好數

國立花蓮高級中學 廖則睿
指導老師：姜姿戎

中文摘要

在一次的數學專題課中，老師讓我看了加拿大數學奧林匹亞的考古題。我在練習解題的過程中，發現了其中一題有別於其他題目；它難度頗高，解題技巧也巧妙的應用了題目所給的定義及性質，跳脫我既定認知，令人印象深刻；那道題目就是關於好數的證明。

我第一次見到了好數的定義，知道何謂好數，及由定義延伸而出的性質及證明。

我猜想：題目所給條件是否只是好數性質之一？是否還有更多隱藏的性質？倘若能找出夠多的好數性質，是否判別好數的方法可因而變多？是否可以加速找到更多的好數？性質是否有推廣的可能？

為此，我進行了延伸討論。

1 簡介

1.1 研究動機

在 2002 加拿大數學奧林匹亞試卷中，第一次看到好數，及其定義，題目如下：

Call a positive integer m practical if every positive integer less than or equal to n can be written as the sum of distinct divisors of n.

For example, the divisors of 6 are $1,\ 2,\ 3$, and 6. Since $1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 = 3,\ 4 = 1+3,\ 5 = 2+3,\ 6 = 6$, we see that 6 is practical.

Prove that the product of two practical numbers is also practical.

註：題目取自 [1]。

這個題目讓我感到十分困惑，同時也引發我的高度興趣，所以我試著做了更進一步的探討。

1.2 研究目的

在原定義之下，我想找出更多的好數; 所有正整數中，同時滿足好數定義的有哪些？只要是好數，是否具備某些共同性質？好數與好數之間，是否有更進一步的關聯？

因為對如上問題感興趣，故所有的探討都聚焦在此四問題中。

1.3 名詞解釋

1. 好數 g ：給定 $n \in \mathbb{N}$ ，若對於所有 $1 \leq k \leq n$ ，k 皆可表示為 n 之部分相異因數和，則稱 n 為好數，以符號 g 表示；例如，6 是好數。

$$6 : 1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 = 1 + 2,\ 4 = 1 + 3,\ 5 = 2 + 3,\ 6 = 1 + 2 + 3$$

(如上，6 之每個因數 $(1,\ 2,\ 3,\ 6)$ 在透過定義執行檢驗時，最多只能被加過 1 次。)

2. 好數集合 G ：
$\mathbb{N}$ 為所有正整數所成的集合；取 G 為所有好數所成的集合，故 $G \subset \mathbb{N}$ 。

3. 符號設定：

g ：好數；
p ：不為 2 的質數且 $p_i < p_{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$ ；
n ：正整數。

內文中所討論的數皆為正整數或 0 。

2 研究內容

2.1 好數構造性質探討

定理 1. *若 $g_1 \in G$ 且 $g_2 \in G$ ，則 $g_1 \cdot g_2 \in G$ 。*

Proof.
設 $k \in \mathbb{N}$ ，令 $k \leq g_1 g_2$ ，則 $k = ag_2 + b$ 其中 $0 \leq a \leq g_1,\ 0 \leq b < g_2$ 。
$\because g_1,\ g_2 \in G$
$\therefore$ 令

$$a = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = \sum_{i=1}^{m} c_i \text{ ，其中} c_i | g_1$$
$$b = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \text{ ，其中} d_i | g_2$$

即 $k = (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m)g_2 + (d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n)$
其中 $c_i g_2 | g_1 g_2$ 且 $d_i | g_1 g_2$ 又 $\because d_i < g_2 \leq c_i g_2 \therefore d_i \neq c_i g_2$
故 $g_1 g_2 \in G$ 。 □

註：證明取自 [1] 之參考解析。

上述之證明運用整數之除法原理將 k 表示為 $ag_2 + b$ ，其中 g_2 、a 、b 分別為除數、商數、餘數；依此，可以得到 a 與 b 的範圍；再利用好數的定義得知 $\forall\, k \leq g_1 g_2$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 皆可表示為 $g_1 g_2$ 之部分相異因數和，最後證明出 $g_1 g_2 \in G$ 。為了更快找到更多的好數，我請同學協助寫了一個程式。我從找到的好數中觀察到：
除了 1 以外，所有的好數都是偶數；並進一步觀察到：若 $g \geq 4$ ，則必 $4|g \vee 3|g$ ；綜合這兩個發現，我得出：若 $g \geq 4$ ，則 $2|g$ ；若 $g \geq 4$ ，則必 $4|g \vee 6|g$ 。

定理 2. *若 $g \in G$ 且 $g \geq 4$ ，則 $4|g \vee 6|g$ 。*

Proof.

(i) 當 $g \geq 2$ ，設 $2 \nmid g$
$\Rightarrow 2$ 無法寫成 g 之部分相異因數和，矛盾。
$\therefore$ 假設錯誤，故 $2|g$ 。

(ii) $g \geq 4$ ，設 $3 \nmid g \wedge 4 \nmid g$
$\because g \geq 4 \ \therefore 4$ 可寫成 g 之部分相異因數和 $4 = 1 + 3 = 4$
但 $3 \nmid g \wedge 4 \nmid g \therefore 4$ 無法寫成 g 之部分相異因數和，矛盾。
故 $3|g \vee 4|g$ 。

由 (i) 、(ii) 知 $\Rightarrow$ 當 $g \geq 4$ ，則必 $4|g \vee 6|g$
證明 (i) 、(ii) 運用的是反證法，利用假設與好數定義的矛盾，證明出我要的結果。 □

註：[2] Srinivasan.A.K(1948) 在“ PRACTICAL PRETENDERS”發現此性質，並已完成證明。觀察眾多好數時，偶然間看到好數乘以 3 依舊是好數。

定理 3. *若 $g \in G$ ，則 $3g \in G$ 。*

Proof.
$\because g \in G \therefore$ 設 $k \leq g$ 且 $k \in \mathbb{N}$ ，則可令

$$\begin{aligned} k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ ，且} a_i | g \Rightarrow a_i | 3g \\ g + k &= g + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,\ g|3g \text{ ，且} g < g + k \leq 2g \end{aligned}$$

$\because g \in G \therefore 2|g \Rightarrow \dfrac{3}{2}g \in \mathbb{N},\ \dfrac{5}{2}g \in \mathbb{N}$ ，且 $\dfrac{3}{2}g | 3g$

$$\frac{3}{2}g < \frac{3}{2}g + k \leq \frac{5}{2}g,\ \frac{5}{2}g < \frac{3}{2}g + g + k \leq \frac{7}{2}g$$

$\therefore$ 所有小於等於 $3g$ 的正整數，皆可表示為 $3g$ 之部分相異因數和。故 $3g \in G$ 。 □

上述證明中，用到 $2|g$ 的特性，但正整數中，1 不滿足此性質此外，如果 1 是好數，會嚴重影響到我後續的討論，會讓我無法以所想要的方式表達出所有的好數；因為 1 的特殊性，在此我將 1 宣告為非好數，如此，我就可以得到這個結論：所有的好數皆為偶數。

結論. *所有好數皆為偶數，又除 2 之外，每個好數一定是 4 或 6 的倍數，且好數的三倍也是好數。*

定理 4. $1 \sim 2^{n+1}-1$ *皆能表示為* 2^n *部分相異因數和。*

Proof.
$\because g_1 g_2 \in G \therefore 2n \in G$ 且 $2n+1 \in G$ ，設 $k < 2^{n+1}$ 且 $k \in \mathbb{N}$ ，
則可令 $k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i,\ a_i|2^{n+1}$
又 $\because k < 2^{n+1} \therefore a_i < 2^{n+1} \Rightarrow a_i|2^n \therefore \forall\, k$ 皆能表示為 2^n 部分相異因數和得證。 □

