

探討單位電阻排列有理數值

臺北市立建國高級中學 洪胤軒

指導老師：黃世穎

Abstract

This project discussed issues about equivalent resistance. The main problem was how many required-resistors should be used to construct a value which is a positive rational number. I read an article[5] about continued fractions, discovering a correspondence between resistance and dividing rectangle into squares. Therefore, complex calculation of resistance was turned into an interesting and vivid model. I used the model to proof many formulas. When resistance was large enough, we found that the value followed $f(x+1) = f(x) + 1$. In addition, we successfully used unit resistors to construct the ratio of consecutive items of Fibonacci sequence, Pell sequence, and Catalan number. The numerator and the denominator of resistance were closely related to Fibonacci sequence.

中文摘要

本研究探討等效電阻值的相關問題。在讀一篇有關連分數的文章 [5] 時，我看到連分數與矩形切割成正方形的對應關係，即為本研究的連分數構造法，隨即找到了電阻值和串並聯與矩形切割成正方形的對應關係，將複雜的電阻運算對應成有趣又生動的模型，並用此模型證明出許多定理。當電阻值夠大時，找到最小構造法的遞迴關係式 $f(x+1) = f(x) + 1$ 。此外，我們成功使用單位電阻排列出費氏數列、佩爾數列、卡特蘭數，其中費氏數列與電阻值的分子和分母有密切的關係。

1 簡介 (Introduction)

1.1 研究動機

在學習電路學的過程中，常常要求一張電路圖中數個電阻的等效電阻值，若這些電阻只以串並聯排列，等效電阻值只需以簡單的加法和乘法計算；然而，我試著將此問題顛倒，變成「給定一個有理數，最少要用多少個單位電阻以串並聯排列，使得等效電阻值為此有理數？」，發現這個簡單的問題背後卻非常複雜，因此引起我研究此問題之興趣。

1.2 研究目的

1. 尋找最小構造法函數 $f(x)$ 和電阻排序函數 $R(n, k)$ 的遞迴關係式。
2. 找到所有有理數的最小構造法 $f(x)$ 。
3. 找到所有有理數的其他所有可能構造法。
4. 求出電阻排序函數 $R(n, k)$ 。
5. 找出常見數列與最小構造法函數 $f(x)$ 的關係。

1.3 名詞定義

1.3.1 串聯、並聯

定義串聯運算符號為加法符號 $+$ ，兩個電阻值 R_1 和 R_2 做串聯得到的電阻值為 $R_1 + R_2$ ；定義串聯運算符號為 $\parallel$ ，兩個電阻值 R_1 和 R_2 做串聯得到的電阻值為

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

即

$$R_1 \parallel R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

1.3.2 最小構造法函數 $f(a)$

設 a 為正有理數，若欲得等效電阻值為 a 最少要用 n 個單位電阻進行串並聯，則 $f(a) = n$ ，並且稱 n 個單位電阻構造出電阻值 a 的方法為 a 的**最小構造法**。我們有以下性質：

性質 1. 對於 $a, b \in \mathbb{Q}^+$ ， $f(a) + f(b) \geq f(a + b)$ 。

Proof.

用反證法，若 $f(a) + f(b) < f(a + b)$ ，則對於有理數 $a + b$ ，我們將 a, b 串聯，於是找到了用 $f(a) + f(b)$ 個單位電阻構造出 $a + b$ 。□

1.3.3 電阻使用效率函數 $\sigma(a)$

定義 $\sigma(a) = \frac{f(a)}{a}$ 。 $\sigma(a)$ 越大代表平均使用較多單位電阻，效率較低。

1.3.4 電阻數列 $A(n)$

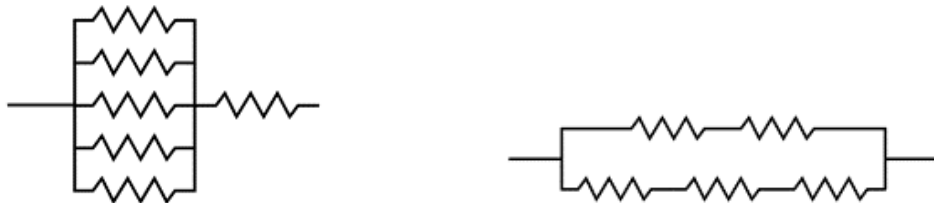
定義數列 $\langle A(n) \rangle$ 為 n 個單位電阻串並聯後得到的相異等效電阻值個數。由文獻[4]可知， $\langle A(n) \rangle$ 尚未有一般式，目前只知道 $A(1)$ 到 $A(27)$ 的值。例如：3個電阻可以排出 $3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ ，因此 $A(3) = 4$ 。

1.3.5 電阻排序函數 $R(n, k)$

令 n, k 為正整數，且 $k \leq A(n)$ ，定義 $R(n, k)$ 為 n 個單位電阻排出的 $A(n)$ 個等效電阻值中第 k 大的。例如： $R(3, 1) = 3, R(3, 2) = \frac{3}{2}, R(3, 3) = \frac{2}{3}, R(3, 4) = \frac{1}{3}$ 。

1.3.6 串並表達式

定義**串並表達式**為數個1以 $+$ 和 $\parallel$ 運算並用小括號表示運算順序，對應數個單位電阻串並聯的一張電路圖與一等效電阻值，然而多個相異的串並表達式所代表的等效電阻值可能相同。例如： $\frac{6}{5} = (((1 \parallel 1) \parallel 1) \parallel 1) \parallel 1 + 1$ （左下圖）和 $\frac{6}{5} = (1 + 1) \parallel ((1 + 1) + 1)$ （右下圖）為 $\frac{6}{5}$ 的兩種串並表達式。

