集問題是圖論的一個重要分支，是 1972 年卡普［9］提出的 21 個 NP 完全問題之一。超立方體 Q_n 則是以 n 位 01− 字串為頂點、恰差一位的字串間有連線的圖，考慮超立方體上的控制集問題便稱作覆蓋編碼問題，產生了與編碼學的連結。
當 $n = 2^x - 1 (x \in \mathbb{N})$ ，最小控制集中的各個字串即為編碼理論中的 perfect code ，因此最小控制數已知。在其他的維度當中，也有許多文獻致力於提升最小控制數的下界。例如 1988 年文獻［6］發現偶數維度下的性質，可直接求出 $n = 2^x$ 時的最小控制數，也能提升偶數維度中的下界。又例如 1997 年文獻［1］發現的性質可視為文獻［6］的一般化延伸，在許多的維度中皆能運用。還有文獻以電腦程式來處理這個問題。目前為止，九維以下的最小控制數已被得出，十維以上的則仍為難題。

下表（一）統整了過往文獻對超立方體最小控制數的下界與上界之研究成果。各項結果的出處以英文小寫標示，對應至下頁表（二）所列的作者與年代，未標示者則代表為明顯的結果。這些表格為 Gerzson Kéri 教授於 2011 年所整理［2］，其中 $n \leq 14$ 的部份也在他 2017 年的著作裡出現［3］。我們另外請教了 Patric Östergård 教授與 Jan - Christoph Schlage - Puchta 教授，確認了表（一）的紀錄至今應該仍是最新的。（私人通訊，May 26,2021，May 27,2021，May 30,2021）

n	下界	上界		n	下界	上界		n	下界	上界
1	1	1		12	342_i	380_e		23	352827_l	393216_o
2	2	2		13	598_h	704_j		24	699051_i	786432
3	2	2		14	1172_k	1408		25	1298238_h	1556480_p
4	4_a	4		15	2048_c	2048_c		26	2581111_i	3112960
5	7_a	7_a		16	4096_i	4096		27	4794174_q	5767168_p
6	12_b	12_b		17	7419_l	8192		28	9587084_m	11534336
7	16_c	16_c		18	14564_i	16384		29	17997161_l	23068672
8	32_b	32		19	26309_m	31744_n		30	35791395_i	46137344
9	62_d	62_e		20	52618_m	63488		31	67108864_c	67108864
10	107_f	120_e		21	96125_h	122880_o		32	134217728_i	134217728
11	180_g	192_h		22	190651_i	245760		33	253523901_h	268435456

表（一）

a	Taussky - Todd, 1948		j	Östergård - Weakly, 1999
b	Stanton - Kalbfleisch, 1968,1969		k	Habsieger, 1997
c	完美情況（見 2.2.2 第 1. 點）		l	Hass, 2007 - 2008
d	Östergård - Blass, 2001		m	Habsieger - Plagne, 2000
e	Wille, 1990, 1996		n	Li - Chen, 1994
f	Bertolo - Östergård - Weakly, 2004		o	Kéri,2006
g	Blass - Litsyn, 1998,1999		p	Östergård - Kaikkonen, 1998
h	Cohen - Lobstein - Sloane, 1986		q	Plagne, 2008
i	van Wee, 1988			

表（二）

過往的研究專注於討論控制集在「控制」圖中與之相鄰的點時，發生「重複控制」的次數，但得出的最小控制數下界仍有進步的空間。本文提出了新的概念—「解決」: 將所有被「重複控制」的點視為一個點集，並以這個點集，「解決」圖中與之相鄰且不屬於控制集的點，如此會得到一個新的數據 —「重複解決」的次數。藉由與任意點距離二以內的重複控制次數之同餘性質，我們討論「任意被重複控制的點周圍的重複解決次數」，進一步估算出全圖的重複解決次數。此方法成功提升了維度數 $n \equiv 0 (\bmod 6)$ 時，超立方體最小控制數的下界。

在文獻［10］中，我們是研究 8 維以下的超立方體最小控制集之本質解與一般化建構方式。而本文則是利用「重複解決」的概念，對超立方體的最小控制集提出了新的分析方法，並成功提升維度為 6 的倍數的超立方體最小控制數的下界。

2 最小控制數

2.1 超立方體與最小控制集

本文中 n 維超立方體指的是一個圖 Q_n，其頂點集 $V(Q_n) = \mathbb{Z}_2^n$ 是所有長為 n 的 01− 字串，兩點間有連線若且惟若它們恰有一位數不同。

以 $d(u, v)$ 表示兩點 u, v 在圖上的距離。我們定義一個點 v 的鄰集為

$$N[v] := \{v\} \cup N_1[v] \tag{2.1}$$

其中 $N_i[v] = \{u \in V(Q_n) | d(u, v) = i\}$ 蒐集所有與點 v 距離為 i 的點。兩點集 S_1, S_2 間的距離則定義為 $d(S_1, S_2) = \min d(u, v) | u \in S_1, v \in S_2$ 。點集 S 的鄰集記作

$$N[S] := S \cup \{u \in V(Q_n) | d(\{u\}, S) = 1\} \tag{2.2}$$

定義 2.1. *若 $N[S] = V(Q_n)$ ，則稱 S 為 Q_n 的***控制集***，S 中的點為***控制點***。對 $u \in S$ ，若 $v \in N[u]$ ，我們稱 v 被 u 控制。控制集中點數最少者稱為***最小控制集***，最小控制集的大小稱為最小控制數。本文中，我們以 D 來表示超立方體中某個固定大小的控制集，以 MDS 表示超立方體中某個最小控制集，並以 $\gamma(Q_n)$ 表示 Q_n 的最小控制數。*

本文中，我們紀錄 01− 字串中 1 的位置來將點集對應成 $\{1,\ldots,n\}$ 的子集，將此對射記作

$$g : V(Q_n) \to 2^{\{1,\ldots,n\}}, \qquad v \mapsto g(v) \tag{2.3}$$

例如字串 01101 便對應 $g(01101) = \{2,3,5\}$ 。方便起見我們將全 0 字串對應的空集合寫作 $g(00\ldots0) = \phi =: (0)$ 。對於點集 $S \subseteq V(Q_n)$ 則定義

$$g(S) := \cup_{v\in S} g(v). \tag{2.4}$$

另外，給定 $A \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\}$ 以及 $S \subseteq V(Q_n)$ ，定義

$$S[A] = \{u \in S | A \subseteq g(u)\}. \tag{2.5}$$

以下的性質可以由 Q_n 的定義立即得出：

$$|V(Q_n)| = 2^n \tag{2.6}$$

$$|N_x[v]| = C^n_x,\ \forall\, v \in V(Q_n) \tag{2.7}$$

$$d(u,v) = |g(u)\backslash g(v)| + |g(v)\backslash g(u)|,\ \forall\, u,v \in V(Q_n). \tag{2.8}$$

2.2 自定義符號與名詞

1. 重複控制

   定義 2.2. *對點 $v \in V(Q_n)$ ，若 $|N[v] \cap D| = x+1$ ，我們說 v 被**重複控制**了 x 次。*

   我們以 $V\delta^x$ 表示被重複控制 x 次的點所形成的點集，並以 $V\delta$ 表示 Q_n 中所有被重複控制的點所形成的點集，亦即

   $$V\delta^x := \{v \in V(Q_n) | x+1 = |N[v] \cap D|\},\ V\delta := \cup_{x\geq1} V\delta^x \tag{2.9}$$

   為了方便表示所有被重複控制兩次以上的點，我們定義

   $$C := \cup_{x\geq2} V\delta^x \tag{2.10}$$

   為了方便表示與點 $v \in V(Q_n)$ 距離 x 處被重複控制的點，我們定義

   $$V\delta_x(v) := N_x[v] \cap V\delta \tag{2.11}$$

   給定控制集 D ，D 重複控制的次數為

   $$\delta := (n+1)|D| - 2^n \tag{2.12}$$

   對任一點集 $T \subseteq V(Q_n)$ ，T 被重複控制的次數為

   $$\delta_T := \sum_{x\geq1} x|T \cap V\delta^x| \tag{2.13}$$

   如果 T 僅包含唯一一個點 v ，則可直接以 δ_v 表示 δ_T 。
   對點 $v \in V(Q_n)$ ，為了方便表示 $N_x[v]$ 被重複控制的次數，我們定義

   $$\delta_x(v) := \delta_{N_x[v]} \tag{2.14}$$

2. 解決與重複解決

   定義 2.3. *給定控制集 D ，對點 $v \in V(Q_n)\backslash D$ 與 $u \in V\delta$ ，若 $v \in N[u]$ ，我們說 **v 被 u 解決了 δ_u** 次。若 $\delta_{N[v]} = x+1$ ，我們說 v 被**重複解決了** x 次。*

   我們以 Vr^x 表示被重複解決 x 次的點所形成的點集，並以 Vr 表示 Q_n 中所有被重複解決的點所形成的點集，亦即

   $$Vr^x := \{v | \delta_{N[v]} = x+1, v \notin D(Q_n)\} (x \geq 0), Vr := \cup_{x\geq1} Vr^x \tag{2.15}$$

為了方便表示與點 $v \in V(Q_n)$ 距離 x 處被重複解決的點，我們定義

$$Vr_x(v) := N_x[v] \cap Vr \tag{2.16}$$

$V\delta$ 重複解決的次數為

$$r := \sum_{v \in N[V\delta] \setminus D} \left(\delta_{N[v] \cap V\delta} - 1\right) \tag{2.17}$$