在後續出現的所有證明中，只要涉及此特性，則直接視為已知條件來使用，不再（反覆）證明。

我從好數的定義中推斷出好數跟他自己的因數有很大的關係，所以我從質因數分解進行觀察；有一部分好數可以寫成 $2^n \times p$ 的形式，例如：$6 = 2 \times 3$ 、$88 = 2^3 \times 11$ 等，但 $2^3 \times 11 \in G$ ，而 $2^2 \times 11 \notin G$ ；從上述的舉例及其他有相同性質的好數中，我整理出如下結論：

$$\text{當}2^n < p < 2^{n+1}\ \text{，則}2^n \times p \in G\ \text{，但}2^{n-1} \times p \notin G$$

定理 5. *若質數 p 滿足 $2^n < p < 2^{n+1}$ ，則 $2^n \times p \in G$ ，且 $2^{n-1} \times p \notin G$ 。*

Proof 1.
設 $k \leq 2^n \times p$ 且 $k \in \mathbb{N}$ ，令 $k = ap + b$ 則 $0 \leq a \leq 2n,\ 0 \leq b < p \because 2n \in G$ 且 $b < p < 2^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \text{可令}a &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = \sum_{i=1}^{m} c_i, c_i|2^n \\
b &= d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = \sum_{i=1}^{n_0} d_i, d_i|2^n \\
\Rightarrow k &= (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m)\, p + (d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{n_0})
\end{aligned}$$

$c_i p \neq d_i$ ，且 $c_i p|2^n p,\ d_i|2^n p$ ，故 $2^n \times p \in G$ □

Proof 2.
設 $2^{n-1} \times p \in G,\ 2^n \nmid 2^{n-1} \times p$
$\because 2^n < 2^{n-1} \times p$ 且 $2^{n-1} \times p \in G$
$\therefore 2^n$ 可表示為 $2^{n-1} \times p$ 之部分相異因數和 $= \sum_{i=1}^{m} a_i$
若 $a_i|2^{n-1} \times p$ ，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ ，$a_i \leq 2^n < p$ ，故 $a_i|2^{n-1}$
$\therefore \sum_{i=1}^{m} a_i \leq 2^{n-1}$ ，但 $2^{n-1} < 2^n$
$\Rightarrow 2^n$ 無法寫為 $2^{n-1} \times p$ 之部分相異因數和，矛盾。
$\therefore$ 假設錯誤，故 $2^{n-1} \times p \notin G$ 得證。 □

推論 1. *由上述的證明，我得到：若 $p < 2^{n+1}$ ，則 $2^n \times p \in G$ ；若 $p > 2^{n+1}$ ，則 $2^n \times p \notin G$ 。*

另外，再利用邏輯上 $P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$ 之等價性質，知道 $p > 2^{n+1} \Rightarrow 2^n \times p \notin G$ 與 $2^n \times p \in G \Rightarrow p \not> 2^{n+1}$ 等價，又 $p \neq 2$ ，所以 $p \neq 2^{n+1}$ ，因此，在這裡 $p \not> 2^{n+1}$ 代表著 $p < 2^{n+1}$ ；故，可進一步總結為：$p < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^n \times p \in G$ 。

這個發現說明了一個質數要成為一個好數的因數時，這個好數的大小會和這個質數的大小有關聯；若 p 為一質數，且 $2^n < p < 2^{n+1}$ ，則擁有因數 p 的好數，其最小者為 $2^n \times p$ 。

這個發現也對後續的研究有很大的幫助。

在上述 *Proof 1.* 中，沒有用到質數除了 1 和本身以外沒有其他因數的性質，所以 p 是否為質數並不影響（i）的證明過程，來限定好數的範圍，也不妨礙我證出（i）的結論。

探討 1. $2^n \in G$ ，k 之條件。

我嘗試找出更快判定好數的方式。

我發現：凡形如 $2^n k$ 且 k 為奇數的正整數，若不大於 k 的正整數皆可表示為 2^n 之部分相異因數和，則 $2^n k \in G$ 。

我先嘗試證明當 $k \in \mathbb{N},\ 2 \nmid k$ 若 $1 \sim 2^{n-1}k$ 皆可表示為 $2^n k$ 之部分相異因數和，則 $2^n k \in G$ ，再證明當 $n,\ k \in \mathbb{N},\ 2 \nmid k$ 若 $1 \sim k$ 皆可表示為 2^n 之部分相異因數和，則 $2^n k \in G$

推論 2. *$k \in \mathbb{N},\ 2 \nmid k,$ 若 $1 \sim 2^{n-1}k$ 皆可表示為 $2^n k$ 之部分相異因數和，則 $2^n k \in G$ 。*

Proof.
設 $a < 2^{n-1}k$ 且 $a \in \mathbb{N}$
令 $a = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = \sum_{i=1}^{m} c_i,\ c_i|2^n,$
$c_i \neq 2^{n-1}k,\ 2^{n-1}k < a + 2^{n-1}k < 2^n k,\ 2^{n-1}k|2^n k$
$\therefore 1 \sim 2^{n-1}k - 1,\ 2^{n-1}k,\ 2^{n-1}k + 1 \sim 2^n k$ 皆可表示為 $2^n k$ 之部分相異因數和故 $2^n k \in G$ 。 □

推論 3. *凡形如 $2^n k$ 且 k 為奇數的正整數，$1 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ ，則 $2^n k \in G$ 。*

Proof.
設 $a \leq 2^n k$ 且 $a \in \mathbb{N}$ 令 $a = bk + e$ 則 $0 \leq b \leq 2^n,\ 0 \leq e < k$

$$
\begin{aligned}
令 b &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = \sum_{i=1}^{m} c_i,\ c_i|2^n, \\
e &= d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = \sum_{i=1}^{n} d_i, d_i|2^n \\
\Rightarrow a &= (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m)\, p + (d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{n_0})
\end{aligned}
$$

$c_i k \neq d_i,$ 且 $c_i k|2^n k,\ d_i|2^n k$ ，故 $2^n k \in G$ 。 □

由上述探討可知，凡形如 $2^n k$ 且 k 為奇數的正整數，我只要判定不小於 k 的正整數是否可表示為 2^n 之部分相異因數和，即可確定 $2^n k \in G$ 是否成立；它大大提升了我找出新的好數的速率。當 $1 \sim k$ 皆可表示為 2^n 之部分相異因數和，則 $k \leq 2^{n+1} - 1$ 必成立，其中 k 符合上述探討中 **定理 5.** 說的 p 不為質數的情況。

2.2 基本好數構造延伸

2.2.1 完美數

我觀察發現，數學中常見的完美數（定義為：若正整數 m 的真因數和 $= m$ ，則 m 為完美數，又稱為全數)，其定義，與好數雷同，都皆與因數和有關；另外，在我目前所觀察的好數中，只要是偶完美數，都是好數；因此，我將完美數與好數加以整合討論。

定理 6. *若 $(2^n - 1)$ 為質數，則 $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ 為完美數；其中 $n \geq 2$ 。*

Proof.
令 $p = 2^n - 1$ ，$m = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$
m 所有因數：$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{n-1},\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^{n-1}p$

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + \cdots + 2^{n-1}p \\
= \;& (2^n - 1)(p + 1) = 2^n \times (2^n - 1) \\
= \;& 2m
\end{aligned}
$$