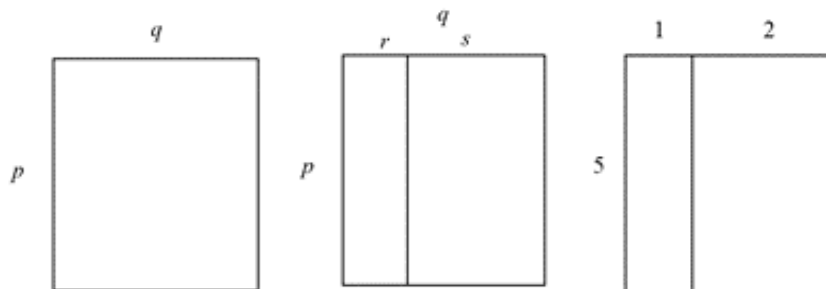


1.3.7 變換

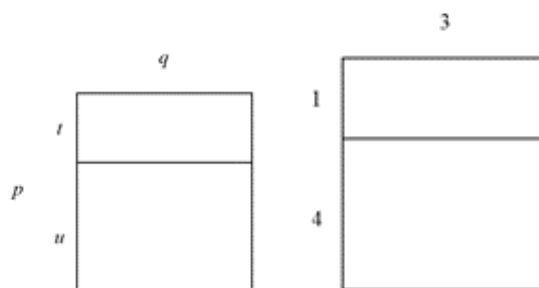
對於一條串並表達式，將一個 $+$ 改為 $\parallel$ 稱為**串聯變換**，將一個 $\parallel$ 改為 $+$ 稱為**並聯變換**。

1.3.8 幾何模型

如左下圖，對於一個長為 q 、寬為 p 的矩形，假設其對應代表的電阻值為有理數 $\frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ 。特別地，當 $p = q$ 時形成的矩形代表單位電阻。若 $p = 1$ ，我們稱此幾何模型為**基本幾何模型**。設 $q = r + s$ ，其中 $r, s \in \mathbb{N}$ 。如中下圖，在矩形的長上距左側 r 處直的切一刀，則左側矩形長為 r 、寬為 p ，右側矩形長為 s 、寬為 p ，對應出 $\frac{q}{p}$ 是由 $\frac{r}{p}$ 和 $\frac{s}{p}$ 串聯而來。例如右下圖為 $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ 。

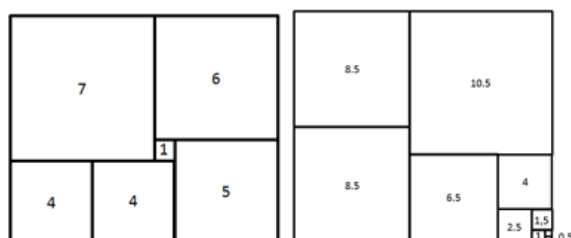


設 $p = t + u$ ，其中 $t, u \in \mathbb{N}$ 。如左下圖，在矩形寬上距上方 t 處橫的切一刀，則上方矩形長為 q 、寬為 t ，右側矩形長為 q 、寬為 u ，對應出 $\frac{q}{p}$ 是由 $\frac{q}{t}$ 和 $\frac{q}{u}$ 並聯而來。例如右下圖為 $\frac{3}{5} = \frac{3}{1} \parallel \frac{3}{4}$ 。



對於一串並表達式的每步，都可對應到將一塊完整的矩形分割為兩部分，也就是說一串並表達式可以對應到一個矩形，此矩形被切成若干個正方形，這些正方形不重疊，且其切法是一步切一刀。

因此不是所有的矩形切成了正方形就可對應一串並表達式，例如左下圖無法對應到任何串並表達式，其中正方形中的數值代表正方形的邊長，因為你找不到切此矩形的第一刀使得矩形分為兩部分。

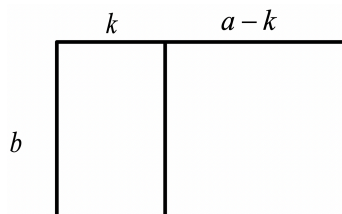


只要符合上述一刀一刀的切法，串並表達式對應的幾何模型中正方形邊長可以是有理數，在一些情況下，一個有理數的最小構造法可以切出「非整數邊」長的正方形，右上圖為 $\frac{19}{17}$ 的例子，類似的情況還有 $\frac{25}{23}, \frac{31}{29}, \frac{43}{41}$ 。

然而進一步探討正方形邊長的性質，會發現切不出無理數的邊長。

性質 2. 串並表達式對應的幾何模型中，正方形邊長不可能是無理數。

Proof. 用反證法，首先我們可以確定若干個單位電阻進行串並聯的等效電阻值為有理數。假設有一個串並表達式對應幾何模型中存在一個邊長為無理數的正方形 S ，我們考慮包含 S 的矩形中邊長皆是有理數且面積最小的，將 S 分割為兩部分的那刀一定是切在邊長不為有理數的點上，如下圖， $a, b \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ，那麼我們就會得到若干個單位電阻進行串並聯得到等效電阻值 $\frac{k}{b}$ ，而 $\frac{k}{b} \notin \mathbb{Q}$ ，因此矛盾。