對任一點集 $T \subseteq V(Q_n) \setminus D$ ，T 被重複解決的次數為

$$r_T := \sum_{x \geq 1} x|T \cap Vr^x| \tag{2.18}$$

如果 T 僅包含唯一一個點 v ，則可直接以 r_v 表示 r_T 。
對點 $v \in V(Q_n)$ ，為了方便表示 $N_x[v]$ 被重複解決的次數，我們定義

$$r_x(v) := r_{N_x[v]} \tag{2.19}$$

$D, V\delta, Vr$ 三者的關係以及其衍生符號較為複雜，我們以圖 (一) 整理之。

$$\boxed{D\text{ ：進行控制}} \xrightarrow[\text{重複控制次數：}\delta]{\text{重複控制}} \boxed{V\delta\text{ ：進行解決}} \xrightarrow[\text{重複解決次數：}r]{\text{重複解決}} \boxed{Vr}$$

$V\delta^x$ 、Vr^x ：被重複控制或重複解決 x 次的點。

C ：被重複控制兩次以上的點。

δ_T 、r_T ：T 被重複控制或重複解決的次數。

$V\delta_x(v)$ 、$Vr_x(v)$ ：$N_x[v]$ 當中，被重複控制或重複解決的點。

$\delta_x(v)$ 、$r_x(v)$ ：$N_x[v]$ 被重複控制或重複解決的次數。

圖 (一)

2.3 重要文獻概述

1. 當 $n = 2^x - 1 (x \in \mathbb{N})$ ，此時 $\gamma(Q_n) = 2^{2^x - 1 - x}$ ，且在 MDS 中 $\delta = 0$ 。我們稱其為「完美情況」。此時各控制點的座標即為編碼理論中的 perfect code 。例如，此時 MDS 的一種建構方式為 $MDS = \{v | g(v)$ 的各元素行二進位模加法後得$0\} \cup \{(0)\}$ 。

2. 對於完美情況以外的維度，各種做法不盡相同，在此粗略地分為兩類並介紹其代表結果：

   (a) 直接就控制點的排列型態討論是否能夠形成最小控制集。
   例如文獻 [5] 提出 $\gamma(Q_n) \geq \dfrac{2^n - 2A(n,3)}{n-1}$ ，其中 $A(n,3) = \max(|T|)$ ，而 $T \subset V(Q_n)$ 滿足 $\forall\, u, v \in T$ ，有 $d(u,v) \geq 3$ 。這個下界的意義是 MDS 中最多存在 $A(n,3)$ 個彼此距離大於 2 的控制點，稱這些點所構成的點集為 T ，則 $\forall\, u \in MDS \setminus T$ ，有 $d(u,T) \leq 2 \Rightarrow |N[u] \setminus N[T]| \leq n-1$
   故 $\gamma(Q_n) = A(n,3) + |MDS \setminus T| \geq A(n,3) + \dfrac{2^n - (n+1)A(n,3)}{n-1} = \dfrac{2^n - 2A(n,3)}{n-1}$ 。
   此結果目前仍是 $n = 13, 21, 25, 33$ 時的最佳下界。

   (b) 分析重複控制情形。
   例如文獻 [6] 發現當 n 為偶數，$\forall v \notin D$ ，有 $\delta_0(v) + \delta_1(v) \geq 1$ 。
   因此在最小控制集中，$\displaystyle\sum_{v \notin MDS} (\delta_0(v) + \delta_1(v)) \geq (2^n - \gamma(Q_n))$ 。
   $\forall u \in V\delta$ ，都有 $|N[u] \cap MDS| \geq 2$ ，所以在以上的加總中，δ_u 最多被計算 $(n-1)$ 次。
   故 $\delta \geq \dfrac{\sum_{v \notin MDS}(\delta_0(v) + \delta_1(v))}{n-1} = \dfrac{2^n - \gamma(Q_n)}{n-1}$ 。
   又 $\delta = (n+1)\gamma(Q_n) - 2^n$ ，因此 $\gamma(Q_n) \geq \dfrac{2^n}{n}$ 。此結果目前仍是 $n = 12, 18, 22, 24, 26, 30, 32$ 時的最佳下界，且可以直接推導出當 $n = 2^x (x \in \mathbb{N}),\ \gamma(Q_n) = 2\gamma(Q_{n-1})$ 。

3. 文獻 [1] 根據 n 的不同，對任意點 v 的 $\delta_0(v)$ 、$\delta_1(v)$ 、$\delta_2(v)$ 等給出了同餘限制：

   當 $n \equiv 0(\bmod 2)$ ，若 $v \notin D$ ，則 $\delta_0(v)+\delta_1(v) \equiv 1(\bmod 2)$ ；
   若 $v \in D$ ，則 $\delta_0(v)+\delta_1(v) \equiv 0(\bmod 2)$ 。
   當 $n \equiv 1(\bmod 2)$ ，則 $\delta_0(v)+\delta_1(v) \equiv 0(\bmod 2)$ 。
   當 $n \equiv 0(\bmod 3)$ ，則 $\delta_1(v)+\delta_2(v) \equiv 0(\bmod 3)$ 。
   當 $n \equiv 1(\bmod 3)$ ，則 $2\delta_0(v)+\delta_1(v)+\delta_2(v) \equiv 0(\bmod 3)$ 。
   當 $n \equiv 2(\bmod 3)$ ，則 $\delta_0(v)+\delta_1(v)+\delta_2(v) \equiv 2(\bmod 3)$ 。

   我們的研究將應用其中的性質，故在此將其列出。因為條件為同餘限制，故有助於快速提升 δ 的下界。然而該文獻的作法仍需深入討論控制點的排列方式，以排除 δ 極小的狀況。

4. 也有人以程式研究此問題。例如文獻 [7]、[8] 當中，$\gamma(Q_9)$ 的上下界、$\gamma(Q_{10})$ 的上界、$\gamma(Q_{11})$ 的上界是以模擬退火演算法（simulated annealing）得出。然而目前的科技難以處理維度較大的情況。

3 在 $n \equiv 0(\bmod 6)$ 時，提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界

3.1 方法概述

當 $n \equiv 0(\bmod 6)$ ，由文獻 [1] 我們知道有以下兩個性質：

性質 1. *$\forall\, v \in V(Q_n)$ ，若 $v \notin D$ ，則 $\delta_0(v)+\delta_1(v) \equiv 1(\bmod 2)$ 。*
若 $v \in D$ ，則 $\delta_0(v)+\delta_1(v) \equiv 0(\bmod 2)$ 。

性質 2. *$\forall\, v \in V(Q_n)$ ，有 $\delta_1(v)+\delta_2(v) \equiv 0(\bmod 3)$ 。*

對一個待檢驗是否可能為 $\gamma(Q_n)$ 的值「γ^* 」，我們先假設 $\gamma(Q_n) \leq \gamma^*$ ，存在一個大小為 γ^* 的控制集，則可得出 δ 並推論出理論上的重複解決次數 r_{theory} 。以引理一說明其計算方式：

引理 1. *給定控制集 D ，則*

$$
\begin{aligned}
r_{theory} &= \sum_{x\in\mathbb{N}} x(n-x)|V\delta^x| - 2^n + |D| \\
&= (n-1)\delta - 2^n + |D| - \sum_{x\in\mathbb{N}} x(x-1)|V\delta^x|
\end{aligned}
$$

Proof.
由性質一知 $\forall\, v \notin D$ ，有 $|N[v] \cap V\delta| \geq 1$ ，亦即 v 一定會被解決。
又 $\forall\, u \in V\delta^x$ ，有 $|N[u] \backslash D| = n-x$ ，因此 u 共解決了 $x(n-x)$ 次。
故

$$r_{theory} = \sum_{x\in\mathbb{N}} \sum_{u\in V\delta^x} x(n-x) - |V(Q_n)\backslash D| = \sum_{x\in\mathbb{N}} x(n-x)|V\delta^x| - 2^n + |D|$$

因

$$\sum_{x\in\mathbb{N}} x(n-x)|V\delta^x| = \sum_{x\in\mathbb{N}} x[(n-1)-(x-1)]|V\delta^x|$$

又

$$\sum_{x\in\mathbb{N}} x|V\delta^x| = \delta \Rightarrow r_{theory} = (n-1)\delta - 2^n + |D| - \sum_{x\in\mathbb{N}} x(x-1)|V\delta^x|$$

r_{theory} 的最大值為 $(n-1)\delta - 2^n + |D|$ ，記為 $\max(r_{theory})$ ，發生於 $C = \phi$ 時。 □

接著藉由討論 $\sum_{x\in\mathbb{N}} x \sum_{v\in V\delta^x} (r_0(v)+r_1(v))$ 的值，並考慮在以上的加總中，$\forall\, u \in Vr^x$ ，r_u 被計算 $(x+1)$ 次，考慮這些重複計算並將其扣除，就能算出實際上的重複解決次數 r_{actual} 。
若得到 $r_{actual} > r_{theory}$ 的矛盾，則代表「大小為 γ^* 的控制集」不可能存在，故 $\gamma^* < \gamma(Q_n)$ ，如此便可提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界。

3.2 建構出 $r_{actual}-r_{theory}=2\delta-\max(r_{theory})$ 的情況

$\forall v\in V\delta$，首先討論 $d(v,C)\geq 3$ 時，$N[v]$ 被重複解決的次數 $(r_0(v)+r_1(v))$ 的值。

引理 2. *$\forall v\in V\delta$，若 $d(v,C)\geq 3$，則 $r_0(v)+r_1(v)\geq 6$；且 $r_0(v)+r_1(v)=6$ 時，$N[v]$ 中所有被重複解決的點，都是被重複解決兩次，即 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(v)\subset Vr^2$，$|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(v)|=3$。*

