

# 列表著色可約構形之建構法

臺北市立第一女子高級中學 王嵐  
指導老師：楊宗穎

## Abstract

Graph coloring is an obvious study of modern mathematics, and list coloring is the generalization of graph coloring, many studies are devoted to explore various sufficient conditions to make graphs complete list coloring. In the proof process of mathematical induction, it is often necessary to use the concept of "reducible configuration" to simplify the graph, further to ensure the graph can be list coloring. A directed graph is a graph with directionality on the edges. Our study is to use orientations of the graph on the edge to create a polynomial with multiple variables, apply the Pigeonhole principle to the algebraic expression, and prove the existence of the list coloring method by seeking the possibility of the polynomial function value being non-zero, and can procedurally design a series of reducible configurations and algorithms in list coloring.

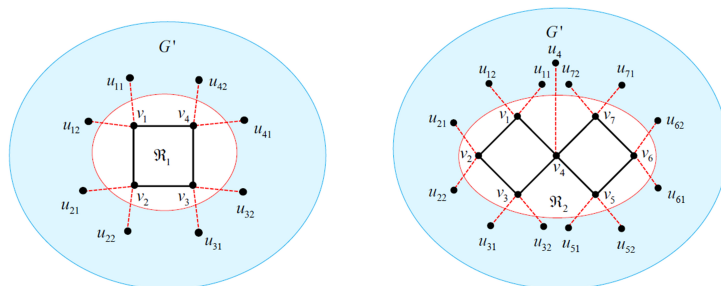
## 中文摘要

圖的著色問題為現代數學的一門顯學，而列表著色為一般著色問題的推廣，許多研究皆致力在探討各式的充分條件，使得圖可以完成列表著色。在數學歸納法的證明過程中，經常需要利用『可約構形』的概念來化簡圖形，進而確保能完成圖的列表著色。若圖在邊上具有方向性，則稱此圖為有向圖。我們的研究是利用圖在邊上的定向關係，創造一個多變數的多項式，在代數式上運用鴿籠原理，藉著尋求多項式函數值為非零值的可能，證明列表著色方法的存在性，並能有程序性的設計一系列在列表著色中的可約構形與演算法。

## 1 簡介 (Introduction)

### 1.1 研究動機

在專題研究的課程中，專研老師介紹了許多離散數學相關的研究問題，從中我們習得了一些『圖論 *Graph Theory*』的基礎知識，其中有關『著色問題』更是讓我們感到印象深刻，從平面圖  $G$  的歐拉特徵數關係  $(|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2)$ ，可推得任意平面圖  $G$  的邊皆具有上界，關係式為  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ ，其中  $V(G)$ 、 $E(G)$  與  $F(G)$  分別代表平面圖  $G$  的點集合、邊集合與面集合。從中可得知任意平面圖  $G$  必存在一個點  $v \in V(G)$  滿足  $v$  至多連 5 條邊 ( $d(v) \leq 5$ )，由此得知平面圖的『六色定理(任意平面圖皆可用六個顏色完成點著色)』。接著透過數學歸納法與反證法，即可證明『五色定理(任意平面圖皆可用五個顏色完成點著色)』。然而最後登場的『四色定理』更是讓我們感到讚嘆，一個容易理解的命題，證明竟然是如此難以理解，以目前有的證明尚須仰賴計算機的幫助才能得證。這讓我們對著色問題產生極大的興趣。在文獻探討時，我們閱讀了 2017 年臺灣國際科學展覽會，數學科大會一等獎『平面圖的四元列表著色』的作品說明書〔參考文獻 1〕，從中瞭解了著色問題的進階版本，稱為『列表著色』，作品中指出若平面圖滿足 (1) 任意兩個 3-cycle 最多共用一個點；(2) 任意兩個 4-cycle 最多共用一個點；(3) 不存在一個圈，使得圈的各邊皆與 3-cycle 相鄰；此三個條件為平面圖可四元列表著色的充分條件。其中在數學歸納法的證明過程中，最小反例不會包含下列兩種結構：



此兩種結構分別稱為  $\mathfrak{R}_1$ -subgraph 與  $\mathfrak{R}_2$ -subgraph，兩者除了皆為原圖  $G$  的一個子圖以外，其中每個點所連出邊的數量亦有限制，當最小反例  $G$  將此結構的點刪除後，所得點數較小的圖形為  $G'$ ，因為  $G'$  不是最小反例，因此  $G'$  必可完成列表著色，然而在獲得  $G'$  的列表著色後，將此兩種結構還原為原圖  $G$  中，在  $G'$  已獲得的列表著色狀態下，此兩種結構亦能完成列表著色，使得原圖  $G$  也存在列表著色的可能，此與  $G$  為最小反例矛盾，則表示最小反例不存在，進而完成定理的證明。我們特別將這樣特殊的結構稱為『可約構形』，因此可約構形不僅是圖的一種部分結構，其每個點的度數也是構形裡的重要資訊，方便我們在證明的過程中可以化簡圖形。我們本篇文章的研究重點是，希望可以有程序性的，能設計出一系列的可約構形，使得未來在探討著色問題時可以有足夠的資訊完成相關的證明。

## 1.2 研究目的

給定  $n$  元  $k$  次複數系多項式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其中  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  為最高次項。運用鴿籠原理可知，『若  $A_i \subseteq \mathbb{C}$ ， $|A_i| \geq k_i + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，則必存在  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，使得函數值  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ 』。給定圖  $G$ ， $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，將邊賦予方向性則可得  $G$  的一個定向，稱為有向圖  $D_G$ ，其中點  $v_i$  在有向圖  $D_G$  中指出去的箭頭數稱為外度數，記為  $d_{D_G}^+(v_i) = d_i$ ，將  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  記為  $D_G$  的『外度數序列』。將  $G$  所有外度數序列所形成的集合記為  $Out(G)$ 。定義  $f_{D_G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{(v_i, v_j) \in E(D_G)} (x_i - x_j)$ ，稱  $f_{D_G}$  為  $D_G$  的

『圖多項式』， $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  為  $f_{D_G}$  的『特殊項』。考慮  $D_G$  中頂點集合相同的子圖  $D_H$ ，若對任意  $v \in V(D_H)$ ，皆滿足  $d_{D_H}^+(v) = d_{D_G}^+(v)$ ，則稱  $D_H$  為『歐拉有向子圖』。根據  $|E(D_H)|$  的奇偶性，將  $D_G$  所有的歐拉有向子圖分成兩類，令  $\varepsilon_{even}(D_G)$  與  $\varepsilon_{odd}(D_G)$  分別為  $D_G$  中所有『歐拉偶子圖』與『歐拉奇子圖』所形成的集合。若  $|\varepsilon_{even}(D_G)| \neq |\varepsilon_{odd}(D_G)|$ ，則稱  $D_G$  為  $G$  的一個『歐拉定向』。以下為我們的研究目的：

- (1) 利用有向圖  $D_G$  的  $\varepsilon_{even}(D_G)$  與  $\varepsilon_{odd}(D_G)$  的數量，刻畫  $f_{D_G}$  中特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數；
- (2) 給定圖  $G$ ，探討不同定向  $D_1$  與  $D_2$  在歐拉有向子圖數量上的定量關係；
- (3) 利用圖  $G$  所有的外度數序列  $Out(G)$ ，刻畫  $f_{D_G}$  展開式中每一項的係數；
- (4) 利用圖  $G$  的定向  $D_G$ ，設計列表數量函數  $\ell$ ，使其能完成  $\ell$ -列表著色；
- (5) 令圖  $H$  與圖  $K$  皆存在歐拉定向，則研究透過  $H$  與  $K$  建構  $G$  的可約構形。

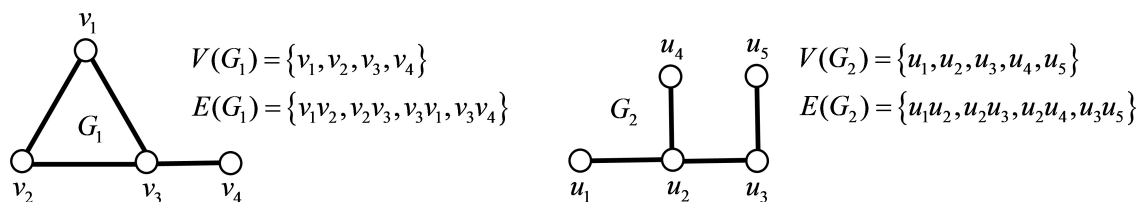
## 2 研究內容 (Main Body)

### 2.1 基本概念、名詞解釋與先備知識

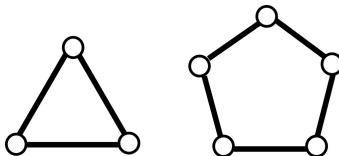
有關『可約構形』的設計，我們欲探討出具有程序性的建構方法，研究過程中，為了清楚的表達我們的成果，我們必須學習一些相關的數學知識，其中涉及到許多圖論的符號與基本概念，太多的記號方法我們參考了 Gary Chartrand 等人著作的《Graphs and Digraphs》與 Douglas B. West 著作的《Introduction to Graph Theory》這兩本圖論書籍〔參考文獻 3、7〕。為了能夠順暢的呈現論述的過程，我們亦需要設計一些數學符號來說明如何建構可約構形。以下我們將介紹研究題目以及所需的先備知識。

#### 2.1.1 圖與圖的概念

給定若干點，若點與點之間有關係則用一條邊相連，由點與邊所組合而成的結構稱為一個『圖』，令集合  $V(G)$  為圖  $G$  所有的頂點，集合  $E(G)$  為圖  $G$  所有的邊，此外我們將點與邊的數量分別記為  $|V(G)|$  與  $|E(G)|$ 。對於兩個不同的頂點  $u, v \in V(G)$ ，若頂點  $u, v$  之間有邊連結，則將此邊記為  $uv$ ，意即  $uv \in E(G)$ 。以左下圖  $G_1$  為例， $G_1$  的頂點集合為  $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊集合為  $E(G_1) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1, v_3 v_4\}$ ，其中  $|V(G_1)| = 4$  與  $|E(G_1)| = 4$ 。以右下圖  $G_2$  為例， $G_2$  的頂點集合為  $V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ，邊集合為  $E(G_2) = \{u_1 u_2, u_2 u_3, u_2 u_4, u_3 u_5\}$ ，其中  $|V(G_2)| = 5$  與  $|E(G_2)| = 4$ 。



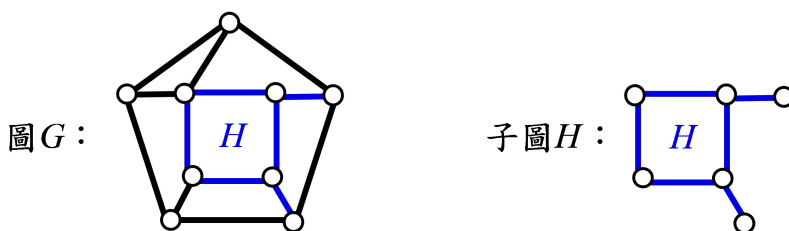
若一個圖  $G$  的頂點與邊恰好形成一個環狀圖形，我們特別將此類型的圖稱為『**圈 (cycle)**』。



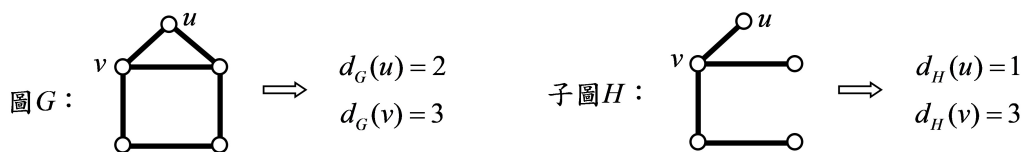
給定圖  $G$ ，若  $v \in V(G)$  且  $v$  與自己有邊相連，則稱此邊為『**迴圈 (loop)**』，記為  $vv \in E(G)$ ；若兩點  $u, v$  之間的邊稱為『**重邊 (multiple edges)**』，則表示  $u, v$  兩點之間有兩條以上的邊。若圖  $G$  的結構中沒有迴圈與重邊，則稱  $G$  為『**簡單圖 (simple graph)**』。以下我們研究中討論的圖皆為簡單圖。

### 2.1.2 子圖與點的度數

給定圖  $G$ ，若將圖  $G$  中某些點或某些邊刪除後可得另一個結構較小的圖  $H$ ，則稱  $H$  為  $G$  的『**子圖 (subgraph)**』，意即  $H$  為  $G$  的內部子結構所形成的圖形。例如：參考左下圖  $G$ ，其中右下圖  $H$  即為  $G$  的一個子圖。