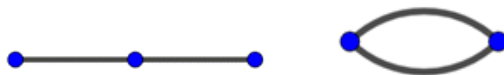
□

1.3.9 圖論模型

對於一個單位電阻，他的圖論模型是一線段且兩端各有一個點，左邊的點稱為它的頭，右邊的點稱為尾，如左下圖。



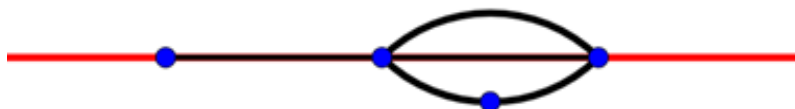
如果兩個單位電阻進行串聯，則左邊模型的尾與右邊模型的頭相接，如左下圖；如果兩個單位電阻進行並聯，則將兩模型的頭相接、尾相接，如右下圖。



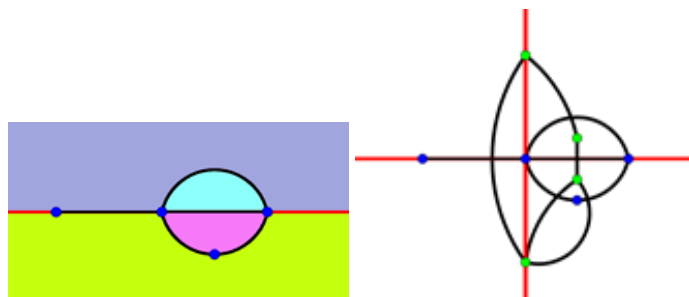
將數個單位電阻進行串並聯得到一個模組。如果將兩個模組進行串聯，則連接左邊模組的圖論模型的尾與後面模組的圖論模型的頭；如果要將兩個模組進行並聯，則將兩模組的圖論模型的頭相接、尾相接。以下以 $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}}$ 舉例。

電路圖	幾何模型	圖論模型

定義一圖論模型中的軸為過兩端點的直線，且此圖若可以分割為許多的模組串聯，則每個模組的兩端點也都在軸上。例如下圖的紅線極為它的軸。



參考資料 [10]，定義圖論模型中的對偶圖：原圖的邊以及圖外的軸將平面分割為許多區域，對於每個區域中恰有一個對偶圖的點；對於原圖中的每條邊，其兩側區域中各有一個對偶圖的點，在此兩點間連一條過此邊的線，此線為對偶圖的邊。
以下面兩張圖為例，原圖使用藍色的點，其對偶圖使用綠色的點。左下圖用四種顏色標示出此圖有四個獨立的區域，而在右下圖中，我們在每個區塊標出一個綠點，並且對於原圖的五條邊都用一條邊連結兩側的點。



2 研究內容 (Main Body)

2.1 n 個單位電阻排出的所有等效電阻值 ($n = 1 \cdots 5$)

n	$A(n)$	由 n 個單位電阻排列出的所有等效電阻值 (按大小排列)
1	1	1
2	2	$2, \frac{1}{2}$
3	4	$3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
4	9	$4, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}$
5	22	$1, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{7}{5}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{4}{8}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{5}$
6	53	$6, \frac{9}{2}, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \frac{13}{7}, \frac{11}{6}, \frac{9}{5}, \frac{12}{7}, \frac{13}{8}, \frac{11}{7}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{11}{8}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}, 1, \frac{10}{11}, \frac{9}{10}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{8}{11}, \frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{7}{13}, \frac{6}{12}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \frac{4}{11}, \frac{5}{12}, \frac{3}{9}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}$

2.2 基本構造法

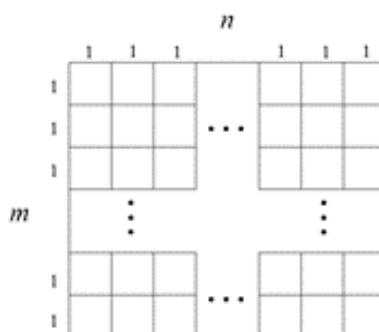
Step 1 : $n = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ 個}}$ ，即將 n 個單位電阻串聯成等效電阻為 n 的構造

Step 2 : 重複 Step1 m 次，得到 m 組值均為 n 的等效電阻。

Step 3 : 將 m 組值為 n 的等效電阻進行並聯可得等效電阻為 $\frac{n}{m}$ ，說明如下：

$$\overbrace{n \parallel n \parallel \cdots \parallel n}^{m \text{ 個}} = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}} = \frac{n}{m}$$

此構造法的幾何模型即為將長為 n 、寬為 m 的幾何模型切割成 mn 個 1×1 小正方形，如下圖。



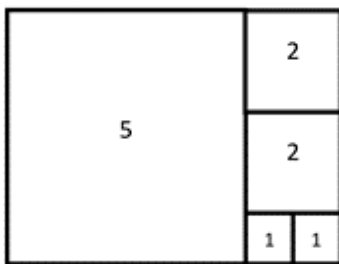
2.3 連分數構造法

假設現有互質正整數 m, n ，我們可以構造一種用有限個電阻串並聯出一電路圖使等效電阻為 $\frac{n}{m}$ 。構造如下：

- (一) 若 $m|n$ ，則串聯 $\frac{n}{m}$ 個單位電阻。
- (二) 若 $n|m$ ，則並聯 $\frac{n}{m}$ 個單位電阻。
- (三) 若 $m \nmid n, n \nmid m, n > m$ ，則串聯 $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor, \left\{ \frac{n}{m} \right\}$ ，其中 $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ 為高斯符號， $\left\{ \frac{n}{m} \right\} = \frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ 。由定理 4 知 $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ 至少要 $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ 個電阻，我們再對 $\left\{ \frac{n}{m} \right\}$ 重新判斷找到其連分數構造法。
- (四) 若 $m \nmid n, n \nmid m, m > n$ ，則並聯 $\frac{1}{\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor}, \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ ，因為 $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ 為正整數，由定理 4 知 $\frac{1}{\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor}$ 至少要 $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ 個電阻，我們再對 $\left\{ \frac{m}{n} \right\}$ 重新判斷找到其連分數構造法。不斷重複此判斷法直到找到所有未知數的連分數構造法。