Proof.
不失一般性設 $v=(0)$，$N[v]\cap D=(1),(a)$，其中 $a\in\{0,2,3,\ldots,n\}$。如此 $\{(0),(1,a)\}\subset V\delta$。然而為滿足性質二，必須有 $|\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(v)|\equiv 0(\bmod 3)$，因此稱 $\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(v)\backslash\{(0),(1,a)\}=S$，則 $|S|\equiv 2(\bmod 3)$。
此時滿足 $\forall u\in N[v]\cap D$，$|N[u]\cap\{(0),(1,a)\}|=2$，即 u 被 $\{(0),(1,a)\}$ 解決兩次；以及 $\forall u\in N[v]\backslash D$，$|N[u]\cap\{(0),(1,a)\}|=1$，即 u 被 $\{(0),(1,a)\}$ 解決一次。又根據性質一可知 $\forall u\in N[u]\cap D$，有 $|N[u]\cap\cup_{i=0}^{2}V\delta_i(v)|\equiv 0(\bmod 2)$；以及 $\forall u\in N[v]\backslash D$，有 $|N[u]\cap\cup_{i=0}^{2}V\delta_i(v)|\equiv 1(\bmod 2)$。因此 $\forall b\in\{1,2,\ldots,n\}$，有 $|S[\{b\}]|\equiv 0(\bmod 2)$。另外，如果 $a\neq 0$，則 $r_0(v)+r_1(v)=2|S|-|S[\{1\}]\cup S[\{a\}]|$；如果 $a=0$，則 $r_0(v)+r_1(v)=r_1(v)=2|S|-|S[\{1\}]|-|S\cap N_1[v]|$。
若 $|S|=2$，則 $\exists\, b\in\{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $|S[\{b\}]|=1$，矛盾。
若 $|S|\geq 8$，如果 $a\neq 0$ 則由 $|S[\{1\}]\cup S[\{a\}]|\leq|S|$，如果 $a=0$ 則由 $(|S[\{1\}]|+|S\cap N_1[v]|)\leq|S|$，均會得到 $r_0(v)+r_1(v)\geq|S|\geq 8$。
而 $|S|=5$ 時，則分兩種情況討論。

> Case 1：$a\neq 0$
> 如果 $|S[\{1\}]|=4$ 或 $|S[\{a\}]|=4$，則 $\exists\, b\in\{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $|S[\{b\}]|=1$，矛盾。因此 $|S[\{1\}]|,|S[\{a\}]|=0$ 或 2，故 $|S[\{1\}]\cup S[\{a\}]|\leq 4$，$r_0(v)+r_1(v)\geq 6$。當 $r_0(v)+r_1(v)=6$，因為 $|S[\{1\}]|=|S[\{a\}]|=2$，故 $\forall b\in g(S)\backslash\{1,a\}$，必有 $|S[\{b\}]|\leq 3$，結合 $|S[\{b\}]|\equiv 0(\bmod 2)$ 可知 $|S[\{b\}]|=2$。因此必有 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(v)\subset Vr^2$，$|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(v)|=3$。
>
> Case 2：$a=0$
> 如果 $|S[\{1\}]|=4$ 或 $|S\cap N_1[v]|=4$，則 $\exists\, b\in\{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $|S[\{b\}]|=1$，矛盾。因此 $|S[\{1\}]|,|S\cap N_1[v]|]=0$ 或 2，故 $|S[\{1\}]\cup(S\cap N_1[v])|\leq 4$，$r_0(v)+r_1(v)\geq 6$。當 $r_0(v)+r_1(v)=6$，因為 $|S[\{1\}]|=|S\cap N_1[v]|=2$，故 $\forall b\in g(S)\backslash\{1,a\}$，必有 $|S[\{b\}]|\leq 3$，結合 $|S[\{b\}]|\equiv 0(\bmod 2)$ 可知 $|S[\{b\}]|=2$。因此必有 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(v)\subset Vr^2$，$|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(v)|=3$。

以上兩種情況皆得出所求的結論，故得證。 □

根據引理二，我們假設存在一種「簡單情況」：

「控制集 D 使得 $C=\phi$，且 $\forall v\in V\delta$，有 $r_0(v)+r_1(v)=6$。」

在簡單情況中，因為 $\sum_{x\in\mathbb{N}}x(x-1)|V\delta^x|=0$，由引理一知此時 $r_{theory}=\max(r_{theory})$。至於 $\sum_{x\in\mathbb{N}}x\sum_{v\in V\delta^x}(r_0(v)+r_1(v))=6\delta$，且由引理二可知 $Vr=Vr^2$，亦即在以上的加總中，$\forall u\in Vr$，r_u 總共被計算了三次。因此 $r_{actual}=6\delta\div 3=2\delta\Rightarrow r_{actual}-r_{theory}=2\delta-\max(r_{theory})$。

如果能夠證明在任何其他情況下，都有 $r_{actual}-r_{theory}>2\delta-\max(r_{theory})$，那麼給定一個待檢驗是否可能為 $\gamma(Q_n)$ 的值，若其在「簡單情況」下會得出 $r_{actual}>r_{theory}$，那麼我們便知道其在任何情況下都會有 $r_{actual}>r_{theory}$。這就是我們接著要討論的問題。

3.3 若 $Vr\neq Vr^2$ 或 $C\neq\phi$，則 $r_{actual}-r_{theory}>2\delta-\max(r_{theory})$

對於被重複解決的點所形成的點集 Vr，計算其中每一個點被「解決」的次數並加總，其值即為 $\sum_{x\in\mathbb{N}}x\sum_{u\in V\delta^x}|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|$。此數值對於這部分的證明是非常重要的。因此引理三與引理四將討論在什麼樣的條件下可以確定 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\geq 3$，而在什麼樣的條件下可能存在 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\leq 2$ 的情況。
藉由以上兩個引理的結論，引理五與引理六則討論 $\sum_{x\in\mathbb{N}}x\sum_{u\in V\delta^x}|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|$ 的下界，得出 $\sum_{x\in\mathbb{N}}x\sum_{u\in V\delta^x}|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|$ 可能略小於 3δ，並建立了它與 $|C|$ 的關係。
有了以上的準備，最後便可由引理七證明本章標題中的敘述。

引理 3. *$\forall\, u \in V\delta^1$ ，若 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \le 2$ ，則 $d(u,C) \le 2$ 。*

Proof. 假設 $d(u,C) \ge 3$ ，則由引理二知 $r_0(u)+r_1(u) \ge 6$ ，且引理二已證明等號成立時必有 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| = 3$ ，因此 $r_0(u)+r_1(u) \ge 8$ 。這代表 $\exists\, v \in \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$ 使得 $r_v \ge 4$ 。
令 $S = (N[u]\cap D) \cup \left(\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)\right)$ ，則 $|S| \le 4$ 。
但 $\forall w \in \cup_{i=0}^1 V\delta_i(v)$ ，因為 $\nexists\, t \in N[u]\backslash S$ 使得 $t \in \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$ ，所以有 $w = u$ 或是 $N[w]\cap N[u] \in S$ 。又 $w \in V\delta^1$ ，故

$$r_v = |\cup_{i=0}^1 Vr_i(v)| - 1 \le (1 + |S\backslash v|) - 1 = 3$$

矛盾。因此 $d(u,C) \le 2$ 。 □

由引理三得知，$\forall\, u \in V\delta^1$ ，只有在 $d(u,C) \le 2$ 時，才可能有 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \le 2$ 。
因此引理四將討論 $\forall\, v \in C$ ，$u \in (N_1[v]\cup N_2[v]) \cap V\delta^1$ ，決定是否有 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \le 2$ 的條件。我們將 $(N_1[v]\cup N_2[v]) \cap V\delta^1$ 分為以下的點集，以對 u 的位置及關係進行分類：

$$\begin{aligned}
T_1(v) &= (N[v]\backslash D) \cap V\delta^1 \\
T_2(v) &= \{u \in V\delta^1 | d(u,v) = 2 \text{ 且} |N[u]\cap N[v]\cap D| = 0\} \text{ ；} \\
T_3(v) &= \{u \in V\delta^1 | d(u,v) = 2 \text{ 且} |N[u]\cap N[v]\cap D| = 2\} \text{ ；} \\
T_4(v) &= \{u \in V\delta^1 | d(u,v) = 2 \text{ 且} |N[u]\cap N[v]\cap D| = 1\} \text{ ；} \\
T_5(v) &= N[v]\cap D \cap V\delta^1 \text{ 。}
\end{aligned}$$

引理 4. *$\forall\, u \in V\delta^1$ ，若 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \le 2$ ，則有以下性質。*

1. *$|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| = 2$ 。*
2. *$\exists\, v \in C\backslash D$ 使得 $u \in T_1(v)\cup T_2(v)$ ，或是 $\exists\, v \in C\cap D$ 使得 $u \in T_2(v)$ 。*
3. *將座標重新命名使 $v = (0)$ 後，v 將滿足以下三個條件：*

   條件一：若 $u \in T_1(v)$ ，則設 $u = (a)$ ，有 $|V\delta_1(v)| \le 3$ ，且 $|V\delta_2(v)[\{a\}]| \le 2$ 。

   條件二：若 $u \in T_2(v)\backslash D$ ，則設 $u = (a,b)$ ，有 $(a),(b) \notin V\delta$ ，且 $|V\delta_1(v)[\{a\}]| \le 3,$ $|V\delta_2(v)[\{b\}]| \le 3$ 。

   條件三：若 $u \in T_2(v)\cap D$ ，則設 $u = (a,b)$ ，有 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|, |V\delta_2(v)[\{b\}]| \le 2$ 。