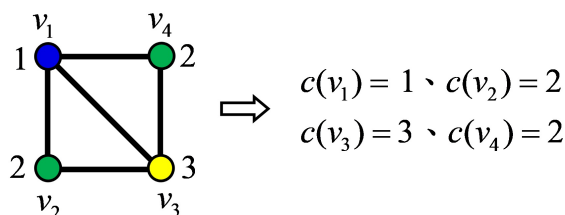


對於一般簡單圖  $G$ ，考慮頂點  $v \in V(G)$ ，若  $v$  恰與  $k$  個點有邊相連，則稱頂點  $v$  的『**度數 (degree)**』為  $k$ ，亦稱  $v$  為『 **$k$ -vertex**』，並記為『 $d_G(v) = k$ 』。考慮所有與  $v$  相鄰的頂點所形成的集合，記為『 $N_G(v)$ 』，換句話說  $|N_G(v)| = d_G(v)$ 。例如：考慮下圖  $G$ ， $d_G(u) = 2$ ， $d_G(v) = 3$ ；考慮下圖  $H$ ， $d_H(u) = 1$ ， $d_H(v) = 3$ 。



### 2.1.3 圖的著色數

給定圖  $G$ ，令  $V(G)$  為頂點集合，給定函數  $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，若對任意的邊  $uv \in E(G)$ ，函數  $c$  皆滿足  $c(u) \neq c(v)$ ，則稱函數  $c$  為圖  $G$  的一個『**著色函數 (proper coloring)**』。若圖  $G$  存在著色函數  $c: V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  『**著色 ( $k$ -colorable)**』，我們亦稱函數  $c$  為『 **$k$ -著色函數 ( $k$ -coloring)**』。不難得知，若圖  $G$  是  $k$ -colorable，則  $G$  必然也為  $(k+1)$ -colorable。對任意的圖  $G$ ，可知  $G$  必然為  $|V(G)|$ -colorable。因此對於圖形的著色問題，研究的重點為：能使得  $G$  是  $k$ -colorable 的最小自然數  $k$  為何？若  $k$  為最小自然數能使得圖  $G$  是  $k$ -colorable，則稱  $k$  為  $G$  的『**著色數 (chromatic number)**』，以符號記為『 $\chi(G)$ 』。這表示  $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是 } k\text{-colorable}\}$ 。

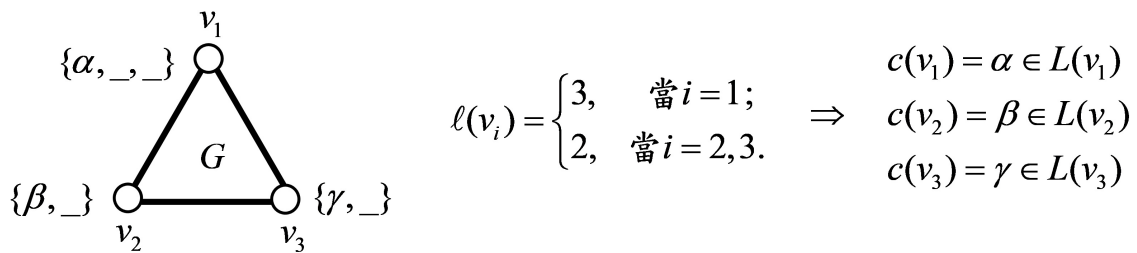


### 2.1.4 列表著色 $\ell$ -choosable

有關列表著色的相關知識，我們參考了『平面圖的四元列表著色』一文〔參考文獻1〕。令  $2^{\mathbb{N}}$  為所有自然數  $\mathbb{N}$  的子集所形成的集合，對於圖  $G$ ，考慮函數  $L: V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，我們稱函數  $L$  為圖  $G$  的『顏色列表函數 (list assignment)』。對於  $v \in V(G)$ ， $L(v)$  稱為頂點  $v$  的『顏色列表 (color list)』。給定顏色列表函數  $L$ ，若圖  $G$  存在著色函數  $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其中對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $c(v) \in L(v)$ ，則稱此著色函數  $c$  為圖  $G$  的一個『 $L$ -列表著色 ( $L$ -coloring)』。

給定圖  $G$ ，若顏色列表函數  $L$ ，對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $|L(v)| = k$ ，則稱此顏色列表函數  $L$  為『 $k$ 元列表函數 ( $k$ -list)』。若對於任意  $k$ 元列表函數  $L$ ，圖  $G$  皆可存在  $L$ -coloring，則稱圖  $G$  為『可  $k$ 元列表著色 ( $k$ -choosable)』。若  $k$  為最小的自然數，使得圖  $G$  為  $k$ -choosable，則稱圖的『列表著色數 (choosability)』為  $k$ ，並記為『 $\chi_{\ell}(G) = k$ 』，意即  $\chi_{\ell}(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是 } k\text{-choosable}\}$ 。廣義的情況下，令  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ， $\ell(v)$  表示點  $v$  可使用的顏色數量，稱函數  $\ell$  為圖  $G$  的『列表數量函數』，特別情況下亦將列表數量函數記為『 $\ell_G$ 』。若顏色列表函數  $L$ ，對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $|L(v)| = \ell(v)$ ，則稱此顏色列表函數  $L$  為『 $\ell$ -列表 ( $\ell$ -list)』。若對於任意  $\ell$ -列表  $L$ ，圖  $G$  皆可存在  $L$ -coloring，則稱圖  $G$  為『可  $\ell$ -列表著色 ( $\ell$ -choosable)』。俄羅斯數學家 Vizing 首度提出列表著色的概念，同時 Erdős，Rubin 與 Taylor 等學者亦獨立發表列表著色的概念於期刊論文中〔參考文獻4，6〕。

例如：參考下圖  $G$ ，令  $\ell$ -列表為  $\ell(v_1) = 3$  且  $\ell(v_2) = \ell(v_3) = 2$ 。對任意  $\ell$ -列表  $L$ ，令  $\gamma \in L(v_3)$ 、 $\beta \in L(v_2) \setminus \{\gamma\}$ ，因為  $|L(v_1)| = 3$ ，所以  $L(v_1) \setminus \{\beta, \gamma\} \neq \emptyset$ ，故存在  $\alpha \in L(v_1) \setminus \{\beta, \gamma\}$ 。令  $c(v_1) = \alpha$ ， $c(v_2) = \beta$  與  $c(v_3) = \gamma$ ，可知函數  $c$  必為  $G$  的  $L$ -coloring。因此  $G$  為可  $\ell$ -列表著色。



## 2.2 組合零點定理

對於一個圖，其結構為點與邊的關係，若適當的將點與邊的關係代數化，利用一個代數式來表現圖的結構，在探討著色問題時，利用代數式則可幫助我們判斷是否為一個合理的著色方式。以下將介紹我們如何將一個圖轉換為一個多項式。

### 2.2.1 圖多項式

給定圖  $G$ ，頂點集合為  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，邊集合為  $E(G)$ ，其中  $|V(G)| = n$  與  $|E(G)| = k$ 。將每一個頂點  $v_i \in V(G)$  對應一個變數  $x_i$ ；若  $v_i$  與  $v_j$  有邊相連 ( $v_i v_j \in E(G)$ )，則將邊  $v_i v_j$  對應一個代數式  $(x_i - x_j)$ 。將  $G$  所有的邊所對應的代數式全部相乘，則可得代數式

$$\prod_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)。$$

令函數  $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  為圖  $G$  的一個著色函數，若  $c(v_i) = \alpha_i \in \mathbb{N}$ ，則將變數  $x_i$  用  $\alpha_i$  的值代入。因為對任意邊  $v_i v_j \in E(G)$ ，可知  $c(v_i) = \alpha_i \neq \alpha_j = c(v_j)$ ，所以將  $x_i$  與  $x_j$  分別用  $\alpha_i$  與  $\alpha_j$  的值代入  $(x_i - x_j)$  時，其值  $(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$ 。由此可知，對任意  $i = 1 \sim n$ ，將  $x_i$  用  $\alpha_i$  代入

$$\prod_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j) \text{ 後其值非零，意即 } \prod_{v_i v_j \in E(G)} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0。$$

對於圖  $G$ ，定義  $f_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)$ ，可知  $f_G$  為一個  $n$  元  $k$  次多項

式，稱  $f_G$  為  $G$  的『圖多項式』，圖多項式  $f_G$  能直接反映  $G$  的結構，可視為圖  $G$  的一種代數表現。若存在  $n$  元序列  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  能使得函數值  $f_G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ ，則圖  $G$  存在一個著色函數  $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其中  $c(v_i) = \alpha_i$ ， $i = 1 \sim n$ ，反之亦然。



### 圖多項式的定義與著色函數

1. 給定圖  $G$ ，定義  $G$  的圖多項式為  $f_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)$ 。
2. 存在  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  使得  $f_G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$   
 $\Leftrightarrow$  令  $c(v_i) = \alpha_i$ ， $i = 1 \sim n$ ， $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  即為圖  $G$  的一個著色函數。

### 2.2.2 鴿籠原理與代數基本定理的相遇

代數基本定理經推廣後可得知『任何複數系一元  $n$  次多項式方程式皆至多有  $n$  個相異的複數根』。令集合  $\mathbb{C}$  為所有複數，所有複數系一元多項式所成的集合記為  $\mathbb{C}[x]$ ，若  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ，則  $\deg(f(x))$  記為  $f(x)$  中變數  $x$  的最高指數。當  $A$  為複數的子集合，以  $|A|$  表示集合內的元素個數。給定  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  且  $\deg(f(x)) = n$ ，我們從鴿籠原理的角度，重新詮釋代數基本定理對於方程式根數量的解讀：

**代數基本定理的推廣：**方程式  $f(x) = 0$  至多有  $n$  個相異的複數根。

**鴿籠原理的觀點：**給定集合  $A \subseteq \mathbb{C}$ ，若  $|A| \geq n + 1$ ，則必存在  $\alpha \in A$ ，使得  $f(\alpha) \neq 0$ 。

鴿籠原理的觀點意旨，因為多項式方程式的根的個數為有限，若集合  $A$  中的元素足夠多，根據鴿籠原理，可知  $A$  必然存在一個元素不為方程式的解。以組合的觀點延伸，我們可以從多項式的『次數』與『變數的個數』進行推廣。

### 2.2.3 $n$ 元 $k$ 次多項式的充分條件

令  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  為所有  $n$  元多項式所成的集合。若  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  為一個  $n$  元多項式，其中某一項  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  的係數不為零，則稱  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  的『**度數 (degree)**』為  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 。將所有項中最高的度數定義為  $\deg(f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ 。若  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  的係數不為零且度數恰為  $\deg(f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ，則稱此項為  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的一個『**最高次項**』。當  $\deg(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = k$  時，則稱  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  為『 **$n$  元  $k$  次多項式**』。

代數基本定理的鴿籠原理觀點，暗示著最高次項各變數的指數，決定集合內元素數量，方可存在函數值不為零的可能。對於  $n$  元  $k$  次多項式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，令  $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbb{C}$  且  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的積集合為  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 。以下定理將利用數學歸納法，說明最高次項中各變數的指數如何用來制訂集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  內元素的數量限制作為充分條件，方能存在  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  使得  $f$  的函數值  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ 。透過多項式長除法的概念，利用除法原理進行商式跟餘式的討論，可得  $n$  元  $k$  次多項式函數值不為零的充分條件：

#### 定理 1 (組合零點定理 Combinatorial Nullstellensatz).

令  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ，其中  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  為最高次項， $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbb{C}$ 。

若  $|A_i| \geq k_i + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，則必存在  $n$  元序列  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，使得函數值  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ 。

定理 1 稱為『**組合零點定理**』，是由以色列數學家 Noga Alon 於 1999 年發表的論文中所提出的定理〔參考文獻 2〕。於 2010 年時，Mateusz Michałek 提出了一個簡單的證明版本〔參考文獻 5〕。以下我們透過範例來呈現組合零點定理在列表著色上的應用。

例如：

考慮圖  $G$ ，頂點集合為  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊集合為  $E(G) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_1 v_4, v_1 v_3\}$ 。將每一條邊轉換成二元一次多項式  $(x_1 - x_2)$ 、 $(x_2 - x_3)$ 、 $(x_3 - x_4)$ 、 $(x_1 - x_4)$  與  $(x_1 - x_3)$ ，則圖  $G$  可得四元五次多項式  $f_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_1 - x_4)(x_1 - x_3)$ 。令  $A_1, A_2, A_3, A_4$  分別為  $x_1, x_2, x_3, x_4$  可取值的集合，由定理 1 可知下列結論：