連分數構造法的幾何模型如下：在長為 n 、寬為 m 的矩形中，對於 m, n 中較小的數，不妨假設為 m ，則畫一個 $m \times m$ 的正方形，然後對剩下的 $(n-m) \times m$ 矩形再重新判斷，直到整張圖都被分割為若干個正方形，參考網路文章 [5]，此幾何模型分割法即為連分數之幾何對應。

例如： $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \left(1 \parallel 1 \parallel \frac{1}{2}\right) = 1 + (1 \parallel 1 \parallel (1+1))$ 。



2.4 倒數定理

引理 1.

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} \parallel \frac{1}{b} \right) = 1$$

Proof.

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} \parallel \frac{1}{b} \right) = (a+b) \left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) = (a+b) \left(\frac{1}{a+b} \right) = 1$$

□

定理 1.

對等效電阻為正有理數 $\frac{q}{p}$ 的串並表達式中的所有 $+$ 與 $\parallel$ 都作一次變換，則新的串並表達式的等效電阻為 $\frac{p}{q}$ 。

舉例.

$$\begin{cases} ((1+1) \parallel 1 \parallel 1) + 1 = (2 \parallel 1 \parallel 1) + 1 = \left(\frac{2}{3} \parallel 1 \right) + 1 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5} \\ ((1 \parallel 1) + 1 + 1) \parallel 1 = \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 \right) \parallel 1 = \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \parallel 1 = \frac{5}{2} \parallel 1 = \frac{7}{5} \end{cases}$$

這裡我們提供了兩種不同的證明方式。

Proof 1.

我們想要用強數學歸納法來證明 n 個 1 (單位電阻) 組成的串並表達式都滿足此定理。

(1) $n = 1$ 時顯然正確。

(2) $n = 2$ 時只有 $\begin{cases} 1 + 1 = 2 \\ 1 \parallel 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ 兩種構造，顯然 $n = 2$ 成立。

(3) 假設 $\forall k < n, k \in \mathbb{N}$ 時定理成立，當 $n = k$ 時，考慮任一個有 k 個 1 的串並表達式，假設其等效電阻為 r ，我們可以針對此表達式最後一個運算步驟分成以下兩種狀況討論：

Case 1：最後一步是串聯，假設串聯的兩側的等效電阻為 r_1, r_2 ，即 $\frac{q}{p} = r_1 + r_2$ ，且分別用了 a_1, a_2 個電阻，即 $a_1 + a_2 = k$ ，當我們對此串並表達式的 $+, \parallel$ 交換後，最後一步的串聯改為並聯，因為 $a_1, a_2 < k$ ，因此由數學歸納法知並聯兩側的等效電阻變為 $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ ，新的串並表達式的等效電阻為 $\frac{1}{\frac{1}{r_1} \parallel \frac{1}{r_2}}$ ，由引理 1 知

$$\frac{1}{r_1} \parallel \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1 + r_2} = \frac{p}{q}$$

，得證。

Case 2：最後一步是並聯，假設並聯的兩側的等效電阻為 r_1, r_2 ，即 $\frac{q}{p} = r_1 + r_2$ ，且分別用了 a_1, a_2 個電阻，即 $a_1 + a_2 = k$ ，當我們對此串並表達式的 $+, \parallel$ 交換後，最後一步的並聯改為串聯，因為 $a_1, a_2 < k$ ，因此由數學歸納法知並聯兩側的等效電阻變為 $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ ，新的串並表達式的等效電阻為 $\frac{1}{\frac{1}{r_1} \parallel \frac{1}{r_2}}$ ，由引理 1 知

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1 \parallel r_2} = \frac{p}{q}$$

，得證。

因此 $\forall n \in \mathbb{N}$ ，任意 n 個 1 所組成的串並表達式都滿足此定理。 $\square$

Proof 2.

將 $\frac{q}{p}$ 套用至幾何模型上，按照其串並表達式的步驟分割長 q 寬 p 。將 $+$ 與 $\parallel$ 置換，即是將整個矩形旋轉 90° ，因此可以得到 $\frac{p}{q}$ 。 $\square$

推論 1.

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{q}{p}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Proof.

由定理 1 知 $\frac{q}{p}$ 的任一串並表達式經由 $+, \parallel$ 互換後可得到 $\frac{p}{q}$ 。我們使用反證法，假設 $y = f(q)$ ，那麼 q 最少用 y 個單位電阻構造，且由定理 1 知 $\frac{p}{q}$ 也可以用 y 個單位電阻構造，所以 $f\left(\frac{p}{q}\right) \leq y$ ，若 $f\left(\frac{p}{q}\right) = z < y$ ，那麼再由定理 1 知 $\frac{q}{p}$ 可以用 z 個單位電阻構造，與 $f\left(\frac{q}{p}\right) = y > z$ 矛盾，因此

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = y = f\left(\frac{q}{p}\right)$$

$\square$

推論 2.