Proof. $\forall\, v \in C$ ，我們根據 u 和 v 的關係分以下五種情況討論。

1. **$\forall\, v \in C$ ，若 $u \in T_1(v)$ ，則根據 v 是否為控制點，會得出不同的結論。**

   (a) **$\forall\, v \in C\backslash D$ ，若 $u \in T_1(v)$ ，則 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \ge 2$ 。**
   不失一般性設 $v = (0)$ ，$u = (a) \notin D$ ，則 $\{u,v\} \subseteq \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$ 。因此當 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| = 2$ 時，$\cup_{i=0}^1 Vr_i(u) = \{u,v\}$ ，並且有以下限制：
   其一，因為 $u \in V\delta^1$ ，故 $|g(N[u]\cap D)| = 3$ 。
   如果 $|V\delta_1(v)| \ge 4$ ，則 $\exists\,(k) \in V\delta_1(v)$ 使得 $k \notin g(N[u]\cap D)$
   $\Rightarrow (a,k) \in \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$ ，矛盾。因此 $|V\delta_1(v)| \le 3$ 。
   其二，如果 $|V\delta_2(v)[\{a\}]| \ge 3$ ，則同樣因為 $|g(N[u]\cap D)| = 3$ ，
   故 $\exists\, w \in V\delta_2(v)[\{a\}], b \in g(w)\backslash\{a\}$ 使得 $b \notin g(N[u]\cap D) \Rightarrow (a,b) \in \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$ ，矛盾。因此 $|V\delta_2(v)[\{a\}]| \le 2$ 。
   以上兩項限制即為條件一所述。

   (b) **$\forall\, v \in C\cap D$，若 $u \in T_1(v)$，則 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \ge 3$**
   假設 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \le 2$ ，則易驗證需有 v 被重複控制的次數 $\delta_v = 2$ ，可不失一般性設 $N[v]\cap D = (0),(1),(2)$ ，$u = (a) \notin D$ 。因為 $u \in \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$ ，因此 $|\{(1,a),(2,a)\} \cap \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| = 1$ ，$|\{(1,a),(2,a)\}\cap D| = 1$ 。
   不失一般性設 $(1,a) \in D$ ，因為 $\nexists\, k \in \{3,4,\ldots,n\}$ 使得 $(a,k) \in \cup_{i=0}^1 Vr_i(u)$，故 $\cup_{i=1}^2 V\delta(u) \subseteq \{(0),(1),(2),(1,a),(2,a),(1,2,a)\}$ 。
   根據性質一可知 $\delta_{(0)} + \delta_{(1,a)} + \delta_{(2,a)} \equiv 0(\bmod 2)$，(因為 $\delta_0(u)+\delta_1(u) \equiv 1(\bmod 2)$ ，且 $\delta_u = 1$)
   又 $\delta_{(0)} = 2$ ，因此 $\delta_{(1,a)} + \delta_{(2,a)} \equiv 0(\bmod 2)$ 。然而 $1 \le \delta_{(1,a)} \le 2$ （因為 $N[(1,a)] \subseteq \{(1),(1,a),(1,2,a)\}$ 且 $(1),(1,a) \in D$ ），且 $\delta_{(2,a)} \le 1$ （因為 $N[(2,a)] \subseteq \{(2),(1,2,a)\}$ ），又 $\delta_{(1,a)} = 2 \Leftrightarrow \delta_{(2,a)} = 1$ （因為 $(1),(2),(1,a) \in D$ ），故 $\delta_{(1,a)} + \delta_{(2,a)} = 1$ 或 3 ，矛盾。這代表假設錯誤，因此 $|\cup_{i=0}^1 Vr_i(u)| \ge 3$ 。

2. $\forall v \in C$ **，若** $u \in T_2(v)$ **，則** $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \geq 2$ **。**

不失一般性設 $v=(0)$ ，$u=(a,b)$ ，其中 $(a),(b)\notin D$ ，則 $\{(a),(b)\}\subseteq \cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ 。因此當 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|=2$ 時，$\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)=\{(a),(b)\}$ ，並且有以下限制。

若 $u\notin D$ ：

(a) $(a),(b)\notin V\delta_1(v)$ ，否則 $u\in \cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，矛盾。

(b) 因為 $u\in V\delta^1$ 又 $a,b\notin D$，故 $|g(N[u]\cap D)|=4$ 。
如果 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|\geq 4$ ，則 $\exists\, w\in V\delta_2(v)[\{a\}], c\in g(w)\backslash\{a\}$ 使得 $c\notin g(N[u]\cap D)\Rightarrow (a,b,c)\in \cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，矛盾。因此 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|\leq 3$ 。同理，$|V\delta_2(v)[\{b\}]|\leq 3$ 。

若 $u\in D$ ：
因為 $u\in V\delta^1$ 又 $a,b\in D$ ，故 $|g(N[u]\cap D)|=3$ 。
如果 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|\geq 3$ ，則 $\exists\, w\in V\delta_2(v)[\{a\}], c\in g(w)\backslash\{y\}$ 使得 $c\notin g(N[u]\cap D)\Rightarrow (a,b,c)\in \cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，矛盾。因此 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|\leq 2$ 。同理，$|V\delta_2(v)[\{b\}]|\leq 2$。
以上的限制即為條件二、三所述。

3. $\forall v \in C$ **，若** $u\in T_3(v)$ **且** $u\notin T_1(v')\cup T_2(v')$ **，其中** $v'\in C\backslash v$ **，則** $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|\geq 3$ **。**

不失一般性設 $v=(0)$ ，$(1),(2)\in D$ ，$u=(1,2)$ ，則 $N[u]\cap D=\{(1),(2)\}$ 。假設 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\leq 2$ ，則易驗證需有 $\delta_v\leq 3$ 。
如果 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|=1$ ，則假設 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)=(1,2,a)$ ，其中 $a\in\{0,3,4,\ldots,n\}$ 。
如此 $\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(u)\subseteq\{(0),(1,a),(2,a)\}$ ，且 $\delta_{(1,a)},\delta_{(2,a)}\geq 1$ ，又根據性質二可知 $|\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(u)|\geq 6$ ，因此 $\{(1,a),(2,a)\}\cap C\neq\phi$ ，可設 $(1,a)\in C$ 。如此 $\exists\, b\in 0,3,4,\ldots,n\backslash a$ 使得 $(1,a,b)\in D$ ，$(1,b)\in V\delta$ ，$(1,2,b)\in \cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，矛盾。
故 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|=2$ 。

不失一般性設 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)=(1,2,3),(1,2,k)$ ，其中 $k\in\{0,4,5,\ldots,n\}$ 。
因為 $\nexists\, k'\in\{0,4,5,\ldots,n\}\backslash k$ 使得 $(1,k')\in\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，因此

$$\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(u)\subseteq\{(0),(1,3),(2,3),(1,k),(2,k),(1,2,3,k)\}$$

(這也代表了 $N[v]\cap D(Q_n)\subseteq\{(1),(2),(3),(k)\}$)
將這六個點分別被重複控制的次數表示為 $\delta_{(0)}=a$ 、$\delta_{(1,3)}=b$ 、$\delta_{(2,3)}=c$ 、$\delta_{(1,k)}=d$ 、$\delta_{(2,k)}=e$ 、$\delta_{(1,2,3,k)}=f$ ，我們根據性質一（注意 $\delta_{(1,2)}=1$）與二得出以下關係：
式一：$a+b+d\equiv 1(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((1))+\delta_1((1))\equiv 0(\bmod 2)$)
式二：$a+c+e\equiv 1(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((2))+\delta_1((2))\equiv 0(\bmod 2)$)
式三：$b+c+f\equiv 0(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((1,2,3))+\delta_1((1,2,3))\equiv 1(\bmod 2)$)
式四：$d+e+f\equiv 0(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((1,2,k))+\delta_1((1,2,k))\equiv 1(\bmod 2)$)
式五：$a+b+c+d+e+f\equiv 0(\bmod 3)$(因為 $\delta_1((u))+\delta_2((u))\equiv 0(\bmod 3)$)

Case 1：$a=3$
如果 $a=3$ ，則 $N[v]\cap D=\{(1),(2),(3),(k)\}$。由於 $\nexists\, k'\in\{0,4,5,\ldots,n\}\backslash k$ 使得 $(1,2,k')\in\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，因此有以下限制：
$1\leq b\leq 2$ （因為 $N[(1,3)]\cap D\subseteq\{(1),(3),(1,3,k)\}$ 且 $(1),(3)\in D$），
$1\leq c\leq 2$ （因為 $N[(2,3)]\cap D\subseteq\{(2),(3),(2,3,k)\}$ 且 $(2),(3)\in D$），
$1\leq d\leq 2$ （因為 $N[(1,k)]\cap D\subseteq\{(1),(k),(1,3,k)\}$ 且 $(1),(k)\in D$），
$1\leq e\leq 2$ （因為 $N[(2,k)]\cap D\subseteq\{(2),(k),(2,3,k)\}$ 且 $(2),(k)\in D$），
$f\leq 1$ （否則 $u\in T_1((1,2,3,k))$ 或 $u\in T_2((1,2,3,k))$ ，矛盾)。
特別注意在 $1\leq d\leq 2$ 的推論中，根據的是「$N[(1,k)]\cap D\subseteq\{(1),(k),(1,3,k)\}$ 」而非「$N[(1,k)]\cap D\subseteq\{(1),(k),(1,3,k),(1,k)\}$ 」。
這是因為若 $k\neq 0$ ，則 $(1,k)\notin D$ ，否則 $(1)\in V\delta$ ，$(1,2)\in Vr$ ，矛盾；
而若 $k=0$ ，則已有 $(1)=(1,k)$ 。同理，$1\leq e\leq 2$ 的推論也是如此。
在以上限制下，$a+b+c+d+e+f=9$ 或 12 ，我們討論其值：
若其值為 9 ，則 $b+c+d+e+f=(b+c+f)+(d+e+f)-f=6$ 。

由式三、四知 $f=0$ ，且 b,c 同奇偶，d,e 同奇偶。
再由式一、二知 b,c,d,e 同奇偶。然如此必有 $b+c+d+e+f=4$ 或 8 ，矛盾。

若其值為 12 ，則必有 $b,c=2$ ，$d,e=2$ ，$f=1$ 。然與式三、四矛盾。

Case 1：$a=2$
如果 $a=2$ ，則 $N[v]\cap D=\{(1),(2),(3)\}$ 或 $\{(1),(2),(k)\}$。

不失一般性設 $N[v]\cap D=\{(1),(2),(k)\}$（因為這涵蓋了 $(0)\in D$ 與 $(0)\notin D$ 的情況），則因為 $(3)\notin D$ 而使條件限制與 **Case 1** 相比，變為：$b,c\leq 1$ ，$1\leq d,e\leq 2$ ，$f\leq 1$ 。在這些限制下，$a+b+c+d+e+f=6$ 或 9 ，我們討論其值：
若其值為 6 ，則 $b+c+d+e+f=(b+c+f)+(d+e+f)-f=4$ 。