$\therefore m$ 的真因數和為 $2m - m = m$ ，故 m 為完美數。 □

定理 7. *偶完美數皆可表示為 $2^{n-1}\times(2^n-1)$ 形式，其中 (2^n-1) 為質數且 $n\geq 2$ 。*

Proof.
令 $s(m)$ 表為 m 所有正因數的和
$\because 2|m$ $\therefore$ 可以找到一正整數 $n\geq 2$ 使得 $2^n-1|m$ ，但 $2^n\nmid m$
$\Rightarrow$ 可設 $m=2^{n-1}\times a,\ 2\nmid a$
$2^n\times a=2m=s(m)=s(2^{n-1})\times s(a)=(2^{n-1})\times s(a)$
$\because (2^n,\ 2^n-1)=1$ $\therefore 2^n|s(a)$
令 $s(a)=2^n b$ 代入 $2^n\times a=(2^n-1)\times s(a),\ a=(2^n-1)\times b$
若 $b>1$ ，則 a 至少有 3 個正因數 $1,\ b,\ a$ 則 $s(a)\geq 1+b+a=1+b+(2^n-1)b=2^n b+1$ 與 $s(a)=2^n b$，矛盾。。
$\therefore b=1,\ a=(2^n-1)$ 又 $\because s(a)=1+a$ $\therefore m=2^n-1\times(2^n-1)$ ，且 (2^n-1) 為質數。

得出，若 p 為質數且可表為 2^n-1 ，又 $n\geq 2$ ，則 $2^{n-1}\times(2^n-1)$ 必為偶完美數，反之，所有的偶完美數必可表示為 $2^{n-1}\times(2^n-1)$ 形式。奇完美數，至今，則仍是數學家未解的謎。 □

註：完美數的性質參考自 [3] 。

結論. *由於*

(1) *偶完美數皆可表示為 $2^{n-1}\times(2^n-1)$ 形式，其中 (2^n-1) 為質數；*

(2) *若 $2^{n-1}<p<2^n$ ，$2^{n-1}p$ 必為好數；*

(3) *$2^{n-1}<2^n-1<2^n$ ，恆成立；*

故若取 $p=2^n-1$ ，偶完美數必為好數。

註：參考自 [4] 。

從偶完美數的定義中可知偶完美數與因數關係密切，且由上述的種種觀察所得，我推估：如果將偶完美數的標準分解式 (為一個好數) 乘上一個質數 p ，得一新正整數，控制此質數 p 在某個範圍內，則這個新的正整數應該會是一個新的好數，且 p 的範圍會與偶完美數的因數和有關。

例如：6 為完美數，$6\times 13\in G$ 但 $6\times 17\notin G$ ，$13\leq 2\times 6+1$ 且 $17>2\times 6+1$ ，所以我推測：若 a 為偶完美數又 p 為質數且 $p\leq 2a+1$ ，則 $ap\in G$ ；若 $p>2a+1$ ，則 $ap\notin G$ 。

推論 4. *若 a 為偶完美數又 p 為質數且 $p\leq 2a+1$ ，則 $ap\in G$ 。*

Proof.
設 $k\leq ap$ 且 $k\in\mathbb{N}$ ，令 $k=ep+b$ 則 $0\leq e\leq a0\leq b<p$
$\because b<p\ \therefore b\leq 2a$ 令 $e=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_m=\sum_{i=1}^{m}c_i,\ c_i|a\Rightarrow c_ip|ap$
$\because b\leq 2a$ ，$\therefore b=\sum_{i=1}^{n_0}d_i$ ，$d_i|a\Rightarrow d_i|ap$
$\Rightarrow k=(c_1+c_2+c_3+\cdots+c_m)p+(d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{n_0})$ 且 $c_ip\neq d_i$ ，故 $ap\in G$ 。 □

推論 5. *若 a 為偶完美數又 p 為質數且 $p>2a+1$ ，則 $ap\notin G$ 。*

Proof.
設 $ap\in G,\ \because 2a+1\leq ap,\ \therefore 2a+1$ 可表示為 ap 的部分相異因數和，若 $a_i|ap,\ i=1,2,\cdots,n$ ，$a_i\leq 2a+1<p$ ，$\therefore a_i|a\Rightarrow\sum n_i=1a_i=2a$ 但 $2a<2a+1$
$\Rightarrow 2a+1$ 無法表示為 ap 的部分相異因數和，矛盾。
故 ap 在 $p>2a+1$ 時不為好數。 □

由 **推論 4.** 及 **推論 5.** 之探討，可合併為如下定理：

定理 8. *若 a 為偶完美數又 p 為質數且 $p\leq 2a+1$ ，則 $ap\in G$ ；$p>2a+1$ ，則 $ap\notin G$ 。*

如果我把偶完美數的一般式視為 $2^n\times p$ ，則偶完美數乘以一定範圍內的質數就可表示為 $2^{n_0}p_1p_2$ 形式。

由 $2^n\times p$ 形式的討論，我想到：如果 p 擴展為 p_2 ，p_3 ，p_4 ，$\cdots$ ，p_n ，是否仍為好數呢？

從目前已知的好數中我觀察到：2×32 、22×52 、22×72 皆為好數；故，推估：如果 $2^np\in G$ ，則 $2^np^2\in G$ 。

推論 6. *若* $2^n p \in G$ *，則* $2^n p^2 \in G$ *。*

Proof.
設 $k \leq 2^n p^2$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 令 $k = ap^2 + bp + c,\ 0 \leq a \leq 2^n,\ 0 \leq b < p,\ 0 \leq c < p$

$$\begin{aligned}
\text{再令} a &= d_1 + d_2 + \cdots + d_l = \sum_{i=1}^{l} d_i,\ d_i | 2^n \\
b &= e_1 + e_2 + \cdots + e_m = \sum_{i=1}^{m} e_i,\ e_i | 2^n \\
c &= f_1 + f_2 + \cdots + f_q = \sum_{i=1}^{q} f_i,\ f_i | 2^n \\
\Rightarrow & \quad d_i p^2 | 2^n p^2,\ e_i p | 2^n p^2,\ f_i | 2^n p^2 \\
\Rightarrow k &= (d_1 + d_2 + \cdots + d_l) p^2 + (e_1 + e_2 + \cdots + e_m) p + (f_1 + f_2 + \cdots + f_q)
\end{aligned}$$

$\because d_i p^2 \neq e_i p \neq f_i \quad \therefore 2^n p^2 \in G$ □

推導出 $2^n p^2 \in G$ 之後，我想嘗試將 p^2 擴展為 p^3 ，p^4 ，$\cdots$ ，p^n ，即討論 $2^{n_0} p^{n_1}$ 形式 ($n_1 \in \mathbb{N}$)。例如：$2^3 \times 5^4$ 、$2^2 \times 7^3$ ，皆為好數。是否 $2^{n_0} p^{n_1}$ 也是好數嗎？

推論 7. *若* $2^{n_0} p \in G$ *，則* $2^{n_0} p^{n_1} \in G$ *。*

Proof.
設 $k \leq 2^{n_0} p^{n_1}$ 且 $k \in \mathbb{N}$
令 $k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{n_1} p^{n_1} = \sum_{i=0}^{n_1} a_i p^i$
$0 \leq a_{n_1} \leq 2^{n_0},\ 0 \leq a_i < p\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n_1 - 1)$

$$\begin{aligned}
\text{令} a_0 &= b_{0_1} + b_{0_2} + \cdots + b_{0_{m_0}} = \sum_{i=1}^{m_0} b_{0_i},\ b_{0_i} | 2^{n_0} \Rightarrow b_{0_i} | 2^{n_0} p^{n_1} \\
a_1 &= b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_{m_1}} = \sum_{i=1}^{m_1} b_{1_i},\ b_{1_i} | 2^{n_0} \Rightarrow b_{1_i} p | 2^{n_0} p^{n_1} \\
&\vdots \\
a_{n_1} &= b_{n_{1_1}} + b_{n_{1_2}} + \cdots + b_{n_{1_{m_{n_1}}}} = \sum_{i=1}^{m_{n_1}} b_{n_{1_i}},\ b_{n_{1_i}} | 2^{n_0} \Rightarrow b_{n_{1_i}} p^{n_1} | 2^{n_0} p^{n_1} \\
\Rightarrow k &= \left(b_{0_1} + b_{0_2} + \cdots + b_{0_{m_0}}\right) + \left(b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_{m_1}}\right) p \\
&\quad + \left(b_{2_1} + b_{2_2} + \cdots + b_{2_{m_2}}\right) p^2 + \cdots + \left(b_{n_{1_1}} + b_{n_{1_2}} + \cdots + b_{n_{1_{m_{n_1}}}}\right) p^{n_1}
\end{aligned}$$