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, k \leq A(n) \Rightarrow R(n, k) \times R(n, A(n) - k) = 1$$

Proof.

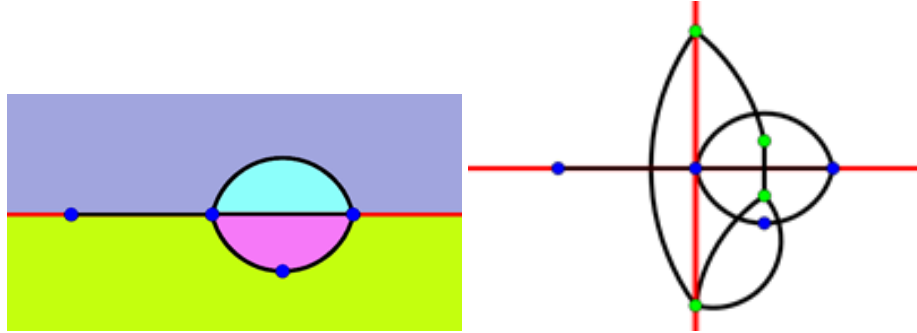
因為 n 個單位電阻排出的等效電阻值中，可以找到 $\frac{q}{p}$ 和 $\frac{p}{q}$ 的對應，所以最大和最小的等效電阻值是倒數關係，第二大和第二大也是倒數關係，因此全部的電阻值以中位數對稱作對應。 $\square$

推論 3.

將一串並表達式的 $+$ 和 $\parallel$ 都作一次變換等價它的圖論模型的對偶圖。

Proof.

因為原圖每條邊恰與對偶圖的一條邊交叉，因此兩圖的邊數相同。再來用強數學歸納法來證明 n 個 1（單位電阻）組成的串並表達式都滿足此推論，證明方法同定理一證明一，因此省略。 $\square$



2.5 變換定理

引理 2.

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow a + b > a > a \parallel b$$

Proof.

$a + b > a$ 成立，而右式因為

$$a \parallel b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b} < \frac{a(a+b)}{a+b} = a$$

所以成立。 $\square$

引理 3.

將電阻值 x, y 串聯成等效電阻值 R 、並聯成等效電阻值 r ，其中 $x, y \in \mathbb{Q}^+, R = x + y, r = x \parallel y$ ，若固定 x ，則 R 和 r 隨 y 增大而增大、減小而減小。

Proof.

串聯之引理顯然成立。 x, y 並聯時，令 $r' = x + y'$ ，若 $y' < y$ ，

$$r' = x \parallel y' = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y'}} < \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = x \parallel y = r$$

，反之亦然，因此定理證畢。 $\square$

定理 2. 若將一串並表達式作串聯變換，則等效電阻值降低；反之，若將一串並表達式作並聯變換，則等效電阻值增加。

Proof.

先考慮串聯變換：

Case 1：只有電阻值 a, b 串聯，其中 $a, b \in \mathbb{Q}^+$ ，對 a, b 間的串聯做串聯變換，由引理 2 知 $a + b > a \parallel b$ ，因此定理成立。

Case 2：當一串並表達式局部被作串聯變換後，由 Case 1 知此局部減小，並由引理 3 知不論前面為串聯或並聯，外面一層層都會減小，所以總等效電阻值會減小。反之亦然，所以並聯變換會讓等效電阻值增加。 $\square$

2.6 整數定理

定理 3.

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow R(n, 1) = n$$

Proof.

我們考慮 n 個單位電阻串聯 (沒有並聯) 的電阻表達式，由變換定理，作了一次串聯變換後，等效電阻值降低，而作了多次串聯變換後，等效電阻值會不斷降低，因此初始的 n 個單位電阻串聯才是最大的。 $\square$

定理 4.

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n$$

Proof.

因為 n 個單位電阻串聯的等效電阻為 n ，所以 $f(n) \leq n$ 。使用反證法，若 $y = f(n) < n$ ，然而由定理 3 知 y 個單位電阻所能排出的最大等效電阻為 y ，且 $y < n$ ，因此 y 個電阻無法經由串並聯排出等效電阻 n ，矛盾，因此 $f(n) = n$ ，且由定理 1 知 $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(n) = n$ 。 $\square$

推論 4.

$$\forall m \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow f(m) \geq \lceil m \rceil$$

Proof.

由定理 4，因為 $\lceil m \rceil$ 個單位電阻最大只能排出電阻值 $\lceil m \rceil$ ，所以要構造出電阻值 m 至少要使用 $\lceil m \rceil$ 個單位電阻。 $\square$

推論 5.

$$\forall m \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sigma(m) \geq 1$$

Proof.

由推論 3， $\sigma(m) = \frac{f(m)}{m} \geq \frac{\lceil m \rceil}{m} \geq 1$ $\square$

2.7 電阻排列費波那契數列

2.7.1 定義

費波那契數遞迴式

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \end{cases}$$

我們稱 $\langle F_n \rangle$ 為費波那契數列，簡稱費氏數列。

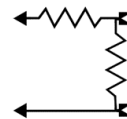
性質 3. $\langle F_n \rangle$ 為費氏數列，則有以下性質：

1. $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ 。
2. $F_{m+1}F_{n-m+1} + F_mF_{n-m} = F_{n+1}$ ，其中 $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ 。

2.7.2 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 的連分數構造法

參考自文獻 [9]， $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 的連分數可表為 $[1; \overbrace{1, \dots, 1}^{n-1 \text{ 個}}]$ ，因此其連分數構造法為以下漂亮的形式：

我們將兩個電阻拼成如右圖的單位，類似於一塊積木，當 $n = 2k - 1$ 時，將上述單位拼接 k 個，其中最右邊的單位只有一個電阻，如下圖。



k 組，共 $2k-1$ 個電阻



當 $n = 2k$ 時，將上述單位拼接 k 個，如下圖。

k 組，共 $2k$ 個電阻



2.7.3 分子分母上界定理

定理 5.