由式三、四知 $f=0$ ，且 b,c 同奇偶，d,e 同奇偶。再由式一、二知 b,c 與 d,e 的奇偶相同，因此 $b,c,d,e=1$ 。然這代表 $f=1$(因為 $b,c=1$ 代表了 $(1,3,k),(2,3,k)\in D$ ，$(1,2,3,k)\in V\delta$)，矛盾。

若其值為 9 ，則必有 $b,c=2$ ，$d,e=1$ ，$f=1$ ；或是 $b,c=1$ ，$d,e=2$ ，$f=1$ 。

然均與式三、四矛盾。

所有情況皆得矛盾，這代表假設錯誤，因此 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\geq 3$ 。

4. $\forall v\in C$ **，若** $u\in T_5(v)$ **且** $u\notin T_1(v')\cup T_2(v')$ **，其中** $v'\in C\backslash v$ **，則** $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\geq 3$

Case 1：$v\in D$
不失一般性設 $v=(0)$ ，$u=(1)$ ，$(1),(2)\in N[v]\cap D$ 。
假設 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\leq 2$ ，則易驗證需有 $\delta_v\leq 3$ 。
如果 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|=1$ ，則 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)=(1,2)$ ，如此 $\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(u)\subseteq\{(0),(2),(1,2)\}$ ，且 $\delta_{(2)},\delta_{(1,2)}\geq 1$ ，又根據性質二知 $|\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(u)|\geq 6$ ，因此 $\{(2),(1,2)\}\cap C\neq\phi$ 。但這表示 $\exists\, b\in\{3,4,\ldots,n\}$ 使得 $\{(2,b),(1,2,b)\}\cap D\neq\phi$ ，$\{(b),(1,b)\}\cap V\delta\neq\phi$ ，$(1,b)\in\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，矛盾。
故 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|=2$ ，不失一般性設 $\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)=(1,2),(1,3)$ 。

因為 $\nexists\, k'\in\{4,5,\ldots,n\}$ 使得 $(1,k')\in\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ ，因此

$$\cup_{i=1}^{2}V\delta_i(u)\subseteq\{(0),(2),(3),(1,2),(1,3),(1,2,3)\}$$

(這也代表了若 $\delta_{(0)}=3$ ，則 $N[v]\cap D=\{(0),(1),(2),(3)\}$)
將這六個點分別被重複控制的次數表示為 $\delta_{(0)}=a$ 、$\delta_{(2)}=b$、$\delta_{(3)}=c$ 、$\delta_{(1,2)}=d$ 、$\delta_{(1,3)}=e$ 、$\delta_{(1,2,3)}=f$ ，我們根據性質一（注意 $\delta_{(1)}=1$ ）與二得出以下關係：
式一：$a+d+e\equiv 1(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((1))+\delta_1((1))\equiv 0(\bmod 2)$)
式二：$a+b+c\equiv 1(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((0))+\delta_1((0))\equiv 0(\bmod 2)$)
式三：$b+d+f\equiv 0(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((1,2))+\delta_1((1,2))\equiv 1(\bmod 2)$)
式四：$c+e+f\equiv 0(\bmod 2)$(因為 $\delta_0((1,3))+\delta_1((1,3))\equiv 1(\bmod 2)$)
式五：$a+b+c+d+e+f\equiv 0(\bmod 3)$(因為 $\delta_1((u))+\delta_2((u))\equiv 0(\bmod 3)$)

Case 1 - (1)： 如果 $a=3$ 還有以下的限制。
$1\leq b\leq 2$ （因為 $N[(2)]\cap D\subseteq\{(0),(2),(2,3)\}$ 且 $(0),(2)\in D$），
$1\leq c\leq 2$ （因為 $N[(3)]\cap D\subseteq\{(0),(3),(2,3)\}$ 且 $(0),(3)\in D$），
$1\leq d\leq 2$ （因為 $N[(1,2)]\cap D\subseteq\{(1),(2),(1,2,3)\}$ 且 $(1),(2)\in D$），
$1\leq e\leq 2$ （因為 $N[(1,3)]\cap D\subseteq\{(1),(3),(1,2,3)\}$ 且 $(1),(3)\in D$），
$f\leq 1$ （否則 $u\in T_2((1,2,3))$ ，矛盾）。
在這些限制下，$a+b+c+d+e+f=9$ 或 12 ，我們討論其值：
若其值為 9，則 $b+c+d+e+f=(b+d+f)+(c+e+f)-f=6$ 。
因此由式三、四知 $f=0$ ，且 b,c 同奇偶，d,e 同奇偶。
再由式一、二知 b,c,d,e 同奇偶。然如此必有 $b+c+d+e+f=4$ 或 8 ，矛盾。
若其值為 12 ，則 $b,c,d,e=2$ ，$f=1$ 。然與式三、四矛盾。

Case 1 - (2)： 如果 $a=2$ 則 $N[v]\cap D=\{(0),(1),(2)\}$ 。
因為 $(3)\notin D$ ，而使條件限制與 **Case 1 - (1)** 相比變為：$1\leq b,d\leq 2$ ，$c,e\leq 1$ ，$f\leq 1$ 。在這些限制下，$a+b+c+d+e+f=6$ 或 9 ，我們討論其值：
若其值為 6 ，則 $b+c+d+e+f=(b+d+f)+(c+e+f)-f=4$ 。
由式三、四知 $f=0$ ，且 b,d 同奇偶，c,e 同奇偶。
再由式一、二知 b,c,d,e 同奇偶，因此 $b,c,d,e=1$ ，或是 $b,d=2$ 且 $c,e=0$ 。然前者代表 $f=1$ （因為 $c,e=1$ 代表了 $(2,3),(1,2,3)\in D$ ，$(1,2,3)\in V\delta$ ），後者代表 $(1,3)\notin\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ 。均為矛盾。
若其值為 9 ，則必有 $b,d=2$ ，$c,e=1$ ，$f=1$ 。然與式三、四矛盾。

Case 2：$v\notin D$
不失一般性設 $v=(0)$ ，$u=(1)\in D$ 。此時 $(0)\in\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)$ 。假設 $|\cup_{i=0}^{1}Vr_i(u)|\leq 2$

，易驗證需有 $\delta_v = 2$ 。不失一般性設 $N[v] \cap D = \{(1),(2),(3)\}$ ，則 $\{(1,2),(1,3)\} \subset V\delta_1(u)$ 。
因此 $|\{(1,2),(1,3)\} \cap \cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| = 1$ ，$|(1,2),(1,3) \cap D| = 1$ 。
再不失一般性設 $(1,2) \in D$ ，則 $(1,2) \in C \cap D$ 且 $u \in T_5((1,2))$ ，由 **Case 1** 的討論知此時 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \geq 3$ ，矛盾。
所有情況皆得矛盾，這代表假設錯誤，因此 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \geq 3$ 。

5. **若 $u \in T_4(v)$ 且 $u \notin T_1(v') \cup T_2(v')$ ，其中 $v' \in C \backslash v$ ，則 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u) \geq 3|$**

 Case 1：$v \notin D$
 不失一般性 $v = (0)$ ，$(1),(2),(3) \in N[v] \cap D$ ，$u = (1,a)$ ，其中 $(a) \notin D$ 。
 此時 $(a) \in \cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)$ ，且 $\{(1,2),(1,3)\} \subset V\delta$ 。
 如果 $\{(1,2,a),(1,3,a)\} \cap D = \phi$ ，則 $\{(a),(1,2,a),(1,3,a)\} \subset \cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)$ ；
 如果 $\{(1,2,a),(1,3,a)\} \cap D \neq \phi$ ，則 $(1,2) \in C$ 或 $(1,3) \in C$ ，$u \in T_3((1,2))$ 或 $u \in T_3((1,3))$ 。
 以上皆代表 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \geq 3$ 。

 Case 2：$v \in D$
 不失一般性 $v = (0)$ ，$(1),(2) \in N[v] \cap D$ ，$u = (1,a)$ ，其中 $(a) \notin D$ 。
 此時 $\{(0),(1),(1,2),(1,a)\} \subset V\delta$ 。
 如果 $\{(1,a),(1,2,a)\} \cap D = \phi$ ，則 $\{(a),(1,a),(1,2,a)\} \subset \cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)$ ；
 如果 $(1,2,a) \in D$ ，則 $(1,2) \in C$ 且 $u \in T_3((1,2))$ ；
 如果 $(1,a) \in D$ ，則 $(1) \in C$ 且 $u \in T_5((1))$ 。
 以上三者皆代表 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \geq 3$ 。

從以上五點討論得知，只有在 $\exists\, v \in C \backslash D$ 使得 $u \in T_1(u) \cup T_2(v)$ ，或是 $\exists\, u \in C \cap D$ 使得 $u \in T_2(v)$ ，且符合條件一、二、三時，才可能有 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| = 2$ ，故得證。 □

定義 $S_i(v) = \{u | u \in T_i(v),\ |\cup_{j=0}^{1} Vr_j(u)| = 2\}$ 。給定一個中心點 v ，計算 $v \cup S_1(v) \cup S_2(v)$ 對 Vr 解決的次數，即為：

$$\delta_v(n - \delta_v) + 2(|S_1(v) \cup S_2(v)|)$$

而若我們將 $v \cup S_1(v) \cup S_2(v)$ 當中的每一個點，其 closed neighbor 當中被重複解決的點數都視為 3 ，算出的值則變為：$3\delta_v + 3(|S_1(v) \cup S_2(v)|)$ 。
兩者的差為 $\delta_v(n - \delta_v - 3) - |S_1(v) \cup S_2(v)|$ ，而我們在之後的引理中將用到這個差值，因此必須知道其下界為何。