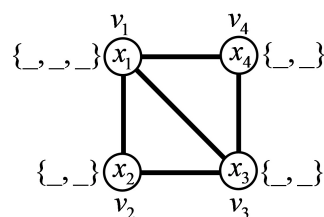
考慮最高次項  $x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ 。

因為  $x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$  的係數不為零，可知當  $|A_1| \geq 3$ 、 $|A_2| \geq 2$ 、 $|A_3| \geq 2$ 、 $|A_4| \geq 2$  時，則存在  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$  使得多項式  $f_G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq 0$ 。這表示若函數  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  定義為  $\ell(v_1) \geq 3$ 、 $\ell(v_2) \geq 2$ 、 $\ell(v_3) \geq 2$ 、 $\ell(v_4) \geq 2$ ，則圖  $G$  亦為可  $\ell$ -列表著色(如下圖所示)。

$$f_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)$$

考慮最高次項  $x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

$$\Leftrightarrow |A_i| \geq \begin{cases} 3, & \text{當 } i=1; \\ 2, & \text{當 } i=2,3,4. \end{cases} \Leftrightarrow$$



利用定理 1 的結論，對於圖  $G$ ，將鴿籠原理運用在代數式中的變數，我們可以透過圖多項式  $f_G$  的最高次項，觀察最高次項中各變數的指數，用以來設計列表數量函數  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，使得  $G$  為可  $\ell$ -列表著色。

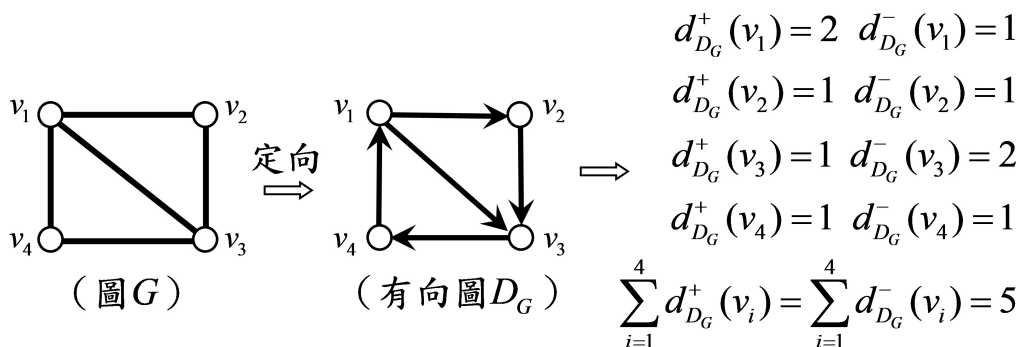
## 2.3 有向圖與最高次項的係數關係

給定圖  $G$ ，因為圖多項式  $f_G$  的一次因式皆沒有常數項，所以  $f_G$  以分配律展開後的每一項，若同類項的係數不為零，則必為最高次項。以下我們將說明，如何運用圖的定向關係來判斷  $f_G$  最高次項的係數，藉以確認該項的存在性，意即該項的係數不為零。

### 2.3.1 有向圖

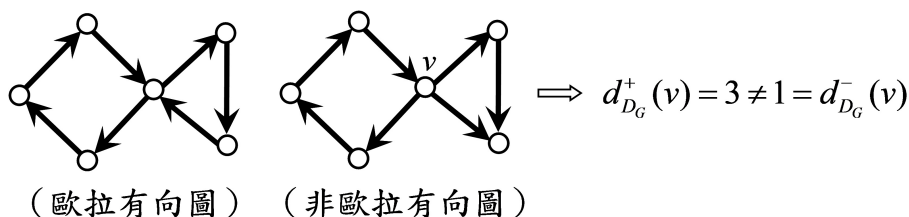
給定圖  $G$ ，若將  $G$  所有的邊賦予方向性，則所得的圖形稱為『有向圖』。將此有向圖記為  $D_G$ ，或簡稱  $D_G$  為圖  $G$  的一個『定向 (orientation)』，其中有向圖  $D_G$  的頂點  $V(D_G) = V(G)$ 。若  $u, v \in V(D_G)$ ，且在  $D_G$  中有向邊為  $u$  指向  $v$ ，則將此有向邊記為序對『 $(u, v) \in E(D_G)$ 』，而  $E(D_G)$  即為  $D_G$  中有向邊所形成的集合。將  $D_G$  所有的邊交換方向後所形成的有向圖記為『 $D_G^{-1}$ 』。此外，對於  $u \in V(D_G)$ ，在有向圖  $D_G$  中考慮所有  $u$  指出去的有向邊，其中將  $u$  指向的點所形成的點集合記為『 $N_{D_G}^+(u)$ 』，意即  $N_{D_G}^+(u) = \{v \in V(D_G) : (u, v) \in E(D_G)\}$ 。若點  $u$  指向外的有向邊共有  $k$  條，則稱  $k$  為  $u$  的『外度數 (out-degree)』，記為『 $d_{D_G}^+(u) = k$ 』；若指向點  $u$  的有向邊共有  $k$  條，則稱  $k$  為  $u$  的『內度數 (in-degree)』，記為『 $d_{D_G}^-(u) = k$ 』。

不難得知， $\sum_{u \in V(D_G)} d_{D_G}^+(u) = \sum_{u \in V(D_G)} d_{D_G}^-(u) = |E(D_G)|$ ，也就是說所有點的外度數總和與內度數總和兩者皆為有向邊的數量。

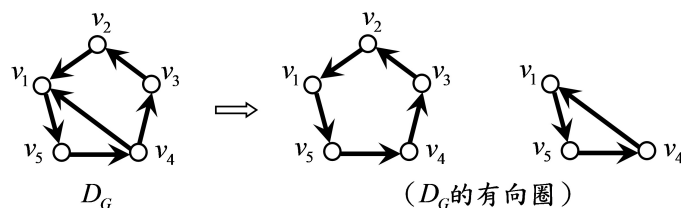


### 2.3.2 歐拉有向圖

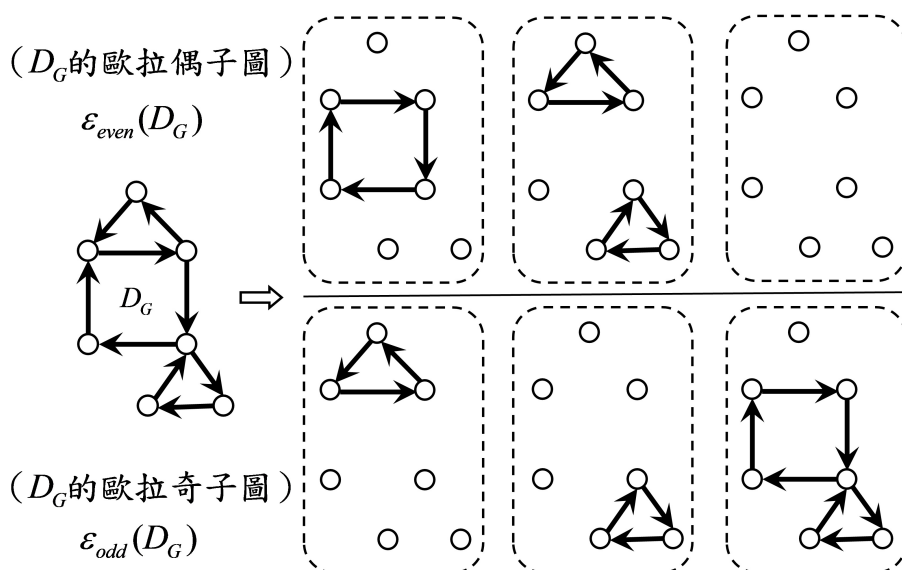
若有向圖  $D_G$  的任意點  $v$  皆滿足  $d_{D_G}^+(v) = d_{D_G}^-(v)$ ，則稱  $D_G$  為『歐拉有向圖』。



給定有向圖  $D_G$ ，令  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\} \subseteq V(D_G)$  為  $k$  個相異點， $k \geq 3$ ，其中  $\{(v_{i_p}, v_{i_{p+1}}) : p = 1 \sim k-1\} \cup \{(v_{i_k}, v_{i_1})\}$  皆為  $E(D_G)$  中的有向邊，則將此  $k$  條有向邊所形成的圖形稱為『有向圖 (directed cycle)』。



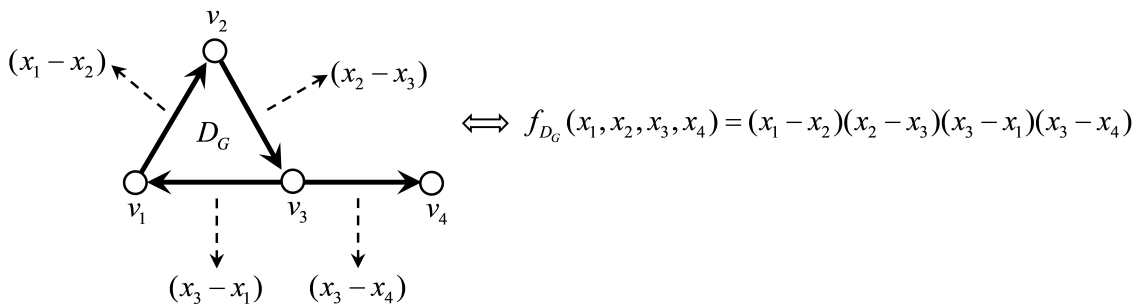
若  $D_H$  為歐拉有向圖，其中  $V(D_H) = V(D_G)$ ， $E(D_H) \subseteq E(D_G)$ ，則稱  $D_H$  為  $D_G$  的『歐拉有向子圖』，並將  $D_G$  所有歐拉有向子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}(D_G)$ 』。特別的，若  $D_H$  的有向邊數量  $|E(D_H)|$  為偶數，則稱  $D_H$  為『歐拉偶子圖』；若  $D_H$  的有向邊數量  $|E(D_H)|$  為奇數，則稱  $D_H$  為『歐拉奇子圖』。我們將所有歐拉偶子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}_{\text{even}}(D_G)$ 』；將所有歐拉奇子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_G)$ 』。下圖範例的  $D_G$  所有的子圖中，共有 6 個歐拉有向子圖，依照歐拉有向子圖邊數量的奇偶性， $D_G$  共有 3 個歐拉偶子圖與 3 個歐拉奇子圖，意即  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_G)| = 3$ ， $|\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_G)| = 3$ 。



### 2.3.3 有向圖多項式與特殊項的係數

給定有向圖  $D_G$ ，令頂點集合  $V(D_G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，將  $D_G$  中的有向邊  $(v_i, v_j)$  對應一個二元一次多項式  $(x_i - x_j)$ ，則考慮所有的有向邊，將所有對應的二元一次多項式相乘，可以將有向圖  $D_G$  對應一個  $n$  元多項式  $f_{D_G}(x_1, x_2, x_3, x_n) = \prod_{(v_i, v_j) \in E(D_G)} (x_i - x_j)$ ，我們稱  $f_{D_G}$  為

$D_G$  的『有向圖多項式』，亦可簡稱為圖多項式。因為  $f_{D_G}$  為  $|E(D_G)|$  個二元一次多項式的乘積，故  $f_{D_G}$  即為  $n$  元  $|E(D_G)|$  次多項式。我們可以將圖多項式  $f_{D_G}$  視為有向圖  $D_G$  的一種代數表現。

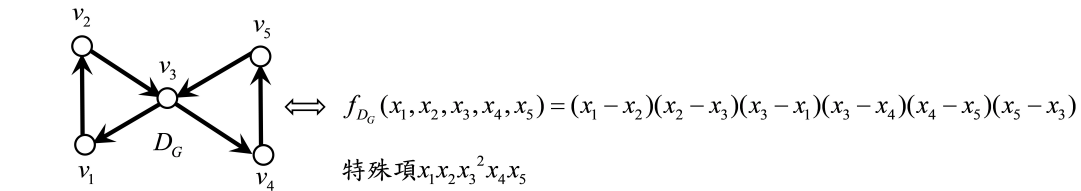


令  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  為相異  $k$  個數，若  $(x_{i_1} - x_{i_2})(x_{i_2} - x_{i_3}) \cdots (x_{i_{k-1}} - x_{i_k})(x_{i_k} - x_{i_1})$  為  $f_{D_G}$  的因式，則稱  $(x_{i_1} - x_{i_2})(x_{i_2} - x_{i_3}) \cdots (x_{i_{k-1}} - x_{i_k})(x_{i_k} - x_{i_1})$  為  $f_{D_G}$  的『循環因式』。