$\langle F_n \rangle$ 為費氏數，若 n 個電阻任意排出的最簡有理數 $\frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ ，則 $p \leq F_{n+1}$, $q \leq F_{n+1}$, $p + q \leq F_{n+2}$ 。

Proof.

利用強數學歸納法，當 $n = 1$ 時，顯然成立。

若 $\forall k < n, k \in \mathbb{N}$ 成立，

當 $n = k$ 時，由倒數定理我們只需討論串聯而不用討論並聯，假設電阻值 $\frac{s}{r}$ 和 $\frac{u}{t}$ 串聯成等效電阻值 $\frac{q}{p}$ ，且 $\frac{s}{r}$ 用了 m 個電阻、 $\frac{u}{t}$ 用了 $k - m$ 個單位電阻，已知 $r \leq F_{m+1}$, $s \leq F_{m+1}$, $r + s \leq F_{m+2}$,

$t \leq F_{k-m+1}$, $u \leq F_{k-m+1}$, $t + u \leq F_{k-m+2}$ ，又 $\frac{q}{p} = \frac{s}{r} + \frac{u}{t} = \frac{ru + st}{rt}$ ，因此我們想要證明

$$1. \quad q = ru + st \leq F_{k+1},$$

$$2. \quad p = rt \leq F_{k+1},$$

$$3. \quad p + q = ru + st + rt \leq F_{k+2}$$

1. 因為 $r + s \leq F_{m+2}$, $t + u \leq F_{k-m+2}$ ，所以 $ru + st$ 的最大值會發生在

$$r + s = F_{m+2}, t + u = F_{k-m+2}$$

此時不妨假設 $r + s = F_{m+2}$, $t + u = F_{k-m+2}$ 且 $r \geq s$ 。

又 $r \leq F_{m+1}$, $u \leq F_{k-m+1}$ 可由排序不等式知道 $ru + st$ 的最大值會發生在

$$r = F_{m+1}, u = F_{k-m+1}$$

，所以

$$s = F_{m+2} - r = F_{m+2} - F_{m+1} = F_m$$

且

$$t = F_{k-m+2} - u = F_{k-m+2} - F_{k-m+1} = F_{k-m}$$

，因此

$$q = ru + st \leq F_{m+1}F_{k-m+1} + F_m F_{k-m} = F_{k+1}$$

2.

$$p = rt \leq F_{m+1}F_{k-m+1} \leq F_{m+1}F_{k-m+1} + F_m F_{k-m} = F_{k+1}$$

3.

$$\begin{aligned} p + q &= ru + st + rt \\ &= (r + s)(t + u) - su \\ &\leq F_{m+2}F_{k-m+2} - su \\ &= F_{m+2}F_{k-m+2} - (F_{m+2} - r)(F_{k-m+2} - t) \\ &\leq F_{m+2}F_{k-m+2} - (F_{m+2} - F_{m+1})(F_{k-m+2} - F_{k-m+1}) \\ &= F_{m+2}F_{k-m+2} - F_m F_{k-m} \\ &= F_{k+3} - F_{m+1}F_{k-m+1} - F_m F_{k-m} \end{aligned}$$

□

$$\mathbf{2.7.4} \quad f\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = n$$

定理 6.

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = f\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = n$$

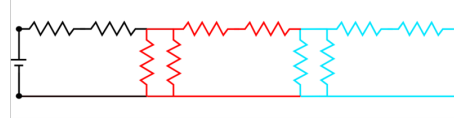
Proof.

用反證法，設 $f\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = n' < n$ ，即用 n' 個單位電阻構造出等效電阻值 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 。因為 $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ，可由定理 5 推出 $F_{n+1} \leq F_{n'+1}$ ，與 $n' < n$ 矛盾。因此 $f\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = n$ ，且由定理 1 推得 $f\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = f\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = n$ 。 □

2.8 電阻排列佩爾數

從參考文件 [2] 中，節錄佩爾數的定義如下：
佩爾數遞迴式

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 2P_{n-1} + P_{n-2}, & n > 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



定義 $\langle b_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$

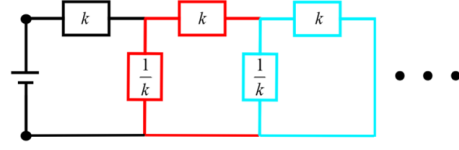
$$b_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \frac{1}{\frac{P_n}{P_{n-1}}} = 2 + \frac{1}{\frac{2P_{n-1} + P_{n-2}}{P_{n-1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}}} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{b_{n-2}}}$$

因此我們可以作出如上圖的構造。

2.9 電阻排列遞迴數列 $\langle R_n \rangle = kR_{n-1} + R_{n-2}$

給定 $k \in \mathbb{N}$ ，定義

$$R_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ kR_{n-1} + R_{n-2}, & n > 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



定義 $\langle c_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{R_{n+1}}{R_n}$