引理 5. *$\forall\, v \in C$ ，$\delta_v(n - \delta_v - 3) - |S_1(v) \cup S_2(v)|$ 的下界如下：*

 當 $3 \leq \delta_v \leq n - 4$ ，或是 $\delta_v = 2$ 且 $n \geq 18$ ，其下界為 0 。

 當 $\delta_v = 2$ 且 $n = 12$ ，其下界為 -1 。

 當 $\delta_v = n - 3$ ，其下界為 -4.5 。

 當 $\delta_v = n - 2$ ，其下界為 $-n - 1$ 。

 當 $\delta_v = n - 1$ ，其下界為 $-2n + 0.5$ 。

 當 $\delta_v = n$ ，其下界為 $-3n$ 。

Proof. $\forall\, v \in C$ ，我們根據 v 是否為控制點分兩種情況討論 $|S_1(v) \cup S_2(v)|$ 的最大值。

若 $v \notin D$ ：
不失一般性設 $v = (0)$ ，$v \in V\delta^x$ ，$\{(0),(1),\ldots,(x)\} \subset D(Q_n)$ 。
令 $A = g(S_2(v) \cap D)$ ，$B = g(S_2(v)) \backslash A$ 。根據引理四的條件二、三：

 條件二：若 $u \in S_2(v) \backslash D$ ，則設 $u = (a,b)$ ，有 $(a),(b) \notin V\delta$ ，且

$$|V\delta_2(v)[\{a\}]|, |V\delta_2(v)[\{b\}]| \leq 3$$

 條件三：若 $u \in S_2(v) \cap D$ ，則設 $u = (a,b)$ ，有 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|, |V\delta_2(v)[\{b\}]| \leq 2$ 。

可知 $\forall k \in A$ ，有 $S_2(v)[\{k\}] \leq 2$ ；$\forall k \in B$ ，$S_2(v)[\{k\}] \leq 3$ 因此 $|S_2(v)| \leq \dfrac{2|A|+3|B|}{2}$ 。
由條件二還可知 $\forall k \in g(S_1(v)$ ，有 $k \notin S_2(v) \backslash D$ 因此 $k \notin B$ 。
故給定 $|S_1(v)|$ ，則 $|B| \leq n-x-1-|S_1(v)|$ ，又 $|A|+|B| \leq n-x-1$ ，因此

$$\begin{aligned}
|S_1(v) \cup S_2(v)| &\leq |S_1(v)| + \frac{2|A|+3|B|}{2} \\
&\leq |S_1(v)| + \frac{2|S_1(v)|+3(n-x-1-|S_1(v)|)}{2} \\
&= |S_1(v)| + \frac{3n-3x-3-|S_1(v)|}{2}
\end{aligned}$$

再根據引理四的條件一：

條件一：若 $u \in S_1(v)$ ，則設 $u=(a)$ ，有 $|V\delta_1(v)| \leq 3$ ，且 $|V\delta_2(v)[\{a\}]| \leq 2$ 。

可知 $|S_1(v)| \leq 3$ ，因此 $|S_1(v) \cup S_2(v)| \leq \dfrac{3n-3x}{2}$ 。

若 $\boldsymbol{v \in D}$ ：
不失一般性設 $v=(0)$ ，$v \in V\delta^x$ ，$\{(0),(1),\ldots,(x)\} \subset D$ 。此時 $|S_1(v)|=0$ ，由引理四的條件三可知 $\forall a \in \{(x+1),(x+2),\ldots,n\}$，有 $|S_2(v)[\{a\}]| \leq 3$ 。
因此

$$|S_1(v) \cup S_2(v)| = |S_2(v)| \leq \frac{3|\{(x+1),(x+2),\ldots,n\}|}{2} = \frac{3}{2}(n-x)$$

不論 v 是否為控制點，皆得到 $|S_1(v) \cup S_2(v)| \leq \dfrac{3}{2}(n-\delta_v)$ ，因此：

$$\delta_v(n-\delta_v-3) - (|S_1(v) \cup S_2(v)|) \geq \delta_v(n-\delta_v-3) - \frac{3}{2}(n-\delta_v)$$

將 δ_v 以不同的值代入驗證，即可證明引理所述。 □

有了引理五的結論，便可以得出 $\boldsymbol{Vr}$ 總共被解決的次數 $\boldsymbol{\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|}$ 的下界。

引理六將說明 $\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|$ 的下界十分接近 3δ ，僅受到 $|V\delta^2|$ 、$|V\delta^{n-3}|$ 、$|V\delta^{n-2}|$ 、$|V\delta^{n-1}|$ 、$|V\delta^n|$ 的影響而將略小於 3δ 。而且我們也建立了其下界與 $|V\delta^2|$ 、$|V\delta^{n-3}|$ 、$|V\delta^{n-2}|$ 、$|V\delta^{n-1}|$ 、$|V\delta^n|$ 的關係。

引理 6.

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \\
\geq\ & 3\delta - |V\delta^2| - 4.5|V\delta^{n-3}| - (n+1)|V\delta^{n-2}| - (2n-0.5)|V\delta^{n-1}| - 3n|V\delta^n|
\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x\left(|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|-3\right) &= \sum_{v\in C}\delta_v\left(|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(v)|-3\right) + \sum_{u\in V\delta^1}\left(|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|-3\right) \\
&\geq \sum_{v\in C}\delta_v(n-\delta_v-3) + \sum_{\exists v \text{ 使得} u\in S_1(v)\cup S_2(v)}\left(|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|-3\right) \\
&\geq \sum_{v\in C}(\delta_v(n-\delta_v-3) - |S_1(v)\cup S_2(v)|) \\
&\geq -(|V\delta^2| + 4.5|V\delta^{n-3}| + (n+1)|V\delta^{n-2}| \\
&\quad +(2n-0.5)|V\delta^{n-1}| + 3n|V\delta^n|)
\end{aligned}$$

又 $\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x\left(|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|-3\right) = \sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| - 3\delta$ ，因此：

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \\
\geq\ & 3\delta - |V\delta^2| - 4.5|V\delta^{n-3}| - (n+1)|V\delta^{n-2}| - (2n-0.5)|V\delta^{n-1}| - 3n|V\delta^n|
\end{aligned}$$

$\square$

有了引理六的結論，便可以推導本章最重要的引理七。

引理 7. *若* $Vr \neq Vr^2$ *或* $C \neq \phi$ *，則* $r_{actual} - r_{theory} > 2\delta - \max(r_{theory})$

Proof. 在引理二的「簡單情況」中，$\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{v\in V\delta^x} x(r_0(v)+r_1(v)) = 6\delta$ ，$r_{actual} = \frac{6\delta}{3} = 2\delta$ 。而其他情況中，$r_{actual} = \sum_{i\geq 1}(2i|Vr^{2i}|)$ 。這和我們先前所述的計算方式之結果是相同的：

欲計算 r_{actual} ，首先根據定義知

$$\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{v\in V\delta^x} x\left(r_0(v)+r_1(v)\right) = \sum_{i\geq 1}[2i(2i+1)|Vr^{2i}|]$$

但是此時的 r_{actual} 並不等於 $\frac{1}{3}\sum_{i\geq 1}[2i(2i+1)|Vr^{2i}|]$ ，因為在以上的加總中，$\forall\, u \in Vr^x (x \geq 4)$，$r_u$ 被計算了 $(x+1)$ 次而非三次。因此需先從 $\sum_{i\geq 1}[2i(2i+1)|Vr^{2i}|]$ 中，把「$\forall\, u \in \cup_{x\geq 4} Vr^x$ ，對 r_u 第四次以上的計算」扣除，之後再除以三才會得到 r_{actual} 。
把「$\forall\, u \in \cup_{x\geq 4} Vr^x$ ，對 r_u 第四次以上的計算」扣除，即為扣除：

$$4(4+1-3)|Vr^4| + 6(6+1-3)|Vr^6| + \cdots = \sum_{i\geq 1}[2i(2i-2)|Vr^{2i}|]$$

因此

$$\begin{aligned}
r_{actual} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i\geq 1}\left[2i(2i+1)\left|Vr^{2i}\right|\right] - \sum_{i\geq 1}\left[2i(2i-2)\left|Vr^{2i}\right|\right]\right) = \frac{1}{3}\sum_{i\geq 1}(6i|Vr^{2i}|) \\
r_{actual} - 2\delta &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i\geq 1}\left(6i\left|Vr^{2i}\right|\right) - 6\delta\right)
\end{aligned}$$

而根據定義知

$$\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| = \sum_{i\geq 1}(2i+1)|Vr^{2i}|$$

再根據引理六：

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{v\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \\
\geq\ & 3\delta - |V\delta^2| - 4.5|V\delta^{n-3}| - (n+1)|V\delta^{n-2}| - (2n-0.5)|V\delta^{n-1}| - 3n|V\delta^n|
\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}
&6\delta \leq \sum_{i\geq 1}(4i+2)|Vr^{2i}| + 2|V\delta^2| + 9|V\delta^{n-3}| + (2n+2)|V\delta^{n-2}| + (4n-1)|V\delta^{n-1}| + 6n|V\delta^n| \\
\Rightarrow\quad & r_{actual} - 2\delta = \frac{1}{3}\left(\sum_{i\geq 1}\left(6i|Vr^{2i}|\right) - 6\delta\right) \\
&\geq \frac{1}{3}(\sum_{i\geq 1}[(2i-2)|Vr^{2i}|] - 2|V\delta^2| - 9|V\delta^{n-3}| - (2n+2)|V\delta^{n-2}| - (4n-1)|V\delta^{n-1}| - 6n|V\delta^n|
\end{aligned}$$