因為圖多項式  $f_{D_G}$  為齊次，所以  $f_{D_G}$  展開後的每一項皆為最高次項。對  $i = 1, 2, \dots, n$ ，令點  $v_i$  的外度數  $d_{D_G}^+(v_i) = d_i$ ，我們稱  $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  為  $f_{D_G}$  的『特殊項』，欲考慮

特殊項『 $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$ 』在  $f_{D_G}$  展開式中的係數。因為一個圖的定向將決定各點的外度數序列  $d_1, d_2, \dots, d_n$ ，所以不同的定向，將決定不同的特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$ ，可以預期此特殊項在  $f_{D_G}$  中的係數應與此定向有密切的關聯性。以下我們透過例子來觀察  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  在  $f_{D_G}$  中的係數，並試圖刻畫係數與定向的特徵。

**例 1：**令  $D_G$  如下圖所示，其中  $f_{D_G}$  共有兩個循環因式，分別為  $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$  與  $(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_3)$ 。這兩個沒有交集的循環因式，個別都會在分配律的過程當中影響著特殊項  $x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5$  的係數。



每一個循環因式在分配律中都有兩種變化，因此分配律中可得 4 回特殊項  $x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5$ ，其係數分別貢獻為兩個 1 與兩個 -1，所以  $f_{D_G}$  中特殊項  $x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5$  的係數則為 0。

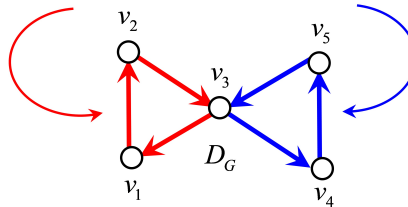
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 分配律可得特殊項                                                                                                                                                                                         | 貢獻係數                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \times (x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -x_2 & -x_3 & -x_1 & -x_4 & -x_5 & -x_3 \end{matrix}$ | $\Rightarrow (x_1 x_2 x_3)(x_3 x_4 x_5)$<br>$\Rightarrow (-x_1)(-x_2)(-x_3)(x_3 x_4 x_5)$<br>$\Rightarrow (x_1 x_2 x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$<br>$\Rightarrow (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$ | $\Rightarrow +1$<br>$\Rightarrow -1$<br>$\Rightarrow -1$<br>$\Rightarrow +1$ |

由上述例子中可發現，在圖多項式的展開式中，會影響到特殊項係數的因素有兩點，分別為『循環因式中一次式數量的奇偶性』與『不同循環因式的組合』。兩者之間仍須相互考量，即能分析出特殊項的係數。以下我們將進一步探討，並建立係數與定向的對應關係。

### 2.3.4 歐拉有向子圖決定特殊項的係數

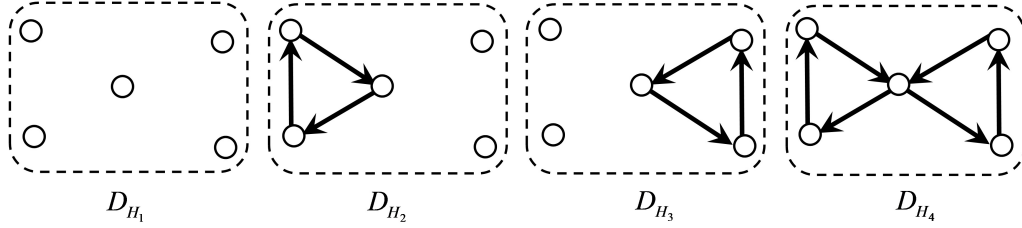
因為圖多項式  $f_{D_G}$  直接反應有向圖  $D_G$  的定向結構，可知  $f_{D_G}$  中的循環因式皆可對應  $D_G$  的一個歐拉有向圖。

$$f_{D_G}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_3)$$



由於  $D_G$  中各種有向圖的組合，將構成一個歐拉有向子圖，因此  $f_{D_G}$  中循環因式的各種組合，將可與  $D_G$  所有的歐拉有向子圖  $\varepsilon(D_G)$  建立一一對應關係。

令  $D_G$  為上述例子的圖來說明， $D_G$  共有 4 個歐拉有向子圖，記為  $\{D_{H_i} : i = 1, 2, 3, 4\}$ ，其中  $D_{H_1}, D_{H_4} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_G)$ ， $D_{H_2}, D_{H_3} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_G)$ ，如下圖所示：



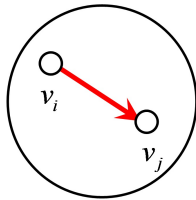
從中可發現  $D_G$  的一個歐拉偶子圖將對應  $f_{D_G}$  分配律中貢獻係數為 1 的情形；一個歐拉奇子圖將對應  $f_{D_G}$  分配律中貢獻係數為 -1 的情形。因為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| = 2$  且  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)| = 2$ ，所以特殊項  $x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5$  的係數可視為  $1 \times |\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| + (-1) \times |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)| = 0$ 。由此可知，『 $f_{D_G}$  特殊項的係數』可由『 $D_G$  的歐拉有向子圖』來刻畫。

| 分配律可得特殊項                               | 歐拉有向子圖                                            | 貢獻係數      |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------|
| $(x_1 x_2 x_3)(x_3 x_4 x_5)$           | $\iff D_{H_1} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_G)$ | $\iff +1$ |
| $(-x_1)(-x_2)(-x_3)(x_3 x_4 x_5)$      | $\iff D_{H_2} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_G)$  | $\iff -1$ |
| $(x_1 x_2 x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$      | $\iff D_{H_3} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_G)$  | $\iff -1$ |
| $(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$ | $\iff D_{H_4} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_G)$ | $\iff +1$ |

歐拉有向子圖  $D_H$

圖多項式  $f_{D_G}$

貢獻  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  係數



$$\iff ( ) ( ) \cdots (x_i - x_j) \cdots ( ) \iff (-1)^{|E(D_H)|} = \begin{cases} 1 & , D_H \in \varepsilon_{\text{even}}(D_G) \\ -1 & , D_H \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_G) \end{cases}$$

給定向圖  $D_G$ ，對於  $D_G$  的一個歐拉有向子圖  $D_H$ ，若  $(v_i, v_j) \in E(D_H)$ ，則在圖多項式  $f_{D_G}$  的展開過程中，一次因式  $(x_i - x_j)$  使用後項  $(-x_j)$  作為分配律該式的乘法元素；反之，若  $(v_i, v_j) \notin E(D_H)$ ，則一次因式  $(x_i - x_j)$  使用前項  $(x_i)$  作為分配律該式的乘法元素。由此可知， $D_G$  的每一個歐拉有向子圖  $D_H$ ，將可對應  $f_{D_G}$  在分配律過程中對特殊項的貢獻係數，其中當  $D_H \in \varepsilon_{\text{even}}(D_G)$  時，則貢獻係數 1；當  $D_H \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_G)$  時，則貢獻係數 -1。

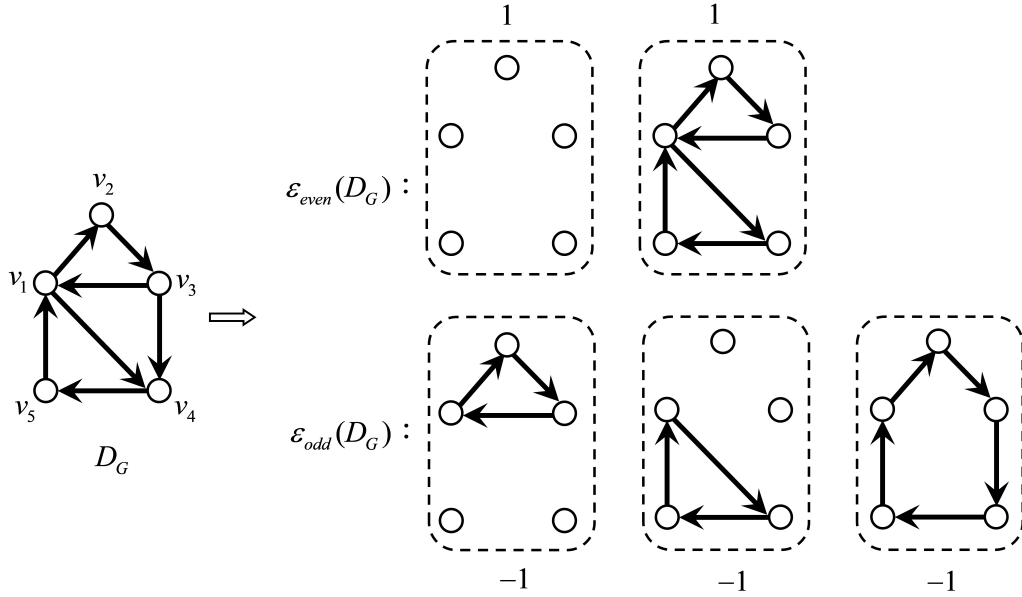
利用歐拉有向子圖來刻畫  $f_{D_G}$  特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  係數，建立『歐拉有向子圖』與『分配律中特殊項的貢獻係數』兩者一對一的對應關係，透過前面的推理得知以下定理：

**定理 2 (圖多項式的特殊項係數).**

有向圖  $D_G$ ， $V(D_G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，其中點  $v_i$  的外度數  $d_{D_G}^+(v_i) = d_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。圖多項式  $f_{D_G}$  中的特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  係數為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|$ 。



**例 2：**令  $D_G$  如下圖所示，因為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| = 2$ ， $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)| = 3$ ，所以根據上述定理可知  $f_{D_G}$  中的特殊項  $x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 x_5$  的係數為  $2 - 3 = -1$ 。



定理 2 說明著圖  $G$  的一個定向  $D_G$ ，將可用歐拉子圖來刻畫  $f_{D_G}$  中的特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  的係數。由於不同的定向，在有向圖多項式中僅影響二元一次式中變數的相減關係，譬如兩頂點  $v_i$  與  $v_j$ ，在不同的定向中有向邊可能為  $(v_i, v_j)$  或  $(v_j, v_i)$ ，則在圖多項式對應的二元一次式即為  $(x_i - x_j)$  或  $(x_j - x_i)$ ，兩者之間相差一個負號，意即  $(x_i - x_j) = (-1)(x_j - x_i)$ 。由此可知，兩個不同定向所得的圖多項式有很大的相關性。令  $D_1$  與  $D_2$  皆為圖  $G$  的定向，我們用符號  $\llbracket g(D_1, D_2) \rrbracket$  表示  $D_1$  與  $D_2$  相反方向的邊數量，意即  $g(D_1, D_2) = |E(D_1)| - |E(D_1) \cap E(D_2)|$ 。然而在固定一個有向圖  $D_G$  時， $f_{D_G}$  展開式中的任意一項，其係數應與其它的定向有特別的關係，因此我們有以下引理：

**引理 1 (相異定向與圖多項式的關係).**

給定圖  $G$ ，點集合  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。令  $D_1$  與  $D_2$  皆為  $G$  的定向，點  $v_i$  在有向圖  $D_1$  與  $D_2$  的外度數分別記為  $d_{D_1}^+(v_i) = d_i^{(1)}$  與  $d_{D_2}^+(v_i) = d_i^{(2)}$ ，其中  $i = 1, 2, \dots, n$ 。定義  $g(D_1, D_2) = |E(D_1)| - |E(D_1) \cap E(D_2)|$ ，則：

1.  $f_{D_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot f_{D_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ；
2.  $f_{D_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中  $x_1^{d_1^{(2)}} x_2^{d_2^{(2)}} \cdots x_n^{d_n^{(2)}}$  係數為  $(-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|)$ 。