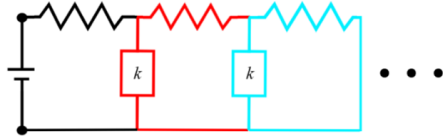
$$c_n = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{kR_n + R_{n-1}}{R_n} = k + \frac{1}{\frac{R_n}{R_{n-1}}} = k + \frac{1}{\frac{kR_{n-1} + R_{n-2}}{R_{n-1}}} = k + \frac{1}{k + \frac{R_{n-2}}{R_{n-1}}} = k + \frac{1}{k + \frac{1}{c_{n-2}}}$$

因此我們可以作出如上圖的構造。

2.10 電阻排列遞迴數列 $\langle R_n \rangle = R_{n-1} + kR_{n-2}$

給定 $k \in \mathbb{N}$ ，定義

$$R_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ R_{n-1} + kR_{n-2}, & n > 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



定義 $\langle c_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{R_{n+1}}{R_n}$

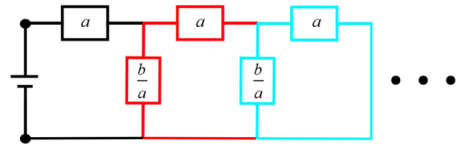
$$c_n = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{R_n + kR_{n-1}}{R_n} = 1 + \frac{1}{\frac{R_n}{kR_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{R_{n-1} + kR_{n-2}}{kR_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{R_{n-2}}{R_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{c_{n-2}}}$$

， $r_1 = 1, r_2 = k + 1$ ，因此我們可以作出如上圖的構造。

2.11 電阻排列遞迴數列 $\langle R_n \rangle = aR_{n-1} + bR_{n-2}$

給定 $k \in \mathbb{N}$ ，定義

$$R_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ aR_{n-1} + bR_{n-2}, & n > 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



定義 $\langle d_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{R_{n+1}}{R_n}$

$$d_n = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{aR_n + bR_{n-1}}{R_n} = a + \frac{1}{\frac{R_n}{bR_{n-1}}} = a + \frac{1}{\frac{aR_{n-1} + bR_{n-2}}{bR_{n-1}}} = a + \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{R_{n-2}}{R_{n-1}}} = a + \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{1}{d_{n-2}}}$$

， $r_1 = a, r_2 = a + \frac{b}{a}$ ，因此我們可以作出如上圖的構造。

2.12 電阻排列卡特蘭數

卡特蘭數

$$C_n = \frac{C_n^{2n}}{n+1} = C_n^{2n} - C_{n+1}^{2n}$$

已知卡特蘭數 C_n ，定義 $\langle e_n \rangle, e_k = \frac{C_{2k}}{C_{2k-1}}, k \geq 3$ ，將 e_k 進一步展開，

$$e_k = \frac{C_{2k}}{C_{2k-1}} = \frac{C_{2k}^{4k} - C_{2k+1}^{4k}}{C_{2k-1}^{4k-2} - C_{2k}^{4k-2}} = \frac{C_{2k}^{4k} - \frac{2k}{2k+1} C_{2k}^{4k}}{C_{2k-1}^{4k-2} - \frac{2k-1}{2k} C_{2k-1}^{4k-2}} = \frac{8k-2}{2k+1} = 3 + \frac{2k-5}{2k+1} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2k-5}{6}}}$$

因此在較大的卡特蘭數可以作出如上圖的構造。

2.13 電阻值為 $\frac{2n-3}{2}$ 的連分數構造法

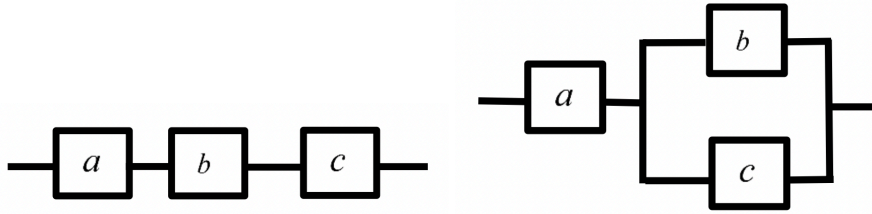
考慮 n 個單位電阻排出的所有等效電阻值，其中 $n > 1$ ，由定理 3 知道，這些電阻值中最大的是 n ，我們想要證明這些電阻值中第二大的是 $\frac{2n-3}{2}$ 。

定理 7.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow R(n, 2) = \frac{2n-3}{2}$$

Proof.

給定 n 個單位電阻，將其全部進行串聯，分為三段分別有 a, b, c 個單位電阻，如左下圖，其中 $a+b+c=n$ 。現在將 b 個單位電阻和 c 個單位電阻由串聯改為並聯，如右下圖，為一次串聯變換，即將電阻值 $a+b+c$ 變換為 $a+(b \parallel c)$ 。



以下針對 b, c 分三種狀況討論：

(1) 當 $b=c=1$ 且 $a=n-2$ ，電阻值為 $a+(b \parallel c) = n-2 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = \frac{2n-3}{2}$ 。

(2) 當 $b=1, c>1, a=n-1-c$ ，因為

$$\frac{c^2}{c+1} - \frac{1}{2} = \frac{2c^2 - c - 1}{2(c+1)} = \frac{(2c+1)(c-1)}{2(c+1)} > 0$$

，即 $\frac{c^2}{c+1} > \frac{1}{2}$ ，所以

$$a+(b \parallel c) = n-1-c + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{c}} = n-1-c + \frac{c}{c+1} = n-1 - \frac{c^2}{c+1} < n-1 - \frac{1}{2} = n - \frac{3}{2} = \frac{2n-3}{2}$$