$b_{0_i} \neq b_{1_i} p \neq b_{2_i} p^2 \neq \cdots \neq b_{n_{1_i}} p^{n_1},\ \therefore 2^{n_0} p^{n_1} \in G$ □

推論 8. *若* $2^{n_0} p^{n_1} \in G$ *，則* $2^{n_0} p \in G$ *。*

Proof.
設 $2^{n_0} p^{n_1} \in G$ ，但 $2^{n_0} p \notin G (\Rightarrow p > 2^{n_0} + 1)$
$\because 2^{n_0} p^{n_1} \in G$ 且 $2^{n_0} + 1 < 2^{n_0} p^{n_1},\ \therefore 2^{n_0} + 1$ 可表示為 $2^{n_0} p^{n_1}$ 之部分相異因數和
若 $a_i | 2^{n_0} p^{n_1}$ ，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ a_i \leq 2^{n_0} + 1$ ，則 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2^{n_0+1} - 1$ 但 $2^{n_0+1} - 1 < 2^{n_0+1}$
$\therefore 2^{n_0+1}$ 無法表示為 $2^{n_0} p^{n_1}$ 之部分相異因數和，矛盾。
故原假設錯誤，此命題得證。 □

此證明，其過程仿照 $2^n p^2 \in G$ 的證明過程而來，將除法原理推廣至 n_1 層。

此證明中，(仿照 $2^n p^2 \in G$ 的證明過程) 將 k 除以 p ，共操作了 n_1 次；a_0 、a_1 、a_2 、$\cdots$ 、$a_{n_1 - 1}$ 分別為第 1 、2 、3 、$\cdots$ 、n_1 次操作除法運算後相對應的餘數，a_{n_1} 則是操作第 n_1 次除法

運算後所得的商；利用這些關係，可得 a_0 、a_1 、a_2 、$\cdots$ 、a_{n_1-1} 各自的範圍限制（如上所示），再用 2^{n_0} 的部分相異因數和分別表示出 a_0 、a_1 、a_2 、$\cdots$ 、a_{n_1-1} ，代回

$$k\ \left(a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots a_{n_1}p^{n_1}=\sum_{i=0}^{n_i}a_ip^i\right)$$

，最後，我得到：$\forall\, k\le 2^{n_0}p^{n_1}$ 且 $k\in\mathbb{N}$ ，則 k 皆可表示為 $2^{n_0}p^{n_1}$ 之部分相異因數和。

$2^{n_0}p^{n_1}\in G$ 至此確認。

由**推論 7.** 及推論 **推論 8.** 之探討，可合併為如下定理：

定理 9. *$2^{n_0}p\in G$ 若且唯若 $2^{n_0}p^{n_1}\in G$ 。*

經由 $2^n\times p\in G$ 、$2^{n_0}p^{n_1}\in G$ 、偶完美數 $\times p\in G$ 之討論，我隱約發現到：若適當控制 p 的範圍及其表徵方式，似乎可以推廣出更多的好數。

下一步，我討論形如 $2^{n_0}p_1p_2$ 的正整數；例如：$2\times3\times13$ 、$2\times3\times5\cdots$ 等，皆為好數。

倘若 $2^{n_0}p_1p_2\in G$ 成立，則 p_2 的範圍限制或表徵方式是否與偶完美數 $\times p$ 中的 p （其範圍限制或表徵方式）有所關聯？

$2\times3\times13\in G$ 但 $2\times3\times17\notin G$ ；我猜測：p_2 的範圍會和 $2^{n_0}p_1$ 的因數和有關係。偶完美數 $\times p$ 中的 p ，其範圍限制為：$p\le$ 偶完美數所有因數和 $+1$ ；所以，我猜測：$p_2\le 2^{n_0}p_1$ 所有因數和 $+1$ 。

$$\begin{aligned}
2^{n_0}p_1\text{ 的因數} &: \quad 1,\,2,\,2^2,\,\cdots,\,2^{n_0},\,p_1,\,2p_1,\,2^2p_1,\,\cdots,\,2^{n_0}p_1\\
\therefore 2^{n_0}p_1\text{ 的因數總和} &= 1+2+2^2+\cdots+2^{n_0}+p_1+2p_1+2^2p_1+\cdots+2^{n_0}p_1\\
&= \left(\frac{2^{n_0+1}-1}{2-1}\right)(p_1+1)=(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)
\end{aligned}$$

推論 9. *若 $2^{n_0}p_1\in G$ ，且 $p_2\le\left(2^{n_0+1}-1\right)(p_1+1)+1$ ，則 $2^{n_0}p_1p_2\in G$ 。*

Proof.
設 $k\le 2^{n_0}p_1p_2$ 且 $k\in\mathbb{N}$ ，令 $k=ap_2+b,\ a\le 2^{n_0}p_1,\ b<p_2$

再令 $a=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_m=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}c_i,\ c_i|2^{n_0}p_1\Rightarrow c_ip_2|2^{n_0}p_1p_2$

$b<p_2\le\left(2^{n_0+1}-1\right)(p_1+1)+1$

$\Rightarrow b\le(2n_0+1-1)(p_1+1)=(2^{n_0+1}-1)p_1+(2^{n_0+1}-1)$

令 $b=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}d_i,\ d_i|2^{n_0}p_1\Rightarrow d_i|2^{n_0}p_1p_2$

$\Rightarrow k=(c_1+c_2+c_3+\cdots+c_m)p_2+(d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n)$

又 $c_ip_2\ne d_i\quad\therefore 2^{n_0}p_1p_2\in G$ □

補充說明：

此證明中的 $b\le(2^{n_0+1}-1)p_1+(2^{n_0+1}-1)$

$\therefore$ 可令 $b=(e_1+e_2+e_3+\cdots+e_m)p_1+(f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n)$

其中 $e_i|2^{n_0}$ ，$(i=1,\,2,\,3,\,\cdots,\,m)$ ，$f_i|2^{n_0}$ ，$(i=1,\,2,\,3,\,\cdots,\,n)$

$\therefore$ 可令 $b=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n$ ，$d_i|2^{n_0}p_1$

推論 10. *若 $2^{n_0}p_1p_2\in G$ ，則 $p_2\le\left(2^{n_0+1}-1\right)(p_1+1)+1$ 。*

Proof.
設 $2^{n_0}p_1p_2\in G$ 且 $p_2>(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)+1$

$\because(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)+1<2^{n_0}p_1p_2$ ，且 $2^{n_0}p_1p_2\in G$

$\therefore(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)+1$ 可表示為 $2^{n_0}p_1p_2$ 的部分相異因數和

$2^{n_0}p_1p_2$ 所有小於 $(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)+1$ 的因數：

$1,\,2,\,2^2,\,\cdots,\,2^{n_0},\,p_1,\,2p_1,\,2^2p_1,\,\cdots,\,2^{n_0}p_1$

其總和 $=(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)$

$\therefore(2^{n_0+1}-1)(p_1+1)+1$ 無法表示為 $2^{n_0}p_1p_2$ 之部分相異因數和，矛盾。

故假設錯誤，所以此命題成立。 □

推論 11. *若 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ ，則 $2^{n_0}p_1 \in G$ 。*