*Proof.*

1. 對於圖  $G$ ，點集合  $V(D_G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，因為  $D_1$  與  $D_2$  為兩個不同的定向，我們考慮  $E(D_1)$  與  $E(D_2)$  的交集， $E(D_1) \cap E(D_2)$  表示  $D_1$  與  $D_2$  中相同方向的有向邊集合，可知  $D_1$  與  $D_2$  有向邊為相反方向的數量為  $g(D_1, D_2) = |E(D_1)| - |E(D_1) \cap E(D_2)|$ 。因為  $D_2$  中每一個與  $D_1$  相反方向的邊皆會造成  $f_{D_1}$  中對應的二元一次式變號，所以  $f_{D_1}$  與  $f_{D_2}$  共有  $g(D_1, D_2)$  個二元一次式為相差一個負號，即可知  $f_{D_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot f_{D_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。
2. 因為  $x_1^{d_1^{(2)}} x_2^{d_2^{(2)}} \cdots x_n^{d_n^{(2)}}$  為  $f_{D_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的特殊項，根據定理 2 的結論可知，特殊項  $x_1^{d_1^{(2)}} x_2^{d_2^{(2)}} \cdots x_n^{d_n^{(2)}}$  在  $f_{D_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中的係數為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ 。由引理 1 的結論 1 可知， $f_{D_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot f_{D_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，因此  $x_1^{d_1^{(2)}} x_2^{d_2^{(2)}} \cdots x_n^{d_n^{(2)}}$  在  $f_{D_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中的係數即為  $(-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|)$ 。

□

給定圖  $G$ ， $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令  $D$  為圖  $G$  的一個定向，點  $v_i$  在有向圖  $D$  的外度數分別記為  $d_D^+(v_i) = d_i$ ，其中  $i = 1, 2, \dots, n$ 。我們將  $n$  元序列  $\mathbb{I}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  稱為圖  $G$  以有向圖  $D$  決定的『外度數序列』，並以符號記為  $\mathbb{I}d(D) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 。定向  $D$  外度數序列  $d_1, d_2, \dots, d_n$  進而決定了特殊項為  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數，而定理 2 說明了可用歐拉子圖來刻畫特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數。對於圖  $G$  的兩個不同定向  $D_1$  與  $D_2$ ，若擁有相同的外度數序列，我們欲探討歐拉子圖之間的數量關係，進一步利用不同的定向來刻畫圖多項式展開的各項係數，我們首先推得以下引理：

**引理 2 (相異定向與歐拉有向子圖的定量關係).**

給定圖  $G$ ， $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。若  $D_1$  與  $D_2$  為圖  $G$  不同的定向且滿足  $d(D_1) = d(D_2)$  則：

1.  $E(D_1) - E(D_1) \cap E(D_2)$  所形成的圖為  $D_1$  的歐拉有向子圖；
2.  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|)$ ；
3.  $|\varepsilon(D_1)| = |\varepsilon(D_2)|$ ；
4. 當  $g(D_1, D_2)$  為偶數時， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_2)|$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ ；  
當  $g(D_1, D_2)$  為奇數時， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_2)|$ 。

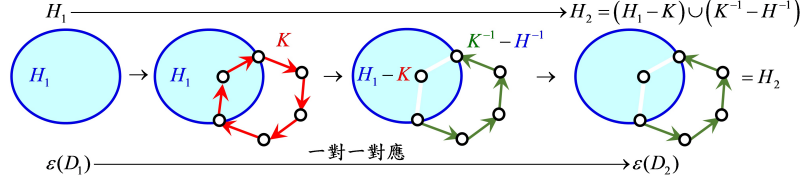
*Proof.*

1. 令  $D'_1$  為有向邊  $E(D_1) - E(D_1) \cap E(D_2)$  所形成  $D_1$  的有向子圖； $D'_2$  為  $E(D_2) - E(D_1) \cap E(D_2)$  所形成  $D_2$  的有向子圖，可知  $D'_1$  與  $D'_2$  的有向邊皆為相反方向，故對任意點  $v \in V(G)$ ， $d_{D'_1}^+(v) = d_{D'_2}^-(v)$  且  $d_{D'_1}^-(v) = d_{D'_2}^+(v)$ 。因為  $d(D_1) = d(D_2)$ ，所以對任意點  $v \in V(G)$ ， $d_{D'_1}^+(v) = d_{D'_2}^+(v)$  且  $d_{D'_1}^-(v) = d_{D'_2}^-(v)$ 。可知對任意點  $v \in V(G)$ ， $d_{D'_1}^+(v) = d_{D'_1}^-(v)$  且  $d_{D'_2}^+(v) = d_{D'_2}^-(v)$ ，意即  $D'_1$  與  $D'_2$  分別為  $D_1$  與  $D_2$  的歐拉有向子圖，此外  $D'_1$  與  $D'_2$  的有向邊皆為相反方向。
2. 令  $D_1$  與  $D_2$  為圖  $G$  不同的定向，因為  $d(D_1) = d(D_2)$ ，所以  $D_1$  與  $D_2$  擁有相同的外度數序列  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ，這表示  $f_{D_1}$  與  $f_{D_2}$  有相同的特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$ ，根據定理 2 可知特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  在  $f_{D_1}$  與  $f_{D_2}$  中的係數分別為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)|$  與  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ 。再根據引理 1 的結論 1 可知  $f_{D_1} = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot f_{D_2}$ ，由此可推得  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|)$ 。
3. 令  $K$  為  $E(D_1) - E(D_1) \cap E(D_2)$  所形成  $D_1$  的歐拉有向子圖。從  $D_1$  中任取一個歐拉有向子圖  $H_1$ ，以下我們將透過  $H_1$  與  $K$ ，將  $H_1$  對應至  $D_2$  的一個歐拉有向子圖。定義  $H_2$  為  $(E(H_1) - E(K)) \cup (E(K^{-1}) - E(H_1^{-1}))$  所形成的有向圖，可知  $H_2$  即為  $D_2$  的有向子圖。對任意  $v \in V(H_2)$ ，依照  $v$  所在的位置，考慮  $v$  在  $H_2$  中的內度數與外度數。

為了符號上討論方便，以下每個圖的頂點集合，我們皆忽略內外度數皆為零的孤立點。

- (1) 當  $v \in V(H_1) - V(K)$ 。因為與  $v$  相鄰的有向邊都沒有更動且  $H_1$  為歐拉有向子圖，所以  $d_{H_1}^+(v) = d_{H_2}^+(v)$ 、 $d_{H_1}^-(v) = d_{H_2}^-(v)$  且  $d_{H_1}^+(v) = d_{H_1}^-(v)$ ，可知  $d_{H_2}^+(v) = d_{H_2}^-(v)$ ；
- (2) 當  $v \in V(K) - V(H_1)$ 。因為與  $v$  相鄰的有向邊都改變方向且  $K$  為歐拉有向子圖，所以  $d_{H_2}^+(v) = d_{H_2}^-(v)$ ；
- (3) 當  $v \in V(H_1) \cap V(K)$  且  $N_G(v) \subseteq V(H_1)$ 。因為與  $v$  相鄰的有向邊在  $H_2$  中全被刪除， $d_{H_1}^+(v) = d_{H_1}^-(v)$  與  $d_K^+(v) = d_K^-(v)$ ，所以  $d_{H_2}^+(v) = d_{H_1}^+(v) - d_K^+(v)$  與  $d_{H_2}^-(v) = d_{H_1}^-(v) - d_K^-(v)$ ，可知  $d_{H_2}^+(v) = d_{H_2}^-(v)$ ；
- (4) 當  $v \in V(H_1) \cap V(K)$  且  $N_G(v) \cap (V(K) - V(H_1)) \neq \emptyset$ 。令  $v$  在  $E(H_1)$  中共  $p$  條指向外的有向邊、 $q$  條指向  $v$  的有向邊； $v$  在  $E(K) - E(H_1)$  中共  $p'$  條指向外的有向邊、 $q'$  條指向  $v$  的有向邊，可知  $d_K^+(v) = p + p'$ 、 $d_K^-(v) = q + q'$ 。因為  $K$  為歐拉有向子圖，所以  $d_K^+(v) = p + p' = q + q' = d_K^-(v)$ 。因為  $v$  與  $E(H_1)$  中相鄰的有向邊皆在  $H_2$  中被刪除，且  $v$  與  $E(K) - E(H_1)$  中相鄰的有向邊皆在  $H_2$  中被反轉方向，所以  $d_{H_2}^+(v) = d_{H_1}^+(v) - p + q'$  與  $d_{H_2}^-(v) = d_{H_1}^-(v) - q + p'$ 。又因為  $d_{H_1}^+(v) = d_{H_1}^-(v)$ ，所以  $d_{H_2}^+(v) = d_{H_2}^-(v)$ 。

由上述討論可得，對任意  $v \in V(H_2)$ ， $d_{H_2}^+(v) = d_{H_2}^-(v)$  恆成立，故  $H_2$  必為  $D_2$  的有歐拉有向子圖。由此可知， $D_1$  的一個歐拉有向子圖  $H_1$  可對應  $D_2$  的一個歐拉有向子圖  $H_2$ 。同理， $D_2$  的歐拉有向子圖亦可對應至  $D_1$  的歐拉有向子圖。由此可建立  $\varepsilon(D_1)$  與  $\varepsilon(D_2)$  之間的一一對應關係，故得知  $D_1$  與  $D_2$  有相同數量的歐拉有向子圖，意即  $|\varepsilon(D_1)| = |\varepsilon(D_2)|$ 。



4. 因為  $|\varepsilon(D_1)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| + |\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)|$  且  $|\varepsilon(D_2)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| + |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ 。根據引理 2 的結論 2 可知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = (-1)^{g(D_1, D_2)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|)$ 。根據引理 2 的結論 3 可知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| + |\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_2)| + |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ 。因此根據  $g(D_1, D_2)$  的奇偶性，即可得當  $g(D_1, D_2)$  為偶數時， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_2)|$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ ；當  $g(D_1, D_2)$  為奇數時， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_2)|$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_1)| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_2)|$ 。

□

我們發現，若在定向  $D$  中將一個歐拉有向子圖的所有邊反向後，所得的定向  $D_1$  必滿足與  $D$  有相同的外度數序列，意即  $d(D) = d(D_1)$ 。欲探討相同外度數序列與歐拉有向子圖的數量關係，我們發現與定向  $D$  擁有相同外度數序列的定向數量與歐拉有向子圖的數量有恆等關係。由於一個定向  $D$  的外度數序列皆決定一個特殊項，因此我們觀察圖多項式  $f_D$  的展開式的不同類項，發現不同類項的數量與外度數序列的所有可能情形有一定的數量關係。考慮圖  $G$  所有的定向，令『 $\text{Out}(G)$ 』為圖  $G$  所有外度數序列所形成的集合，意即  $\text{Out}(G) = \{(d_1, d_2, \dots, d_n) : \text{圖 } G \text{ 存在一個定向 } D, \text{ 滿足 } d(D) = (d_1, d_2, \dots, d_n)\}$ 。我們發現  $f_D$  展開式中不同類項的數目始終不大於圖  $G$  外度數序列的可能性  $|\text{Out}(G)|$ 。利用引理 1 與引理 2，針對圖多項式的各項係數，我們有以下定理：

**定理 3 (圖多項式的各項係數).**

給定圖  $G$ ，點集合  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。令  $D_G$  為圖  $G$  的一個定向，則：

1. 若  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  為圖  $G$  以某個有向圖  $D$  決定的外度數序列，則圖  $G$  共有  $|\varepsilon(D)|$  個不同的定向，使其外度數序列皆為  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ；
2. 
$$f_{D_G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \text{Out}(G) \\ (d_1, d_2, \dots, d_n) = d(D)}} (-1)^{g(D_G, D)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D)|) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{d_i}.$$

*Proof.*

1. 已知  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  為圖  $G$  以某個有向圖  $D$  決定的外度數序列。令  $D_1$  為  $G$  另一個定向，其中  $D_1$  所決定的外度數序列亦為  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ，意即  $d(D) = d(D_1)$ 。根據引理 2 的結論 1 可知，若  $D'$  為有向邊  $E(D) - E(D) \cap E(D_1)$  所形成的有向子圖， $D'_1$  為有向邊  $E(D_1) - E(D) \cap E(D_1)$  所形成的有向子圖，則  $D'$  與  $D'_1$  皆為歐拉有向子圖，其中  $D'$  與  $D'_1$  的有向邊皆為相反方向。此外不難得知，若有向圖  $D$  存在一個歐拉有向子圖  $D'$ ，則將  $E(D')$  中的有向邊全部改變方向之後，即可獲得另一個圖  $G$  的定向  $D_1$ ，滿足  $d(D) = d(D_1)$ 。綜合上述討論，針對定向圖  $D$ ，可知圖  $G$  共有  $|\varepsilon(D)|$  個不同的定向  $D_1$ ，使得  $d(D) = d(D_1)$ 。
2. 令  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \text{Out}(G)$ ，其中  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  為圖  $G$  以有向圖  $D$  決定的外度數序列，意即  $d(D) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 。由引理 1 的結論 1 與結論 2 可知， $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  為  $f_{D_G}$  展開式中的一项且係數為  $(-1)^{g(D_G, D)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D)|)$ 。整體來說，考慮  $f_{D_G}$  展開式中的任意一項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$ ，其各變數的指數即決定一個外度數序列  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ，然而這個外度數序列將存在一個定向  $D$  使得  $d(D) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ ，由引理 1 的結論 2 可知，透過有向圖  $D$  即可得知  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  在  $f_{D_G}$  中的係數為  $(-1)^{g(D_G, D)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D)|)$ 。