又根據引理一，

$$\begin{aligned}
r_{theory} &= \sum_{x\in\mathbb{N}}(n-x)x|V\delta^x| - 2^n + |D| \\
&= (n-1)\delta - 2^n + |D| - \sum_{x\in\mathbb{N}} x(x-1)|V\delta^x|
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& r_{theory} - \max(r_{theory}) \\
= \; & -\sum_{x\in\mathbb{N}} x(x-1)|V\delta^x| \\
= \; & -2|V\delta^2| - 6|V\delta^3| - \cdots - (n-3)(n-4)|V\delta^{n-3}| - (n-2)(n-3)|V\delta^{n-2}| \\
& -(n-1)(n-2)|V\delta^{n-1}| - n(n-1)|V\delta^n|
\end{aligned}$$

比較 $(r_{actual} - 2\delta)$ 與 $(r_{theory} - \max(r_{theory}))$ ：
因為 $\sum_{i\geq 1}[(2i-2)|Vr^{2i}|] \geq 0$ ，且 $|V\delta^2|$ 、$|V\delta^{n-3}|$ 、$|V\delta^{n-2}|$ 、$|V\delta^{n-1}|$ 、$|V\delta^n|$ 的各項係數，在 $(r_{actual} - 2\delta)$ 中皆是大於等於在 $(r_{theory} - \max(r_{theory}))$ 中。
故當 $Vr \neq Vr^2$ 或 $C \neq \phi$ ，必有

$$\begin{aligned}
& r_{actual} - 2\delta > r_{theory} - \max(r_{theory}) \\
\Rightarrow \; & r_{actual} - r_{theory} > 2\delta - \max(r_{theory})
\end{aligned}$$

□

3.4 提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界

根據引理七，引理二的「簡單情況」下之 $r_{actual} - r_{theory} = 2\delta - \max(r_{theory})$ ，必定小於其他情況中的 $r_{actual} - r_{theory}$ 。因此給定一個待檢驗是否可能為 $\gamma(Q_n)$ 的值 γ^* ，若 γ^* 會推得 $2\delta - \max(r_{theory}) > 0$，則代表所有情況下均有 $r_{actual} > r_{theory}$ ，大小為 γ^* 的控制集不可能存在，因此 $\gamma^* < \gamma(Q_n)$ 。

以下以 Q_{12} 為例進行說明：
假設 $\gamma(Q_{12}) \leq 347$ ，則在某個大小為 347 的控制集中：

$$\delta = (n+1)|D| - 2^n = 13 \times 347 - 4096 = 415$$

根據引理一，$\max(r_{theory}) = (n-1)\delta - 2^n + |D| = 11 \times 415 - 4096 + 347 = 816$ 。
假設此時控制集存在一種排列為「簡單情況」，則在簡單情況下，$r_{actual} - r_{theory} = 2\delta - \max(r_{theory}) = 2 \times 415 - 816 = 14 > 0$ 。
又我們已經知道，非簡單情況的 $(r_{actual} - r_{theory})$ ，必大於簡單情況的 $(r_{actual} - r_{theory})$ ，因此不論此時 D 的排列為何，都必有 $r_{actual} > r_{theory}$ ，重複解決次數的實際值大於理論值，矛盾。所以我們知道大小為 347 的控制集不存在，亦即 $\gamma(Q_{12}) > 347$ 。
而當我們假設 $\gamma(Q_{12}) \leq 348$ ，就會得到「若大小為 348 的控制集存在一種解為「簡單情況」，則在簡單情況下，其 $r_{actual} - r_{theory} = 2\delta - max(r_{theory}) < 0$ 」的結論。如此，我們便不能排除存在「$r_{actual} = r_{theory}$ 」的情況之可能性。因此，大小為 348 的控制集有可能存在，$\gamma(Q_{12}) \geq 348$ 便是我們得出的下界。以上的方法可以被一般化，得出提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界的定理一。

定理 1. *若 $n \equiv 0 (\bmod 6)$ ，則 $\gamma(Q_n) \geq \dfrac{(n-2)2^n}{n^2-2n-2}$ 。*

Proof.
在 MDS 中，$\delta = (n+1)\gamma(Q_n) - 2^n$ 。

$$\begin{aligned}
\max(r_{theory}) &= (n-1)\delta - 2^n + \gamma(Q_n) = (n-1)(n+1)\gamma(Q_n) - (n-1)2^n - 2^n + \gamma(Q_n) \\
&= n^2\gamma(Q_n) - n \times 2^n
\end{aligned}$$

此時必須有 $\max(r_{theory}) - 2\delta \geq 0$
$\Rightarrow n^2\gamma(Q_n) - n \times 2^n - ((2n+2)\gamma(Q_n) - 2 \times 2^n) = (n^2-2n-2)\gamma(Q_n) - (n-2)2^n \geq 0$
$\Rightarrow \gamma(Q_n) \geq \dfrac{(n-2)2^n}{n^2-2n-2}$ □

只要 $n \equiv 0 (\bmod 6)$，不論 n 多大，定理一均適用。對於大小已知的 $\gamma(Q_6)$，定理一也得出 $\gamma(Q_6) \geq 12$ ，是正確的結果。
在 $n \equiv 0 (\bmod 6)$ 時，文獻中最好的下界均為文獻 [6] 所提出的 $\gamma(Q_n) \geq \dfrac{2^n}{n}$ ，因此定理一都能將下界提升得更高。我們可以對表 (一) 的下界做出以下的突破：

1. $\gamma(Q_{12}) \geq \dfrac{10 \times 4096}{118} = 347.1186\ldots, \gamma(Q_{12}) \geq 348$ （原下界：342）

2. $\gamma(Q_{18}) \geq \dfrac{16 \times 262144}{286} = 14665.3986\ldots, \gamma(Q_{18}) \geq 14666$ （原下界：14564）

3. $\gamma(Q_{24}) \geq \dfrac{22 \times 16777216}{526} = 701708.654\ldots, \gamma(Q_{24}) \geq 701709$ （原下界：699051）

4. $\gamma(Q_{30}) \geq \dfrac{28 \times 1073741824}{838} = 35876815.12\ldots, \gamma(Q_{30}) \geq 35876816$ （原下界：35791395）

4 結論

4.1 結果統整

我們討論 $n \equiv 0 \pmod 6$ 時，提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界之方法。全篇運用兩個重要的性質：

性質一：$\forall\, v \in V(Q_n)$ ，若 $v \notin D$ ，則 $\delta_0(v) + \delta_1(v) \equiv 1(\bmod 2)$ 。
若 $v \in D$ ，則 $\delta_0(v) + \delta_1(v) \equiv 0(\bmod 2)$ 。

性質二：$\forall\, v \in V(Q_n)$ ，有 $\delta_1(v) + \delta_2(v) \equiv 0(\bmod 3)$ 。

4.1.1 「簡單情況」的建立

給定一個待檢驗是否可能為 $\gamma(Q_n)$ 的值 γ^*，假設存在一個大小為 γ^* 的控制集 D ，我們由引理一知道其理論上的重複解決次數為：

$$r_{theory} = (n-1)\delta - 2n + |D| - \sum_{x \in \mathbb{N}} x(x-1)|V\delta^x|$$

接者根據引理二，我們知道：$\forall\, v \in V\delta$，若 $d(v, C) \geq 3$ ，則 $r_0(v) + r_1(v) \geq 6$ ；
且 $r_0(v) + r_1(v) = 6$ 時，有 $\cup_{i=0}^{1} Vr_i(v) \subset Vr^2$ ，$|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(v)| = 3$ 。
因此我們假設存在一種「簡單情況」：
$C = \phi$ ，且 $\forall\, v \in V\delta$ ，有 $r_0(v) + r_1(v) = 6$ ，推得 $Vr = Vr^2$ 。
則在「簡單情況」中，實際上的重複解決次數為：$r_{actual} = 2\delta$ ，與理論值的差為

$$r_{actual} - r_{theory} = 2\delta - \max(r_{theory})$$

4.1.2 其他情況的討論

$\forall\, v \in C$ ，我們將 $(N_1[v] \cup N_2[v]) \cap V\delta^1$ 分為以下的點集：

$$\begin{aligned}
T_1(v) &= N[v] \backslash MDS \cap V\delta^1 \\
T_2(v) &= \{u \in V\delta^1 | d(u,v) = 2 \text{ 且} |N[u] \cap N[v] \cap D| = 0\} \\
T_3(v) &= \{u \in V\delta^1 | d(u,v) = 2 \text{ 且} |N[u] \cap N[v] \cap D| = 2\} \\
T_4(v) &= \{u \in V\delta^1 | d(u,v) = 2 \text{ 且} |N[u] \cap N[v] \cap D| = 1\} \\
T_5(v) &= N[v] \cap D \cap V\delta^1
\end{aligned}$$

我們由引理三與引理四得知：$\forall\, u \in V\delta^1$ ，若 $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| \leq 2$ ，則有以下性質。

1. $|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)| = 2$ 。

2. $\exists\, v \in C \backslash D$ 使得 $u \in T_1(v) \cup T_2(v)$ ，或是 $\exists\, v \in C \cap D$ 使得 $u \in T_2(v)$ 。

3. 將座標重新命名使 $v = (0)$ 後，v 將滿足下列三個條件：

條件一： 若 $u \in T_1(v)$ ，則設 $u = (a)$ ，有 $|V\delta_1(v)| \leq 3$，且 $|V\delta_2(v)[\{a\}]| \leq 2$。

條件二： 若 $u \in T_2(v) \backslash D$ ，則設 $u = (a, b)$，有 $(a), (b) \notin V\delta$ ，且 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|, |V\delta_2(v)[\{b\}]| \leq 3$。

條件三： 若 $u \in T_2(v) \cap D$，則設 $u = (a, b)$，有 $|V\delta_2(v)[\{a\}]|, |V\delta_2(v)[\{b\}]| \leq 2$。