Proof.
設 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ ，但 $2^{n_0}p_1 \notin G (\Rightarrow p_1 > 2^{n_0}+1)$
$\because 2^{n_0}p_1p_2 \in G$ 且 $2^{n_0+1} < 2^{n_0}p_1p_2$ $\therefore 2^{n_0}+1$ 可表示為 $2^{n_0}p_1p_2$ 之部分相異因數和
若 $a_i|2^{n_0}p_1p_2$ ，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ ，$a_i \le 2^{n_0}+1$ ，則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 2^{n_0+1}-1$ 但 $2^{n_0+1}-1 < 2^{n_0}+1$
$\therefore 2^{n_0}+1$ 無法表示為 $2^{n_0}p_1p_2$ 之部分相異因數和，矛盾。
故原假設錯誤，此命題得證。 □

綜合上述之證明，可得：若 $p_1 < 2^{n_0+1},\ p_2 \le (2^{n_0+1}-1)(p_1+1)+1$ ，則 $2^{n_0}p_1 \in G$, $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ ；又，可得：若 $p_2 > (2^{n0+1}-1)(p_1+1)+1$ ，則 $2^{n_0}p_1p_2 \notin G$ ；所以，若 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ ，則必 $p_1 < 2^{n_0+1}$ 且 $p_2 \le (2^{n_0}+1-1)(p_1+1)+1$ 。
故，由**推論 9.** 、**推論 10 .** 及**推論 11.** 之探討，可合併為如下定理：

定理 10. *形如 $2^{n_0}p_1p_2$ 中，$p_1 < 2^{n_0+1}$ ，且 $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)(p_1+1)+1 \Leftrightarrow 2^{n_0}p_1p_2 \in G$*

由 **定理 10.** 中確認了 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ 之後，我接著想討論：

(1) 若 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ 能否推出 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ ？

(2) 又若 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ 能順利推出 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ ，那麼限定 p_2 的範圍是照舊或產生變化了呢？
例如：$2\times3\times13$ 、$2\times3^2\times13$ 、$2\times3^2\times29$ ，皆為好數，但 $2\times3\times29$ 不是好數，可推估 $2\times3\times p_a$ 與 $2\times3^2\times p_b$ 中，其 p_a 與 p_b 各自落在不同的與範圍限制中。

推論 12. *若 $2^{n_0}p_1p_2 \in G$ ，則 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ 。*

Proof.
設 $k \le 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 且 $k \in \mathbb{N}$
令 $k = a_0 + a_1p_1 + a_2p_1^2 + \cdots + a_{n_1}p_1^{n_1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n_1} a_ip_1^i$
$0 \le a_{n_1} \le 2^{n_0}p_2,\ 0 \le a_i < p_1\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n_1-1)$

$$\begin{aligned}
\text{再令} a_0 &= b_{0_1}+b_{0_2}+\cdots+b_{0_{m_0}} = \sum_{i=1}^{m_0} b_{0_i},\ b_{0_i}|2^{n_0} \Rightarrow b_{0_i}|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \\
a_1 &= b_{1_1}+b_{1_2}+\cdots+b_{1_{m_1}} = \sum_{i=1}^{m_1} b_{1_i},\ b_{1_i}|2^{n_0} \Rightarrow b_{1_i}p_1|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \\
&\vdots \\
a_{n_1} &= b_{n_{1_1}}+b_{n_{1_2}}+\cdots+b_{n_{1_{m_{n_1}}}} = \sum_{i=1}^{m_{n_1}} b_{n_{1_i}},\ b_{n_{1_i}}|2^{n_0}p_2 \Rightarrow b_{n_{1_i}}p_1^{n_1}|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \\
\Rightarrow k &= \left(b_{0_1}+b_{0_2}+\cdots+b_{0_{m_0}}\right)+\left(b_{1_1}+b_{1_2}+\cdots+b_{1_{m_1}}\right)p_1 \\
&\quad +\cdots+\left(b_{n_{1_1}}+b_{n_{1_2}}+\cdots+b_{n_{1_{m_{n_1}}}}\right)p_1^{n_1}
\end{aligned}$$

又 $b_{0_i} \ne b_{1_i}p_1 \ne \cdots \ne b_{n_{1_i}}p^{n_1},\ \therefore 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ □

確認了 $2^{n_0}p_1p_2 \in G \Rightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ 之後，再來要檢視的就是 p_2 的範圍；
例如：$2\times3\times17 \notin G$ 、$2\times3^2\times17 \in G$ ，2×3 的因數和為 $1+2+3+6=12$ ，2×3^2 的因數和為 $1+3+9+2+6+18=39$ ，而 $12+1<17\le39+1$
所以，我推估：$2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 中 p_2 的範圍會和 $2^{n_0}p_1^{n_1}$ 之因數和有關係。

$$\begin{aligned}
2^{n_0}p_1^{n_1}\text{ 的所有因數和} &= 1+2+2^2+\cdots+2^{n_0}+ \\
&\quad p_1+2p_1+2^2p_1+\cdots+2^{n_0}p_1+ \\
&\quad \vdots \\
&\quad p_1^{n_1}+2p_1^{n_1}+2^2p_1^{n_1}+\cdots+2^{n_0}p_1^{n_1} \\
&= \left(\frac{2^{n_0+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right) = \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)
\end{aligned}$$

猜測 p_2 範圍：$p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$

推論 13. *若* $2^{n_0}p_1^{n_1} \in G$ *，且* $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ *，則* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ *。*

Proof.
設 $k \le 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 且 $k \in \mathbb{N}$ ，令 $k = ap_2 + b,\ 0 \le a \le 2^{n_0}p_1^{n_1},\ 0 \le b < p_2$
再令 $a = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = \sum_{i=1}^{m} c_i,\ c_i | 2^{n_0}p_1^{n_1} \Rightarrow c_i p_2 | 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$
$b < p_2 \le (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$
$\Rightarrow b \le (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right) = (2^{n_0+1}-1) + (2^{n_0+1}-1)p_1 + \cdots + (2^{n_0+1}-1)p_1^{n_1}$
令 $b = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = \sum_{i=1}^{n} d_i,\ d_i | 2^{n_0}p_1^{n_1}$
$\Rightarrow k = (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m)p_2 + (d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n)$
$c_i p \ne d_i \quad \therefore 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ □

補充說明：
此證明中的 $b \le 2^{n_0+1}-1) + (2^{n_0+1}-1)p_1 + \cdots + (2^{n_0+1}-1)p_1^{n_1}$
令 $b = e_0 + e_1p_1 + e_2p_1^2 + \cdots + e_{n_1}p_1^{n_1}$
其中 e_i 皆能表示為 2^{n_0} 之部分相異因數和，$(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n_i)$
$\therefore$ 可令 $b = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n$ ，$d_i | 2^{n_0}p_1$

推論 14. *若* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ *，則* $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ *。*

Proof.
設 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ 且 $p_2 > (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1 n_1 + 1 - 1}{p_1-1}+1\right)$
$\because (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1 < 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ ，且 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$
$\therefore (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ 可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 的部分相異因數和
$2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 中所有小於 $(2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ 的因數為：

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 2^2, & \cdots, & 2^{n_0}, \\
p_1, & 2p_1, & 2^2p_1, & \cdots, & 2^{n_0}p_1, \\
 & & \vdots & & \\
p_1^{n_1}, & 2p_1^{n_1}, & 2^2p_1^{n_1}, & \cdots, & 2^{n_0}p_1^{n_1},
\end{array}$$