。因此考慮圖  $G$  所有可能形成的外度數序列  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \text{Out}(G)$ ，進一步可知  $f_{D_G}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的展開式即為

$$\sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \text{Out}(G) \\ (d_1, d_2, \dots, d_n) = d(D)}} (-1)^{g(D_G, D)} \cdot (|\varepsilon_{\text{even}}(D)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D)|) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$$

□

定理 3 說明了圖中的不同定向，若有相同的外度數序列，則在歐拉有向子圖的數量上具有特殊的不變量關係，因此我們可以將所有的定向以外度數序列做為群組分類，進一步對應回圖多項式中的代數式，利用歐拉有向子圖的數量來刻畫圖多項式中各項的係數，並獲得展開式。

### 2.3.5 有向圖列表著色定理

我們可以將定理 1 應用在圖多項式  $f_{D_G}$ ，因為  $f_{D_G}$  的特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  是由各點  $v_i$  的外度數  $d_{D_G}^+(v_i) = d_i$  決定各變數的指數，而  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數由  $D_G$  的歐拉有向子圖來決定，這表示，若圖  $G$  的定向可以保證  $f_{D_G}$  中  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數不為零，則可透過定理 1 來設計顏色列表  $A_i$  數量的下界之充分條件。根據上述的討論則有以下定理：

#### 定理 4 (有向圖列表著色定理).

有向圖  $D_G$ ， $V(D_G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，其中點  $v_i$  的外度數  $d_{D_G}^+(v_i) = d_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。令  $L(v_i)$  為點  $v_i$  可以使用的顏色列表且  $|L(v_i)| \geq d_i + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

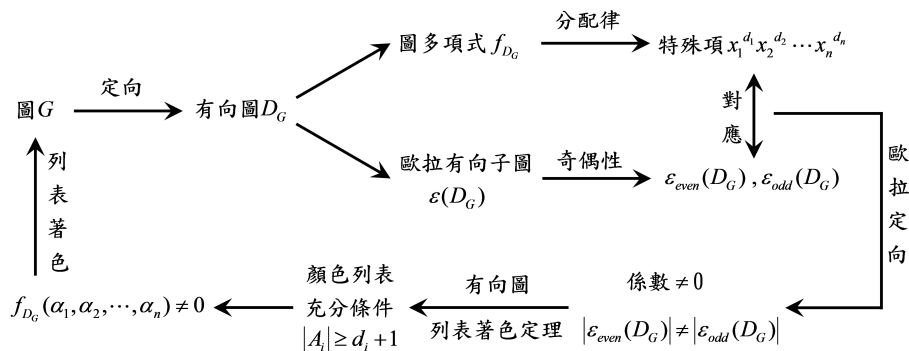
若  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|$ ，則：

1. 圖多項式  $f_{D_G}$  中的特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  係數不為零；
2. 對任意  $i = 1, 2, \dots, n$ ，存在  $\alpha_i \in L(v_i)$ ，使得圖  $G$  有  $L$ -coloring；
3. 圖  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，其中  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ， $\ell(v_i) \geq d_i + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

*Proof.*

1. 根據定理 2 已知圖多項式  $f_{D_G}$  中特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|$ 。因為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|$ ，所以  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數不為零。
2. 因為圖多項式  $f_{D_G}$  中特殊項  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  的係數不為零，且  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  為最高次項，根據定理 1 可知，當  $|A_i| \geq d_i + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$  時，則存在  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  能使得  $f_{D_G}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ 。對  $i = 1, 2, \dots, n$ ，令顏色列表  $L(v_i) = A_i$ ，則存在  $\alpha_i \in L(v_i)$ ，使得著色函數  $c(v_i) = \alpha_i$ 。這表示函數  $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  為圖  $G$  的  $L$ -coloring。
3. 因為當  $|A_i| \geq d_i + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$  時，存在  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  能使得圖多項式的函數值  $f_{D_G}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ 。令顏色數量函數  $\ell(v_i) = |A_i|$ ，可知  $\ell(v_i) \geq d_i + 1$ ，將集合  $A_i$  視為點  $v_i$  的顏色列表  $L(v_i)$ ， $\alpha_i$  視為點  $v_i$  使用的顏色，則  $f_{D_G}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$  表示圖  $G$  在顏色列表為  $L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_n)$  的情況下，可完成列表著色。這表示圖  $G$  為可  $\ell$ -列表著色。

□



## 2.4 可約構形與演算法的設計

給定圖  $G$  與列表數量函數  $\ell_G: V \rightarrow \mathbb{N}$ ，當  $G$  的結構很龐大時，判定  $G$  是否為可  $\ell$ -列表著色為一個有難度的問題。因此我們試圖透過簡化圖形的規模，降低列表著色的難度，希望能夠設計一個演算法，將問題化繁為簡，進一步能完成列表著色。

### 2.4.1 可約構形

對於圖  $G$ ，將列表數量函數特別記為  $\ell_G: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，在考慮  $G$  是否為可  $\ell_G$ -列表著色的前提下，若  $H$  為  $G$  的子圖，對  $v \in V(H)$ ，為了迴避  $v$  在  $V(G) \setminus V(H)$  中相鄰的點未來所使用的顏色，則我們將  $v$  原本有的列表數量  $\ell_G(v)$  減去  $(d_G(v) - d_H(v))$ 。因此對於  $v \in V(H)$ ，我們設計新的顏色數量函數  $\ell_{G,H}: V(H) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其定義為  $\llbracket \ell_{G,H}(v) = \ell_G(v) - (d_G(v) - d_H(v)) \rrbracket$ 。此外對於新的顏色數量函數  $\ell_{G,H}$ ，若  $H$  為可  $\ell_{G,H}$ -列表著色，則稱  $H$  搭配函數  $\ell_{G,H}$  為  $G$  的『可約構形 (reducible configuration)』，並將此構形記為  $\llbracket (H, \ell_{G,H}) \rrbracket$ 。

例如：給定下圖  $G$ ，令  $\ell_G: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其中  $\ell_G(v_i) = \begin{cases} 4, & \text{當 } i = 1; \\ 3, & \text{當 } i = 2, 3, 4, 5; \\ 2, & \text{當 } i = 6, 7, 8; \\ 1, & \text{當 } i = 9. \end{cases}$ 。

令子圖  $H$  的頂點為  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊為  $E(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ 。對任意  $v_i \in V(H)$ ，定義  $\ell_{G,H}(v_i) = \ell_G(v_i) - (d_G(v_i) - d_H(v_i))$ ，可知  $\ell_{G,H}(v_i) = 2, i = 1, 2, 3, 4$ 。因為  $H$  是可  $\ell_{G,H}$ -列表著色，所以  $(H, \ell_{G,H})$  為  $G$  的一個可約構形。

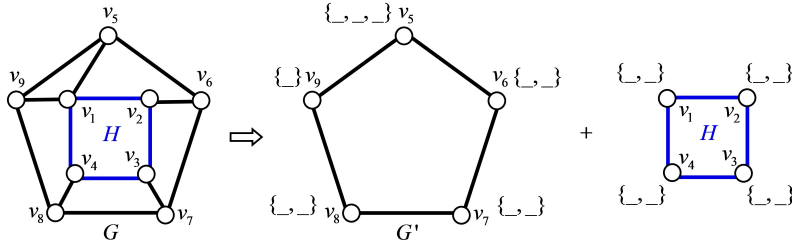


圖  $G$  的一個可約構形  $(H, \ell_{G,H})$  除了與子圖  $H$  的結構有關以外，對點而言  $v \in V(H)$  而言，亦跟點  $v$  分別在  $G$  與  $H$  的『度數差  $d_G(v) - d_H(v)$ 』，以及『函數  $\ell_G(v)$  的值』有密切關係。以下引理將用來說明我們如何利用可約構形來化簡圖形：

#### 引理 3 (利用可約構形化簡圖形).

給定圖  $G$  與列表數量函數  $\ell_G$ ，令  $H$  為  $G$  的子圖，且  $(H, \ell_{G,H})$  為  $G$  的可約構形，令  $G$  刪除  $H$  之後的剩餘圖形為  $G'$ 。若  $G'$  為可  $\ell_G$ -列表著色，則  $G$  亦為可  $\ell_G$ -列表著色，反之亦然。

*Proof.*

給定任意  $\ell_G$ -列表  $L: V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，其中對任意頂點  $u \in V(G)$ ，皆滿足  $|L(u)| = \ell_G(u)$ 。令  $G' = G - H$  為圖  $G$  刪除  $H$  之後的剩餘圖形。因為  $G'$  為可  $\ell_G$ -列表著色，因此存在  $L$ -列表著色  $c': V(G') \rightarrow \mathbb{N}$  使得  $c'(u) \in L(u)$ ，其中  $u \in V(G')$ 。

考慮任意點  $v \in V(H)$ ，令新的顏色列表函數  $L^*(v) = L(v) \setminus \{c'(u) : u \in V(G') \text{ 且 } u \in N_G(v)\}$ 。因為集合  $\{c'(u) : u \in V(G') \text{ 且 } u \in N_G(v)\}$  的元素數量不大於  $d_G(v) - d_H(v)$  且  $|L(v)| = \ell_G(v)$ ，所以  $|L^*(v)| \geq \ell_G(v) - (d_G(v) - d_H(v)) = \ell_{G,H}(v)$ 。因為  $(H, \ell_{G,H})$  為  $G$  的可約構形，所以  $H$  為可  $\ell_{G,H}$ -列表著色，由此可知  $H$  存在一個  $L^*$ -列表著色  $c^*: V(H) \rightarrow \mathbb{N}$  使得  $c^*(v) \in L^*(v)$ ，其中  $v \in V(H)$ 。整合著色函數  $c'$  與  $c^*$ ，定義  $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其中  $c(v) = \begin{cases} c'(v), & \text{當 } v \in V(G'); \\ c^*(v), & \text{當 } v \in V(H). \end{cases}$

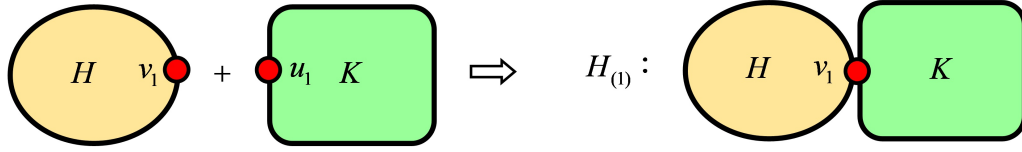
，可知  $c$  為圖  $G$  的  $L$ -列表著色，故  $G$  亦為可  $\ell_G$ -列表著色。此外，若前提為  $G$  是可  $\ell_G$ -列表著色，因為  $G'$  為  $G$  的子圖，所以  $G'$  必為可  $\ell_G$ -列表著色。□

對於圖  $G$ ，給定列表數量函數  $\ell_G: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，考慮  $G$  的可約構形  $(H, \ell_{G,H})$ ，可知任意  $v \in V(H)$ ，其中函數  $\ell_{G,H}$  定義為  $\ell_{G,H}(v) = \ell_G(v) - (d_G(v) - d_H(v))$ 。由於可約構形中的各點度數是重要的資訊，對於可約構形  $(H, \ell_{G,H})$ ，令  $v \in V(H)$ ，我們欲討論  $\ell_G(v)$  與  $d_G(v)$  所需滿足的條件。若  $G$  的一個定向  $D_G$  滿足  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|$ ，則特別稱此定向  $D_G$  為『歐拉定向』。我們將設計一套方法，可以建構一系列的可約構形。以下特別介紹其中兩種建構類型。