藉由引理三和引理四的這些限制，我們得以估算 $\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{v\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|$ 的最小值。我們由引理五與引理六得出：

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{u\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u))| \\ \geq\quad & 3\delta-|V\delta^2|-4.5|V\delta^{n-3}|-(n+1)|V\delta^{n-2}|-(2n-0.5)|V\delta^{n-1}|-3n|V\delta^n|\end{aligned}$$

$\sum_{x\in\mathbb{N}}\sum_{v\in V\delta^x} x|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(u)|$ 的最小值十分接近 3δ ，僅受到 $|V\delta^2|$ 、$|V\delta^{n-3}|$ 、$|V\delta^{n-2}|$ 、$|V\delta^{n-1}|$ 、$|V\delta^n|$ 的影響而將略小於 3δ 。這個事實幫助我們藉引理七證明：
若 $Vr\neq Vr^2$ 或 $C\neq\phi$ ，則 $r_{actual}-r_{theory}>2\delta-\max(r_{theory})$。

4.1.3 提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界

引理七證明了「簡單情況」之 $r_{actual}-r_{theory}$ 必定小於其他情況中的 $r_{actual}-r_{theory}$ ，而簡單情況的 $r_{actual}-r_{theory}=2\delta-max\,(r_{theory})>0$ 。因此給定一個待檢驗是否可能為 $\gamma(Q_n)$ 的值，若會推得 $2\delta-max\,(r_{theory})>0$，則代表必有 $r_{actual}>r_{theory}$ ，這個值便不可能是正確的。

我們藉此得出定理一，成功提升 $n\equiv 0(\bmod 6)$ 時，$\gamma(Q_n)$ 的下界：$\gamma(Q_n)\geq\dfrac{(n-2)2^n}{n^2-2n-2}$ 。

4.2 討論與延伸性

4.2.1 不定義控制點是否被解決的原因

根據性質一，$\forall\,v\in D$，有 $\delta_0(v)+\delta_1(v)\equiv 0(\bmod 2)$ 。因此若要定義控制點被解決的次數，則這也必須是它被重複解決的次數，否則會因為任一控制點不一定需要被解決，而無法與理論上的重複解決次數做比較。因此定義 Vdr^x 為「被重複解決 x 次的控制點所形成的點集」，則 $\forall\,v\in Vdr^x$，有 $\delta_{N[v]}=x$ 而非 $\delta_{N[v]}=x+1$ 。此時理論上的重複解決次數為：

$$r_{theory}=\sum_{x\in\mathbb{N}} x(n+1)|V\delta^x|-2^n+|D|=(n+1)\delta-2^n+|D|$$

而引理二將變為：
「$\forall\,v\in V\delta$ ，若 $d(v,C)\geq 3$ ，則 $r_0(v)+r_1(v)\geq 14$ ；且 $r_0(v)+r_1(v)=14$ 時，有 $|N[v]\cap Vdr^4|=2$ ，$|\cup_{i=0}^{1} Vr_i(v)\cap Vr^2|=3$ 。
若定義簡單情況為「$C=\phi$，且 $\forall\,v\in V\delta$ ，$r_0(v)+r_1(v)=14$ 」，則其實際上的重複解決次數將變為 $r_{actual}=6\delta\div 3+8\delta\div 4=4\delta$ ，與理論值的差為 $r_{actual}-r_{theory}=4\delta-((n+1)\delta-2^n+|D|)$ 。將正確的 $\gamma(Q_n)$ 代入 $|D|$ ，應推得上式小於等於 0 ，因此：

$$4[(n+1)\gamma(Q_n)-2^n]-((n+1)[(n+1)\gamma(Q_n)-2^n]-2^n+\gamma(Q_n))\leq 0$$

$(n^2-n-2)\gamma(Q_n)\geq(n-2)2^n$ ，$\gamma(Q_n)\geq\dfrac{(n-2)2^n}{(n^2-n-2)}=\dfrac{2^n}{n+1}$，無法提升下界。

4.2.2 其他維度的發展可能

1. 在偶數維度中，因為性質一仍適用，因此仍可以使用「重複解決」的概念嘗試提升下界。當 $n\equiv 2(\bmod 6)$ ，$\forall\,v\in V(Q_n)$，有 $\delta_0(v)+\delta_1(v)+\delta_2(v)\equiv 2(\bmod 3)$ 。然而因為此性質，若仿照引理二進行分析，同樣的 $\forall\,v\in V\delta$ ，若 $d(v,C)\geq 3$ ，則只能得到 $r_0(v)+r_1(v)\geq 0$ 。類似地，當 $n\equiv 4(\bmod 6)$ ，$\forall\,v\in V(Q_n)$ ，有 $2\delta_0(v)+\delta_1(v)+\delta_2(v)\equiv 0(\bmod 3)$ 。因為此性質，$\forall\,v\in V\delta$ ，若 $d(v,C)\geq 3$ ，則也只能得到 $r_0(v)+r_1(v)\geq 0$ 。亦即若只憑 $\delta_0(v)$ 、$\delta_1(v)$ 、$\delta_2(v)$ 的同餘性質，則難以排除 r 極小的狀況。但是若使用包含 $\delta_3(v)$、甚至是 $\delta_4(v)$ 的同餘性質，則討論的範圍便太大，而且在加總過程中，$\forall\,v\in Vr^x$ ，r_v 將被計算不只 x 次，難以得知如何求出正確的 r 值。因此這方面的研究還需要其他性質或方法的應用，目前沒有成果。

2. 在奇數維度中，$\forall\,v\in V(Q_n)$ ，有 $\delta_0(v)+\delta_1(v)\equiv 0(\bmod 2)$，性質一不再適用，亦即不論是否為控制點，$v$ 都不一定需被解決。這使得我們只能定義控制點也被解決，且只能求出其理論上解決的次數而非重複解決的次數，從而與探討重複控制次數的做法幾乎相同，目前也沒有成果。

4.2.3 與覆蓋碼（covering codes）的關係

在編碼理論中，覆蓋碼的定義如下。
$\forall\, q \geq 2, n \geq 1, R \geq 0$ ，$q, n, R \in \mathbb{Z}$，若一組編碼 C 滿足下頁的條件，則稱 C 為一組「長度為 n 、覆蓋半徑為 R 的 q 元覆蓋碼」，並以 $K_q(n, R)$ 表示滿足條件的 $|C|$ 之最小值：

1. $C \subseteq Q^n$ ，其中 $|Q| = q$ 。亦即 $\forall x \in C$ ，x 的長度為 n ，x 的每個位數皆屬於 $\{0, 1, \cdots, q-1\}$ 。
2. $\forall\, y \in Q^n$ ，$\exists\, x \in C$ 使得 x 和 y 的漢明碼距（Hamming distance）$d_H(x, y) \leq R$ 。
   亦即 x 與 y 相異的位數不超過 R 個。

可以發現當 $q = 2$ ，$R = 1$ ，求出一組長度為 n 、覆蓋半徑為 1 的二元覆蓋碼，便完全等價於求出一組超立方體的控制集，也就是說 $K_2(n, 1)$ 的下界即為 $\gamma(Q_n)$ 的下界。而且同樣的證明過程可以透過表示法的轉換，分別表示為編碼理論的觀點或是圖論的觀點。
由於我們習慣圖論的符號與定義，因此本文以圖論的觀點撰寫。然而在找尋學界資源時，我們發現大多數的文獻皆來自編碼理論的角度; 以超立方體說明之的文獻不僅不多，其中有的甚至不知道編碼理論的論文已得出更進一步的結果。
前年我們研究「超立方體最小控制集建構方式的探討」［10］時，就是因為不知道要以編碼理論的關鍵字進行搜尋，所以不知道此問題的最新發展。故我們在此特別點出這兩個問題間的對應性。

4.3 總結

本文提出「解決」與「重複解決」的概念，對於提升 $\gamma(Q_n)$ 的下界有應用的潛力，而且也在 $n \equiv 0(\bmod 6)$ 的情況中獲得成功。但是這種作法尚需要其他性質或想法的配合，才能排除不利於證明的情況，也才有機會在其他的維度中做出突破。

5 參考資料

1. Laurent Habsieger (1997). Binary codes with covering radius one: Some new lower bounds. Discrete Mathematics, 176, 115-130.
2. Gerzson Kéri (2011). Tables for bounds on covering codes. Retrieved March 7, 2020, from http://old.sztaki.hu/~keri/codes/.
3. Gerzson Kéri (2017). Lefedő Kódok kérdései: Optimális vagy optimálishoz közeli lefedő kódok szerkesztésének módszertana, története, egyéb vonatkozásai, adatbázisa (1st ed.)(pp. 66 - 69). Beau Bassin: GlodeEdit.
4. Wolfgang Haas (2013). On the general excess bound for binary codes with covering radius one. Discrete Mathematics, 313, 2751-2762.
5. Gerard D. Cohen, Antoine C. L Lobstein, N. J. A. Sloane (1986). Further Results on the Covering Radius of Codes. IEEE Transactions On Information Theory, Vol. 32, No.5, 680-694.
6. Gerard J. M. Van Wee (1988). Improved Sphere Bounds on the Covering Radius of Codes. IEEE Transactions On Information Theory, Vol. 34, No.2, 31-49.
7. L. T. Wille (1996). New Binary Covering Codes Obtained by Simulated Annealing. IEEE Transactions On Information Theory, Vol. 42, No.1, 300-302.
8. Patric R. J. Östergård (2001). On the size of Optimal Binary Codes of Length 9 and Covering Radius 1. IEEE Transactions On Information Theory, Vol. 47, No.6, 2556-2557.
9. Karp's 21 NP-complete problems. Wikipedia. Retrieved July 22, 2021, from https://en.wikipedia.org/wiki/Karp%27s_21_NP-complete_problems.
10. 吳映賢 (2020)，超立方體最小控制集建構方式的探討，2020 臺灣國際科學展覽會數學科，未出版，台北市。