其總和 $= (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)$
$\therefore (2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ 無法表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 之部分相異因數和，矛盾。
故假設錯誤，所以此命題成立。 □

推論 15. *若* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ *，則* $2^{n_0}p_1^{n_1} \in G$ *。*

Proof.
設 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ ，但 $2^{n_0}p_1^{n_1} \notin G (\Rightarrow 2^{n_0}p_1 \notin G \Rightarrow p_1 > 2^{n_0+1})$
$\because 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ 且 $2^{n_0+1} < 2^{n_0}p_1p_2 \ \therefore 2^{n_0}+1$ 可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 之部分相異因數和
若 $a_i | 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ ，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ ，$a_i \le 2^{n_0+1}$ ，則 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2^{n_0+1}-1$
但 $2^{n_0+1}-1 < 2^{n_0+1} \ \therefore 2^{n_0+1}$ 無法表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 之部分相異因數和，矛盾。
故假設錯誤，原命題得證。 □

綜合上述之證明，可得：若 $p_1 < 2^{n_0+1}$，且 $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$，則 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$；又，可得：若 $p_2 > \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ 則 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \notin G$；所以，若 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$，則必 $p_1 < 2^{n_0+1}$，且 $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$。

由**推論 12.** $\sim$ **推論 15.** 之探討，可合併為如下定理：

定理 11. *若* $2^{n_0}p_1^{n_1} \in G$ *，且* $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1 \Leftrightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$

當 $2^{n_0}p_1^{n_1} \in G$，且 $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ 時，$2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ 成立；是由 $2^{n_0}p_1p_2$ 形式擴展而來，將原有之 p_1 追加次方而成為 $p_1^{n_1}$ （即 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 形式)。

那麼，如果將 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 形式擴展為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 形式呢？$2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$ 是否會成立？

例如：$900 = 22 \times 32 \times 52$ 是好數，它可表徵為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 形式，是否形如 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 的正整數也都會是好數呢？

推論 16. *若* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ *，則* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$ *。*

Proof.

設 $k \le 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 且 $k \in \mathbb{N}$

令 $k = a_0 + a_1p_2 + a_2p_2^2 + \cdots + a_{n_2}p_2^{n_2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n_2} a_ip_2^i$

$0 \le a_{n_2} \le 2^{n_0}p_1,\ 0 \le a_i < p_2\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n_2-1)$

$$\begin{aligned}
令 a_0 &= b_{0_1} + b_{0_2} + \cdots + b_{0_{m_0}} = \sum_{i=1}^{m_0} b_{0_i},\ b_{0_i}|2^{n_0}p_1^{n_1} \Rightarrow b_{0_i}|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \\
a_1 &= b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_{m_1}} = \sum_{i=1}^{m_1} b_{1_i},\ b_{1_i}|2^{n_0}p_1^{n_1} \Rightarrow b_{1_i}p_2|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \\
&\vdots \\
a_{n_2} &= b_{n_{2_1}} + b_{n_{2_2}} + \cdots + b_{n_{2_{m_{n_2}}}} = \sum_{i=1}^{m_{n_2}} b_{n_{2_i}},\ b_{n_{2_i}}|2^{n_0}p_1^{n_1} \Rightarrow b_{n_{2_i}}p_2^{n_2}|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \\
\Rightarrow k &= \left(b_{0_1} + b_{0_2} + \cdots + b_{0_{m_0}}\right) + \left(b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_{m_1}}\right)p_2 \\
&\quad \left(b_{2_1} + b_{2_2} + \cdots + b_{2_{m_2}}\right)p_2^2 + \cdots + \left(b_{n_{2_1}} + b_{n_{2_2}} + \cdots + b_{n_{2_{m_{n_2}}}}\right)p_2^{n_2}
\end{aligned}$$

又 $b_{0_i} \ne b_{1_i}p_2 \ne b_{1_i}p_2^2 \ne \cdots \ne b_{n_{2_i}}p_2^{n_2},\ \therefore 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$ □

推論 17. *若* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$ *，則* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ *。*

Proof.

設 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$，但 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \notin G (\Rightarrow 2^{n_0}p_1p_2 \notin G \Rightarrow 2^{n_0}p_1 \notin G \Rightarrow p_1 > 2^{n_0+1})$

$\because 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$ 且 $2^{n_0+1} < 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ $\therefore 2^{n_0+1}$ 可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 之部分相異因數和

若 $a_i|2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$a_i \le 2^{n_0+1}$，則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 2^{n_0+1}-1$

但 $2^{n_0+1}-1 < 2^{n_0+1}$

$\therefore 2^{n_0+1}$ 無法表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 之部分相異因數和，矛盾。故假設錯誤，原命題得證 □

由**推論 16.** 及**推論 17.** 之探討，可合併為如下定理:

定理 12. $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ *若且唯若* $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$ *。*

綜合**定理 11.** 及**定理 12.** 之結果，可得：$2^{n_0}p_1^{n_1} \in G$，且

$$p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1 \Leftrightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$$

；所以我得到：若 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\in G$ ，則必 $p_1<2^{n_0+1}$ 且 $p_2\le\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ 。

結論. $p<2^{n_0+1}$ ，且 $p_2\le\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\Leftrightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2\in G\Leftrightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\in G$

2.2.2 推廣至所有好數

探討 2. $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}\in G$ 之條件。

探討至此，我已確認：若控制 $p<2^{n_0+1}$ ，則 $2^{n_0}p$ 是好數，$2^{n_0}p^{n_1}$ 也會是好數。若近一步控制 $p_1<2^{n_0+1}$ 、$p_2\le(2^{n_0+1}-1)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1$ ，則 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2$ 、$2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 都會是好數。

而，當 $2^{n_0}p^{n_1}$ 為好數時，$p<(2^{n_0}$ 所有因數和$+1)$ (因為若 $p=2^{n_0}+1$ ，則 $2^{n_0}p=2^{2n_0+1}\in G$ ，故在此將 $p=2^{n_0}+1$ 排除在外) 確認無誤。

又，當 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}$ 為好數時，則 $p_1<2^{n_0+1}$ 、$p_2\le(2^{n_0}p_1^{n_1}$ 所有因數和 $+1)$ 也確認無誤。

因此，我大膽推估：

若一好數 g 可以表徵為標準分解式，即 $g=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ 形式，

$$\begin{aligned} g\text{ 所有因數總和} &= (1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n_0})(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{n_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{n_2})\\ &\quad\cdots(1+p_m+p_m^2+\cdots+p_m^{n_m})\\ &= (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_m^{n_m+1}-1}{p_m-1}\right)\end{aligned}$$

則 p_1 、p_2 、$\cdots$ 、p_m 將分別符合下列條件：

$$\begin{aligned} p_1 &< 2^{n_0}+1\\ p_2 &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\ &\vdots\\ p_m &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)+1\end{aligned}$$

定理 13. *若正整數 x 之標準分解式為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ ，其中*

$$\begin{aligned} p_1 &< 2^{n_0+1}\\ p_2 &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\ &\vdots\\ p_m &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)+1\end{aligned}$$

則 $x\in G$ 。

Proof.