給定圖  $G$  與列表數量函數  $\ell_G: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ 。令  $H$  為  $G$  的子圖，若  $H$  存在歐拉定向  $D_H$ ，根據定理 4 的結論 3，欲使  $H$  為可  $\ell_{G,H}$ -列表著色，其充分條件為『對任意  $v \in V(H)$ ， $\ell_{G,H}(v) \geq d_{D_H}^+(v) + 1$  恆成立』。由此可知『 $v$  在  $G$  中的度數  $d_G(v)$ 』與『 $v$  的列表數量  $\ell_G(v)$ 』將能決定  $(H, \ell_{G,H})$  是否能成為圖  $G$  的可約構形。然而  $\ell_{G,H}(v) \geq d_{D_H}^+(v) + 1 \Leftrightarrow \ell_G(v) - (d_G(v) - d_H(v)) \geq d_{D_H}^+(v) + 1 \Leftrightarrow d_G(v) - \ell_G(v) \leq d_H(v) - d_{D_H}^+(v) - 1 = d_{D_H}^-(v) - 1$ 。這意味著『 $d_G(v) - \ell_G(v)$ 』的值能成為  $(H, \ell_{G,H})$  為  $G$  的可約構形的充分條件。以下我們將依照上述的概念，設計兩種建構可約構形的方法。

令圖  $H$  與圖  $K$  分別存在歐拉定向  $D_H$  與  $D_K$ 。令  $v_1 \in V(H)$ ， $u_1 \in V(K)$ ，將  $v_1$  與  $u_1$  合併為同一點，合併後的點記為  $v_1$ ，將所得的新圖形特別記為『 $H_{(1)}$ 』。令  $K'$  為圖  $K$  刪除點  $u_1$  後的剩餘圖形。我們定義圖  $H_{(1)}$  的點集合為  $V(H_{(1)}) = V(H) \cup V(K')$ ，邊集合為  $E(H_{(1)}) = E(H) \cup E(K') \cup \{v_1r : u_1r \in E(K)\}$ 。



$$\text{對於圖 } H_{(1)}, \text{ 各點的度數為 } d_{H_{(1)}}(v) = \begin{cases} d_H(v), & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1\}; \\ d_K, & \text{當 } v \in V(K'); \\ d_H(v_1) + d_K(u_1), & \text{當 } v = v_1. \end{cases}.$$

以下我們將建立充分條件，使得  $(H_{(1)}, \ell_{G,H_{(1)}})$  為圖  $G$  的一個可約構形。

**定理 5 (建構可約構形 - I).**

給定圖  $G$ ，列表數量函數  $\ell_G$ ，令  $H$  與  $K$  分別存在歐拉定向  $D_H$  與  $D_K$ ，且  $H_{(1)}$  為  $G$  的子圖。

$$\text{若 } d_G(v) - \ell_G(v) \leq \begin{cases} d_{D_H}^-(v) - 1, & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1\}; \\ d_{D_K}^-(v) - 1, & \text{當 } v \in V(K'); \\ d_{D_H}^-(v_1) + d_{D_K}^-(u_1) - 1, & \text{當 } v = v_1. \end{cases},$$

則  $(H_{(1)}, \ell_{G,H_{(1)}})$  為  $G$  的可約構形。

*Proof.*

因為  $D_H$  與  $D_K$  皆為歐拉定向，所以  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_H)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_H)|$  且  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_K)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_K)|$ 。令  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_H)| = x_1$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_H)| = y_1$ 、 $|\varepsilon_{\text{even}}(D_K)| = x_2$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_K)| = y_2$ ，故  $x_1 \neq y_1$  與  $x_2 \neq y_2$ 。考慮  $H_{(1)}$  的一個定向  $D_{(1)}$ ，其中  $E(D_{(1)}) = E(D_H) \cup E(D_K)$ 。令  $D_{H^*}$  與  $D_{K^*}$  分別為  $D_H$  與  $D_K$  的歐拉有向子圖，可知  $D_{H^*} \cup D_{K^*}$  亦為  $D_{(1)}$  的歐拉有向子圖。根據  $|E(D_{H^*})|$  與  $|E(D_{K^*})|$  的奇偶性，可知當  $D_{H^*} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_H)$  且  $D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_K)$  時，則  $D_{H^*} \cup D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})$ ；當  $D_{H^*} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_H)$  且  $D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_K)$  時，則  $D_{H^*} \cup D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})$ ；當  $D_{H^*} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_H)$  且  $D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_K)$  時，則  $D_{H^*} \cup D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})$ ；當  $D_{H^*} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_H)$  且  $D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{even}}(D_K)$  時，則  $D_{H^*} \cup D_{K^*} \in \varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})$ 。由此可知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})| = x_1x_2 + y_1y_2$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})| = x_1y_2 + x_2y_1$ 。以下考慮  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})|$  的差，因為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})| = (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \neq 0$ ，這表示有向圖  $D_{(1)}$  為  $H_{(1)}$  的一個歐拉定向，其中  $D_{(1)}$  的各點外度數為

$$d_{D_{(1)}}^+(v) = \begin{cases} d_{D_H}^+(v), & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1\}; \\ d_{D_K}^+(v), & \text{當 } v \in V(K'); \\ d_{D_H}^+(v_1) + d_{D_K}^+(u_1), & \text{當 } v = v_1. \end{cases} \quad D_{(1)}: \quad \text{Diagram showing } D_H \text{ (yellow circle) and } D_K \text{ (pink rounded rectangle) sharing a red dot } v_1. \text{ Blue arrows show directed edges from } v_1 \text{ to other vertices in both } D_H \text{ and } D_K.$$

考慮各點  $v \in V(H_{(1)})$  的列表數量函數  $\ell_{G,H_{(1)}}(v)$  值：

當  $v \in V(H) \setminus \{v_1\}$  時，則  $\ell_{G,H_{(1)}}(v) \geq 1 - d_{D_H}^-(v) + d_H(v) = d_{D_H}^+(v) + 1$ ；

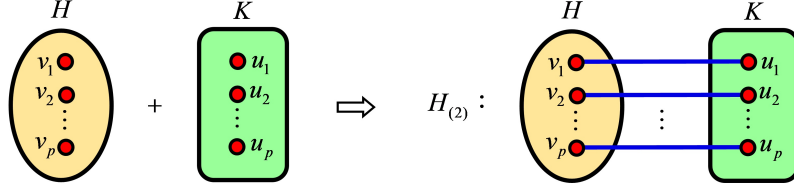
當  $v \in V(K')$  時，則  $\ell_{G,H_{(1)}}(v) \geq 1 - d_{D_K}^-(v) + d_K(v) = d_{D_K}^+(v) + 1$ ；

當  $v = v_1$  時，則  $\ell_{G,H_{(1)}}(v_1) \geq 1 - d_{D_H}^-(v_1) - d_{D_K}^-(u_1) + d_{H_{(1)}}(v_1) = 1 - d_{D_H}^-(v_1) - d_{D_K}^-(u_1) + d_H(v_1) +$

$$d_K(u_1) = d_{D_H}^+(v_1) + d_{D_K}^+(u_1) + 1。故 \ell_{G,H_{(1)}}(v) \geq \begin{cases} d_{D_H}^+(v) + 1, & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1\}; \\ d_{D_K}^+(v) + 1, & \text{當 } v \in V(K'); \\ d_{D_H}^+(v_1) + d_{D_K}^+(u_1) + 1, & \text{當 } v = v_1. \end{cases}.$$

上述討論可知對任意  $v \in V(H_{(1)})$ ，列表數量函數  $\ell_{G, H_{(1)}}(v) \geq d_{D_{(1)}}^+(v) + 1$  恆成立。根據定理 4 的結論 3，可知  $H_{(1)}$  為可  $\ell_{G, H_{(1)}}$ -列表著色，所以  $(\ell_{G, H_{(1)}})$  為圖  $G$  的可約構形。□

令圖  $H$  與圖  $K$  分別存在歐拉定向  $D_H$  與  $D_K$ 。令  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subseteq V(H)$ ， $\{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subseteq V(K)$ ，在  $H$  與  $K$  之間新增  $p$  條邊  $\{v_i u_i : i = 1, 2, \dots, p\}$ ，將所得的新圖形特別記為『 $H_{(2)}$ 』。定義圖  $H_{(2)}$  的點集合為  $V(H_{(2)}) = V(H) \cup V(K)$ ，邊集合為  $E(H_{(2)}) = E(H) \cup E(K) \cup \{v_i u_i : i = 1, 2, \dots, p\}$ 。



$$\text{對於圖 } H_{(2)} \text{，各點的度數為 } d_{H_{(2)}}(v) = \begin{cases} d_H(v), & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_p\}; \\ d_H(v) + 1, & \text{當 } v \in \{v_1, v_2, \dots, v_p\}; \\ d_K(v), & \text{當 } v \in V(K) \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_p\}; \\ d_K(v) + 1, & \text{當 } v \in \{u_1, u_2, \dots, u_p\}. \end{cases}.$$

以下我們將建立充分條件，使得  $(H_{(2)}, \ell_{G, H_{(2)}})$  為圖  $G$  的一個可約構形。

**定理 6 (建構可約構形 - II).**

給定圖  $G$ ，列表數量函數  $\ell_G$ ，令  $H$  與  $K$  分別存在歐拉定向  $D_H$  與  $D_K$ ，且  $H_{(2)}$  為  $G$  的子圖。

$$\text{若 } d_G(v) - \ell_G(v) \leq \begin{cases} d_{D_H}^-(v) - 1, & \text{當 } v \in V(H); \\ d_{D_K}^-(v) - 1, & \text{當 } v \in V(K) \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_p\}; \\ d_{D_K}^-(v), & \text{當 } v \in \{u_1, u_2, \dots, u_p\}. \end{cases},$$

則  $(H_{(2)}, \ell_{G, H_{(2)}})$  為  $G$  的可約構形。

*Proof.*

因為  $D_H$  與  $D_K$  皆為歐拉定向，所以  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_H)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_H)|$  且  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_K)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_K)|$ 。令  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_H)| = x_1$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_H)| = y_1$ 、 $|\varepsilon_{\text{even}}(D_K)| = x_2$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_K)| = y_2$ ，故  $x_1 \neq y_1$  與  $x_2 \neq y_2$ 。考慮  $H_{(2)}$  的一個定向  $D_{(2)}$ ，其中  $E(D_{(2)}) = E(D_H) \cup E(D_K) \cup \{(v_i, u_i) : i = 1, 2, \dots, p\}$ 。因為  $D_{(2)}$  的歐拉有向子圖必由  $D_H$  與  $D_K$  的歐拉有向子圖所構成，根據歐拉有向子圖邊的奇偶性進行分類，則可知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(2)})| = x_1 x_2 + y_1 y_2$  且  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(2)})| = x_1 y_2 + x_2 y_1$ 。以下考慮  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(2)})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(2)})|$  的差，因為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(2)})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(2)})| = (x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \neq 0$ ，這表示有向圖  $D_{(2)}$  為  $H_{(2)}$  的一個歐拉定向，其中  $D_{(2)}$  的各點外度數為

$$d_{D_{(2)}}^+(v) = \begin{cases} d_{D_H}^+(v), & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_p\}; \\ d_{D_H}^+(v) + 1, & \text{當 } v \in \{v_1, v_2, \dots, v_p\}; \\ d_{D_K}^+(v), & \text{當 } v \in V(K). \end{cases} \quad D_{(2)}:$$

考慮各點  $v \in V(H_{(2)})$  的函數  $\ell_{G, H_{(2)}}(v)$  值：

當  $v \in V(H) \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ， $\ell_{G, H_{(2)}}(v) \geq 1 - d_{D_H}^-(v) + d_H(v) = d_{D_H}^+(v) + 1$ ；

當  $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ， $\ell_{G, H_{(2)}}(v) \geq 1 - d_{D_H}^-(v) + d_H(v) + 1 = d_{D_H}^+(v) + 2$ ；

當  $v \in V(K) \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ ， $\ell_{G, H_{(2)}}(v) \geq 1 - d_{D_K}^-(v) + d_K(v) = d_{D_K}^+(v) + 1$ ；

當  $v \in \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ ， $\ell_{G, H_{(2)}}(v) \geq 1 - d_{D_K}^-(v) + d_K(v) + 1 = d_{D_K}^+(v) + 1$ 。

$$\text{故 } \ell_{G, H_{(2)}}(v) \geq \begin{cases} d_{D_H}^+(v) + 1, & \text{當 } v \in V(H) \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_p\}; \\ d_{D_H}^+(v) + 2, & \text{當 } v \in \{v_1, v_2, \dots, v_p\}; \\ d_{D_K}^+(v) + 1, & \text{當 } v \in V(K). \end{cases}.$$

上述討論可知對任意  $v \in V(H_{(2)})$ ，列表數量函數  $\ell_{G, H_{(2)}}(v) \geq d_{D_{(2)}}^+(v) + 1$  恆成立。根據定理 4 的結論 3，可知  $H_{(2)}$  為可  $\ell_{G, H_{(2)}}$ -列表著色，故  $(H_{(2)}, \ell_{G, H_{(2)}})$  為圖  $G$  的可約構形。□