$(m=1)$ 當 $m=1$ ，$p_1<2^{n_0}+1$ ，$2^{n_0}p_1^{n_1}\in G$

$(m=k)$ 設 $m=k$ 時，$x_1=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\in G$ 成立

$(m=k+1)$ 當 $m=k+1$ ，$x_2=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_{k+1}^{n_{k+1}}=x_1p_{k+1}^{n_{k+1}}$ ，$x_1|x_2$

$$\begin{aligned} p_1 &< 2^{n_0+1}\\ p_2 &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\ &\vdots\\ p_{k+1} &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right)+1\end{aligned}$$

設 $q \le 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_{k+1}^{n_{k+1}}$ 且 $q \in \mathbb{N}$

令 $q = a_0 + a_1p_{k+1} + a_2pk + 1^2 + \cdots + a_np_{k+1}^{n_{k+1}} = \sum_{i=0}^{n_{k+1}} a_ip_{k+1}^i$

$0 \le a_{n_{k+1}} \le 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k},\ 0 \le a_i < p_{k+1},\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{k+1}-1)$

$\Rightarrow a_i \le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{令}a_0 &= b_{0_1} + b_{0_2} + \cdots + b_{0_{m_0}} = \sum_{i=1}^{m_0} b_{0_i},\ b_{0_i}|x_i \Rightarrow b_{0_i}|x_2 \\
a_1 &= b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_{m_1}} = \sum_{i=1}^{m_1} b_{1_i},\ b_{1_i}|x_1 \Rightarrow b_{1_i}p_{k+1}|x_2 \\
&\vdots \\
a_{n_{k+1}} &= b_{n_{k+1_1}} + b_{n_{k+1_2}} + \cdots + b_{n_{k+1_{m_{n_{k+1}}}}} = \sum_{i=1}^{m_{n_{k+1}}} b_{n_{k+1_i}},\ b_{n_{k+1_i}}|x_1 \Rightarrow b_{n_{k+1_i}}p_{k+1}^{n_{k+1}}|x_2 \\
\Rightarrow q &= \left(b_{0_1} + b_{0_2} + \cdots + b_{0_{m_0}}\right) + \left(b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_{m_1}}\right)p_{k+1} \\
&\quad + \left(b_{2_1} + b_{2_2} + \cdots + b_{2_{m_2}}\right)p_{k+1}^2 + \cdots + \left(b_{n_{k+1_1}} + b_{n_{k+1_2}} + \cdots + b_{n_{k+1_{m_{n_{k+1}}}}}\right)p_{k+1}^{n_{k+1}}
\end{aligned}
$$

$b_{0_i} \ne b_{1_i}p_{k+1} \ne b_{2_i}p_{k+1}^2 \ne \cdots \ne b_{n_{1_i}}p_{k+1}^{n_{k+1}},\ \therefore 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_{k+1}^{n_{k+1}} \in G$

$\therefore$ 當 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ 為 x 之標準分解式，且

$$
\begin{aligned}
p_1 &< 2^{n_0+1} \\
p_2 &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right) + 1 \\
&\vdots \\
p_{k+1} &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right) + 1
\end{aligned}
$$

則 $x \in G$ 由數學歸納法得證。 □

註：此性質參考自 [5] 。

在上述之研究中，我發現了另一性質，舉例說明如下：12 為好數，12 的因數有：1, 2, 3, 4, 6, 12 ，$1+2+3+4+6+12 = 28$ ，$1 \sim 28$ 皆可表示為 12 之部分相異因數和。

定理 14. *若正整數 x 之標準分解式為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ ，其中*

$$
\begin{aligned}
p_1 &< 2^{n_0+1} \\
p_2 &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right) + 1 \\
&\vdots \\
p_m &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right) + 1
\end{aligned}
$$

則 $1 \sim \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)$

皆可表示為 x 之部分相異因數和。

Proof.

當 $m = 1,\ x_0 = 2^{n_0}p_1^{n_1}$ ，且 $p_1 < 2^{n_0+1}$

$$
\begin{aligned}
\text{設}q &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right) \text{ 且}1 \in \mathbb{N} \\
q &\le (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right) = \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n_1}\right)
\end{aligned}
$$

令 $q=a_0+a_1p_1+a_2p_1^2+\cdots+a_{n_1}p_1^{n_1}=\sum_{i=0}^{n_1}a_ip_1^i,\ 0\le a_i\le 2^{n_0+1}-1$

$$\begin{aligned}
令 a_0 &= b_{0_1}+b_{0_2}+\cdots+b_{0_{m_0}}=\sum_{i=1}^{m_0}b_{0_i},\ b_{0_i}|2^{n_0}\Rightarrow b_{0_i}|2^{n_0}p_1^{n_1}\\
a_1 &= b_{1_1}+b_{1_2}+\cdots+b_{1_{m_1}}=\sum_{i=1}^{m_1}b_{1_i},\ b_{1_i}|2^{n_0}\Rightarrow b_{1_i}p_1|2^{n_0}p_1^{n_1}\\
&\vdots\\
a_{n_1} &= b_{n_{1_1}}+b_{n_{1_2}}+\cdots+b_{n_{1_{m_{n_1}}}}=\sum_{i=1}^{m_{n_1}}b_{n_{1_i}},\ b_{n_{1_i}}|2^{n_0}\Rightarrow b_{n_{1_i}}p_1^{n_1}|2^{n_0}p_1^{n_1}\\
\Rightarrow q &= \left(b_{0_1}+b_{0_2}+\cdots+b_{0_{m_0}}\right)+\left(b_{1_1}+b_{1_2}+\cdots+b_{1_{m_1}}\right)p_1\\
&\quad+\left(b_{2_1}+b_{2_2}+\cdots+b_{2_{m_2}}\right)p_1^2+\cdots+\left(b_{n_{1_1}}+b_{n_{1_2}}+\cdots+b_{n_{1_{m_{n_1}}}}\right)p_1^{n_1}
\end{aligned}$$

又 $b_{0_i}\ne b_{1_i}p_1\ne b_{2_i}p_1^2\ne\cdots\ne b_{n_{1_i}}p_1^{n_1}$

$\therefore 1\sim\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)$ 皆可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}$ 之部分相異因數和

設 $m=k$ 時，$x_1=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ ，且

$$\begin{aligned}
p_1 &< 2^{n_0+1}\\
p_2 &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\
&\vdots\\
p_k &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1
\end{aligned}$$

且

$$1\sim\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)$$

皆可表示為 x_1 之部分相異因數和。
當 $m=k+1, x_2=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_{k+1}^{n_{k+1}}, x_2=x_1p_{k+1}^{n_k+1},\ x_1|x_2$
且

$$\begin{aligned}
p_1 &< 2^{n_0+1}\\
p_2 &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\
&\vdots\\
p_{k+1} &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right)+1
\end{aligned}$$

設

$$\begin{aligned}
q &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k+1}^{n_{k+1}+1}-1}{p_{k+1}-1}\right)+1\\
&= \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right)\left(1+p_{k+1}+p_{k+1}^2+\cdots+p_{k+1}^{n_{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

令 $q=a_0+a_1p_{k+1}+a_2p_{k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}p_{k+1}^{n_{k+1}}=\sum_{i=0}^{n_{k+1}}a_ip_{k+1}^i$

且 $0\le a\le\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\dfrac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right)$

$\because 1 \sim (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}\right)$ 皆可表示為 g 之部分相異因數和。

$$\begin{aligned}
\text{令}a_0 &= b_{0_1}+b_{0_2}+\cdots+b_{0_{m_0}}=\sum_{i=1}^{m_0} b_{0_i},\ b_{0_i}|x_1 \Rightarrow b_{0_i}|g_2 \\
a_1 &= b_{1_1}+b_{1_2}+\cdots+b_{1_{m_1}}=\sum_{i=1}^{m_1} b_{1_i},\ b_{1_i}|x_1 \Rightarrow b_{1_i}p_{k+1}|g_2 \\
&\vdots \\
a_{n_{k+1}} &= b_{n_{k+1_1}}+b_{n_{k+1_2}}+\cdots+b_{n_{k+1_{m_{n_1}}}} = \sum_{i=1}^{m_{n_{k+1}}} b_{n_{k+1_i}},\ b_{n_{k+1_i}}|x_1 \Rightarrow b_{n_{k+1_i}}p_{k+1}^{n_{k+1}}|x_2 \\
\Rightarrow q &= \left(b_{0_1}+b_{0_2}+\cdots+b_{0_{m_0}}\right)+\left(b_{1_1}+b_{1_2}+\cdots+b_{1_{m_1}}\right)p_{k+1}1 \\
&\quad +\left(b_{2_1}+b_{2_2}+\cdots+b_{2_{m_2}}\right)p_{k+1}^2+\cdots+\left(b_{n_{k+1_1}}+b_{n_{k+1_2}}+\cdots+b_{n_{k+1_{m_{n_{k+1}}}}}\right)p_{k+1}^{n_{k+1}}
\end{aligned}$$