## 2.4.2 列表著色演算法

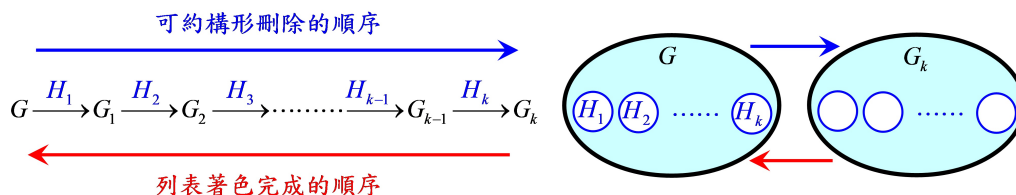
透過定理 5 與定理 6，我們可以建立可約構形的資料庫 III，利用資料庫 III 內的資訊，嘗試將圖  $G$  依序分解成許多的可約構形，持續利用引理 3 的結論，試圖說明  $G$  為可  $\ell_G$ -列表著色。以下介紹如何利用可約構形資料庫來化簡圖  $G$  的列表著色問題：

Step 1：給定圖  $G$  與列表數量函數  $\ell_G$ 。令圖  $G = G_0$ ；

Step 2：對於  $i \geq 0$ ，在圖  $G_i$  中搜尋可約構形  $(H_{i+1}, \ell_{G, H_{i+1}})$ ，令  $G_{i+1} = G_i - H_{i+1}$ ；

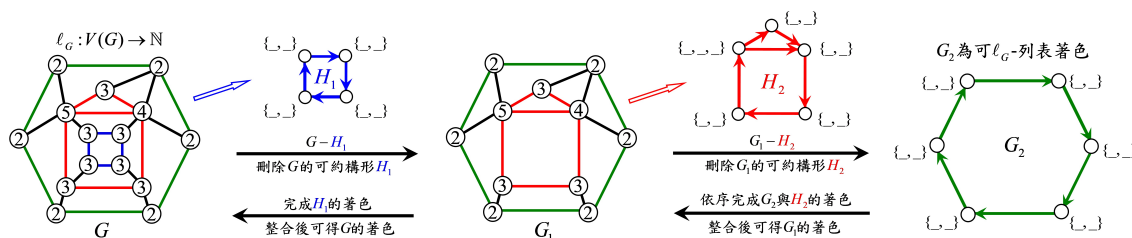
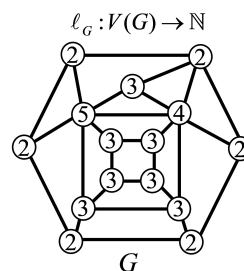
Step 3：持續 Step 2 直到獲得  $G_k$ ，使得  $G_k$  為可  $\ell_G$ -列表著色；

Step 4：根據引理 3 可得知， $G_k$  為可  $\ell_G$ -列表著色  $\Rightarrow G$  亦為可  $\ell_G$ -列表著色。



上述的列表著色演算法，其概念如同在解方程式時，若能利用因式分解，簡化方程式的結構，則可依序求出方程式的解。兩者之間有著異曲同工之妙。

**例如：**考慮右圖  $G$ ，給定列表數量函數  $\ell_G: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，每個點上的數字代表該點的列表數量。今欲判斷圖  $G$  是否為可  $\ell_G$ -列表著色。在  $G$  中搜尋可約構形，令  $(H_1, \ell_{G, H_1})$  為  $G$  的可約構形，其中  $G_1 = G - H_1$ 。持續在  $G_1$  中搜尋可約構形，令  $(H_2, \ell_{G, H_2})$  為  $G_1$  的可約構形，其中  $G_2 = G_1 - H_2$ 。由於  $G_2$  的結構已經簡單到可以直接判斷為  $\ell_G$ -列表著色，可知原圖  $G$  必亦為可  $\ell_G$ -列表著色。

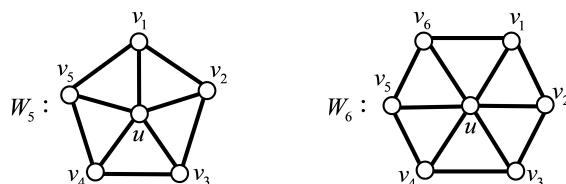


上述演算法的精神建立在將圖  $G$  進行適當的分解，透過分解的過程，確保每次分解的局部圖形為  $G$  針對列表數量函數  $\ell_G$  的可約構形，逐步地將圖形的結構降低，簡化列表著色的複雜度，從中確認列表著色的存在性。

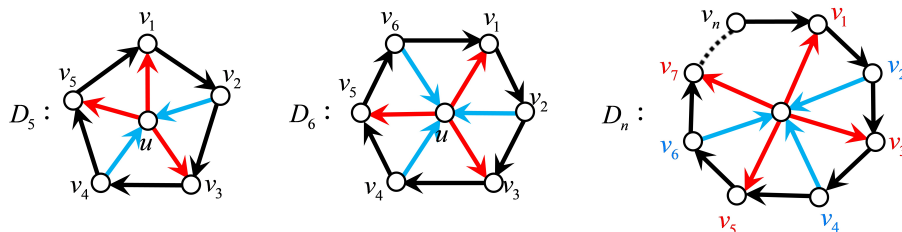
## 2.5 特殊圖類的歐拉定向探討

在丘成桐中學數學獎的書面初審過程中，在評審給我的建議中，評審希望我可以針對某種特殊的圖類去討論定向，嘗試從中探索出特別的組合性質。根據評審的建議，我選定了一種稱作 Wheel 的特殊圖類，並設定一種特殊的定向。以下介紹我對 Wheel 圖形的初步研究。

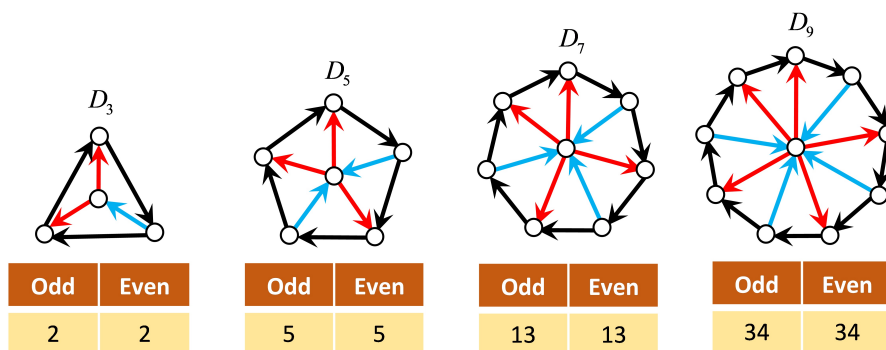
一個長度為  $n$  的圖  $C_n$ ，其點集合為  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令  $u$  為新增加的點，且將  $u$  與  $C_n$  的所有點都相連一條邊，所得的新圖形稱為『Wheel』，以符號記為  $W_n$ 。可知  $W_n$  的點集合為  $V(W_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ ，邊集合為  $E(W_n) = E(C_n) \cup \{uv_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 。下列為  $W_5$  與  $W_6$  的圖形。



對於  $W_n$ ，我規定邊的方向性，將  $C_n$  的邊設計為順時針的有向邊。此外，若  $i$  為奇數，則  $u$  指向  $v_i$ ；若  $i$  為偶數，則  $v_i$  指向  $u$ 。由此可得  $W_n$  的一個定向  $D_n$ ， $E(D_n) = \{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\} \cup \{(u, v_i) : i \text{ 為奇數}\} \cup \{(v_i, u) : i \text{ 為偶數}\}$  即為有向圖  $D_n$  的邊集合。下列為有向圖  $D_5$ 、 $D_6$  與  $D_n$  的圖形。



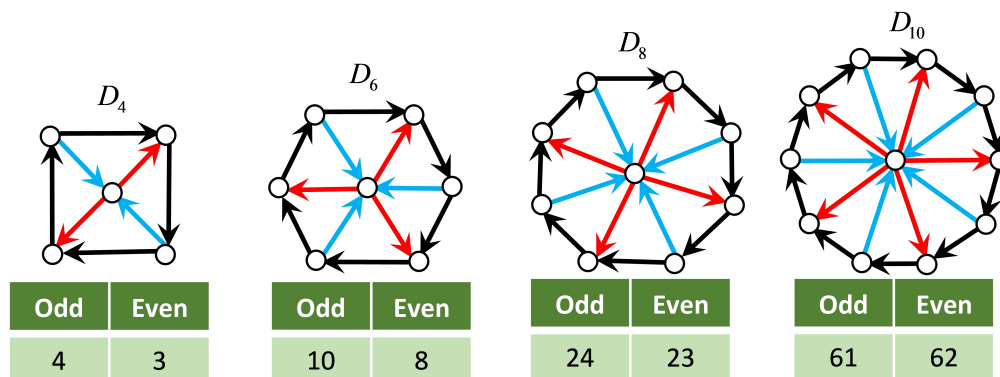
當  $n$  為奇數時，對於  $D_3$ 、 $D_5$ 、 $D_7$  與  $D_9$ ，我分別計算出歐拉奇子圖與歐拉偶子圖的數量（如下圖所示），當時發現兩者的數量皆為相等，也就是說這四個定向皆非歐拉定向。但特別的是，有關這四個定向圖，不論是歐拉奇子圖或歐拉偶子圖，其數量竟然皆為費氏數列中的數字，因此我很自然的猜想  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{11})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{11})| = 89$ ，因此更進一步的猜測，當  $n$  為奇數時， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_n)| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_n)|$  且  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_n)|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_n)|$  皆為費氏數列裡的元素。



（費氏數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...）

在第一天跟評審報告過後，經過密集的探索，我於第二天的面試過程中，主動向評審初步說明了上述的現象，並給予一個證明的思路脈絡。

至於當  $n$  為偶數時，對於  $D_4$ 、 $D_6$ 、 $D_8$  與  $D_{10}$ ，我也計算出歐拉奇子圖與歐拉偶子圖的數量（如下圖所示），發現兩者的數量並不相等，也就是說這四個定向皆為歐拉定向。



但上述的觀察，目前尚未完成證明，因此當  $n$  為偶數時，考慮  $W_n$  的特殊定向  $D_n$ ，我對於  $D_n$  的歐拉有向子圖提出以下的猜測：

**Conjecture:**

考慮  $W_n$ ，令  $D_n$  為  $W_n$  的一個定向，則當  $n$  為偶數時， $D_n$  皆為歐拉定向。

### 3 結論 (Summary and Conclusions)

利用圖的定向關係，創造一個多變數的多項式，運用鴿籠原理，藉著尋求多項式函數值為非零的可能，證明列表著色方法的存在性，並能有程序性設計一系列在列表著色中的可約構形。透過有向圖的結構，從圖多項式  $f_{D_G}$  中，觀察並推論循環因式各種組合對特殊項係數的影響，進而利用歐拉有向子圖中  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|$  能使特殊項係數不為零的特性，設計列表數量函數下界的充分條件，每個點的列表數量若為  $\ell_G(v) \geq d_{D_G}^+(v) + 1$ ，則圖  $G$  必為可  $\ell_G$ -列表著色。最後透過組合的方式，設計出兩種不同系列的可約構形，可用來化簡圖形，進而確保能完成圖的列表著色。最後關於列表著色與可約構形之建構法還有許多研究的空間，除了找到可列表著色的充分條件外，如何廣泛的建構可約構形資料庫，將更加掌握列表著色的方法，並應用於一些資源分配的相關議題。

### 參考文獻 (References)

1. 林芮吟,《平面圖的四元列表著色》,2017年臺灣國際科學展覽會。
2. N. Alon,《Combinatorial Nullstellensatz》, Combin. Probab. Comput., vol. 8 (1999), 7-29.
3. G. Chartrand, L. Lesniak and P. Zhang,《Graphs and Digraphs, 6<sup>th</sup>》, CRC Press 2016.
4. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor,《Choosability in graphs》, Congr. Numer. 26 (1979), 125-157.
5. Mateusz Michałek,《A short proof of Combinatorial Nullstellensatz》, Amer. Math. Monthly, vol. 117 (2010), 821-823.
6. V. G. Vizing,《Coloring the vertices of a graph in prescribed colors》, Metody Diskret. Anal., 19 (1976), 3-10. (in Russian)
7. Douglas B. West,《Introduction to Graph Theory, 2<sup>nd</sup>》, Pearson Education Taiwan 2008.