又 $b_{0_i} \neq b_{1_i}p_1 \neq b_{2_i}p_1^2 \neq \cdots \neq b_{n_{1_i}}p_1^{n_1}$

$\therefore 1 \sim (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k+1}^{n_{k+1}+1}-1}{p_{k+1}-1}\right)$

皆可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_{k+1}^{n_{k+1}}$ 之部分相異因數和

故，若正整數 x 之標準分解式為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ ，其中

$$\begin{aligned}
p_1 &< 2^{n_0+1} \\
p_2 &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1 \\
&\vdots \\
p_m &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_m^{n_m+1}-1}{p_m-1}\right)+1
\end{aligned}$$

則 $1 \sim (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)$

皆可表示為 x 之部分相異因數和，由數學歸納法得證。 □

定理 15. *若* $g \in G$ ，$2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ *為* g *之標準分解式，*

$$\begin{aligned}
p_1 &< 2^{n_0+1} \\
p_2 &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1 \\
&\vdots \\
p_m &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)+1
\end{aligned}$$

Proof.

設 $g \in G,\ 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m n_m$ 為 g 之標準分解式,但存在一 p_k ，使得

$$p_k \leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1$$

其中 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$

$\because g \in G$ 且 $(2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1 < g$

$\therefore (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1$ 可表示為 g 之部分相異因數和。

$a_i|g$ ，且 $a_i \leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1$
則

$$\begin{aligned}\sum a_i &= (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)\\ &< (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1\end{aligned}$$

$\therefore (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{k-1}^{n_{k-1}+1}-1}{p_{k-1}-1}\right)+1$ 無法表示為 g 之部分相異因數和與好數定義矛盾。故原假設錯誤，此命題得證。 □

從上述的證明，我得到: 若將一好數 g 表徵為標準分解式形式，即 $g = 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ ，則必

$$\begin{aligned}p_1 &< 2^{n_0+1}\\ p_2 &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\ &\vdots\\ p_m &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)+1\end{aligned}$$

即

$$p_i \leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{i-1}^{n_{i-1}+1}-1}{p_{i-1}-1}\right)+1\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$$

必然成立。又，若一正整數可表徵為標準分解式形式，即 $k = 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$，且

$$\begin{aligned}p_1 &< 2^{n_0+1}\\ p_2 &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1\\ p_3 &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)+1\\ &\vdots\\ p_m &\leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)+1\end{aligned}$$

則必 $k \in G$ 。

結論.

$$\begin{aligned}&2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m} \in G\\ \Leftrightarrow\ &p_i \leq (2^{n_0+1}-1)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{i-1}^{n_{i-1}+1}-1}{p_{i-1}-1}\right)+1\\ &(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)\end{aligned}$$

3 結語

3.1

在進行一系列的探討時，我花了相當長的時間觀察程式跑出的數百個好數，先看到偶數，再看到 $2^n \times p$ 等。

過程中我一度碰到瓶頸，不知如何再進行，後來藉由因數、質因數分解，再想到完美數，所以探討暫停，我花了時間研讀有關完美數的相關研究及資料。

因為發覺偶完美數有通式可循，故，至此確立了我的研究方向往質數、質因數分解去進一步試著尋找好數的特質。

本研究重要結論如下：

定理 10. $p_1 < 2^{n_0+1}$ ，且 $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)(p_1+1)+1 \Leftrightarrow 2^{n_0}p_1p_2 \in G$ 。

定理 11. $p_1 < 2^{n_0+1}$ ，且 $p_2 \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}+1}{p_1-1}\right)+1 \Leftrightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G$ 。

定理 12. $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2 \in G \Leftrightarrow 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \in G$

定理 13. $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ 為 g 之標準分解式，

$$p_i \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{i-1}^{n_{i-1}+1}-1}{p_{i-1}-1}\right)+1 \ \ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$$

$\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\dfrac{p_m^{n_m+1}-1}{p_m-1}\right)$ 為 g 所有因數和。則

$$1 \sim \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\frac{p_m^{n_m+1}-1}{p_m-1}\right)$$

皆可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ 之部分相異因數和。

定理 15.

$$\begin{aligned} & 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m} \in G \\ \Leftrightarrow\ & p_i \le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{i-1}^{n_{i-1}+1}-1}{p_{i-1}-1}\right)+1 \\ & (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m) \end{aligned}$$

經過我努力不懈的研究後，除了找出了好數的一些性質，並且成功地推導出能夠快速判定好數的方式：

若一正整數 k 可表徵為標準分解式 $k = 2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ ，其中

$$\begin{aligned} p_1 &< 2^{n_0+1} \\ p_2 &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)+1 \\ &\vdots \\ p_m &\le \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_{m-1}^{n_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right)+1 \end{aligned}$$

，則 k 為好數。

當 $k=2$ 或 k 為 4 或 6 的倍數，才需判定 k，這樣大幅提升判定好數的速度。

我研究中也發現：好數的部分相異因數和可表示的範圍不只有 1 ∼ 其本身，若 $g \in G$ 且 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ 為 g 之標準分解式，則 $1 \sim \left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\dfrac{p_m^{n_m+1}-1}{p_m-1}\right)$ 皆可表示為 $2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$ 之部分相異因數和，其中 $\left(2^{n_0+1}-1\right)\left(\dfrac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\dfrac{p_m^{n_m+1}-1}{p_m-1}\right)$ 為 g 之所有因數和。

3.2 展望

一、 我推估好數沒有一般項或遞迴關係式，但尚且沒辦法證明出好數沒有一般項或遞迴關係式。如果我推估錯誤，我希望可以找出其一般項或遞迴關係式。

二、

1. 在研究的過程中，我曾經想過: 如果我將好數的定義中的因數不侷限在正整數內，即負整數因數也列入考慮，是否會產生出更多的好數呢? 又，是否會有更多我尚未發現的性質呢?
2. 重新定義好數：
$n \in \mathbb{N}$ ，$k \in \mathbb{N}$ ，$1 \leq k \leq n$ ，若 $\forall k$ 可表示為 n 之部分相異因數和（包括負整數因數），則 n 為好數；反之則為非好數；

   例題. $3 : 1 = 1,\ 2 = 3 + (-1),\ 3 = 3$ ，*則* 3 *為好數。*
3. 就目前的觀察及檢測我發現到：
取一奇好數（新定義）與一偶好數（新定義），兩數之乘積為原定義下的好數。
這個性質經由程式所跑出的數字在範圍最大至 50000 ，檢測後發現都符合，而這個性質我目前尚未有證明。

4 參考文獻

1. 2002 加拿大數學奧林匹亞試題,2 - 2。
2. Srinivasan.A.K,(1948),“ PRACTICAL PRETENDERS ”。
3. (2021) 維基百科完美數, 取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E6%95%B0
4. Weisstein,Eric W, “ Practical Number”, 取自 https://mathworld.wolfram.com/PracticalNumber.html
5. ”Pratical Number”,PlanetMath, 取自 https://planetmath.org/PracticalNumber