(3) 當 $a=n-b-c, b>1, c>1$ ，此時等效電阻為 $a+(b \parallel c) = a + \frac{bc}{b+c}$ ，

$$\begin{aligned} a + \frac{bc}{b+c} &= n - \left(b+c - \frac{bc}{b+c} \right) \leq n - \left(b+c + \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}{b+c} \right) \\ &= n - \left(b+c - \frac{b+c}{4} \right) = n - \frac{3(b+c)}{4} < n - \frac{3}{2} = \frac{2n-3}{2} \end{aligned}$$

因此從 n 作一次串聯變換所形成的所有電阻值中，最大的是 $\frac{2n-3}{2}$ 。又由定理 2，每作一次串聯變換，總電阻值就會降低，因此我們要 $\frac{2n-3}{2}$ 是 n 個單位電阻經由串並聯排出的等效電阻值中第二大的（僅次於 n ）。

□

定理 8.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow f\left(\frac{2n-3}{2}\right) = n$$

Proof. 由定理 7 知， $\forall m < n, m \in \mathbb{N}$ ， m 個電阻構造的出來等效電阻值最大為 m ， $m \neq \frac{2n-3}{2}$ ；第二大為 $\frac{2m-3}{2}$ ， $\frac{2m-3}{2} \leq \frac{2n-3}{2}$ ，構造不出 $\frac{2n-3}{2}$ ，因此定理成立。 □

2.14 電阻值為 $\frac{3n-7}{2}$ 、 $\frac{3n-8}{2}$ 的連分數構造法

考慮 n 個電阻排出的所有等效電阻，其中 $n \geq 3$ ，由定理 3、定理 7 知，最大的是 n ，第二大的是 $\frac{2n-3}{2}$ ，我們想要證明 $\frac{3n-7}{3}$ ， $\frac{3n-8}{3}$ 分別是第三大的和第四大的。

定理 9.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow R(n, 3) = \frac{3n-7}{3}, R(n, 4) = \frac{3n-8}{3}$$

Proof. 類似定理 7 的證法，改考慮兩次以內的串聯變換，有以下三種可能：

(一) 一次變換

同定理 7 的作法，考慮 n 個單位電阻排出的電阻值中除了 $n, \frac{2n-3}{2}, \frac{3n-7}{3}, \frac{3n-8}{3}$ 以外，有 $a = n - b - c$ ，不妨設 $b \geq c$ 。當 $c = 1 \Rightarrow b \geq 3$ ，

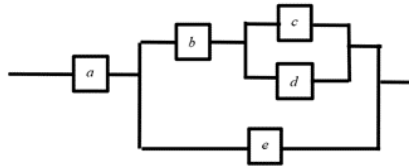
$$a + (b \parallel c) = n - b - c + \frac{bc}{b+c} \leq n - \frac{3(b+c)}{4} \leq n - \frac{12}{4} \leq n - \frac{8}{3} = \frac{3n-8}{3}$$

當 $c \geq 2 \Rightarrow b \geq c \geq 2$ ，

$$a + (b \parallel c) = n - b - c + \frac{bc}{b+c} \leq n - \frac{3(b+c)}{4} \leq n - \frac{12}{4} \leq n - \frac{8}{3} = \frac{3n-8}{3}$$

，因此從 n 作一次串聯變換下所得的電阻值中除了 $\frac{2n-3}{2}, \frac{3n-7}{3}$ 都小於 $\frac{3n-8}{3}$ 。

(二) 二次變換 1



依照上圖， $\frac{3n-7}{3}, \frac{3n-8}{3}$ 分別是 $c = 1, d = 2, b = e = 0, a = n - b - c - d - e = n - 3$ 和 $b = 0, c = d = e = 1, a = n - b - c - d - e = n - 3$ 的特例。

相較於 $n = a + b + c + d + e$ ，第一次變換完等效電阻為 $a + b + (c \parallel d) + e = n - ((c+d) - (c \parallel d))$

，第二次變換完等效電阻為

$$\begin{aligned}
& a + ((b + (c \parallel d)) \parallel e) \\
&= (a + b + (c \parallel d) + e) - ((b + (c \parallel d) + e) - ((b + (c \parallel d)) \parallel e)) \\
&= (a + b + (c \parallel d) + e) - \left((b + (c \parallel d) + e) - \frac{(b + (c \parallel d)) \times e}{b + (c \parallel d) + e} \right) \\
&= n - ((c + d) - (c \parallel d)) - \left((b + (c \parallel d) + e) - \frac{(b + (c \parallel d)) \times e}{b + (c \parallel d) + e} \right) \\
&= n - \left((c + d) - (c \parallel d) + (b + (c \parallel d) + e) - \frac{(b + (c \parallel d)) \times e}{b + (c \parallel d) + e} \right) \\
&= n - \left(c + d + b + e - \frac{(b + (c \parallel d)) \times e}{b + (c \parallel d) + e} \right) = n - \left(b + c + d + e - \frac{\left(b + \frac{cd}{c+d}\right) \times e}{b + \frac{cd}{c+d} + e} \right) \\
&\leq n - \left(b + c + d + e - \frac{\left(b + \frac{c+d}{4}\right) \times e}{b + \frac{c+d}{4} + e} \right) \leq n - \left(b + c + d + e - \frac{b + \frac{c+d}{4} + e}{4} \right) \\
&= n - \left(\frac{12b + 15c + 15d + 12e}{16} \right)
\end{aligned}$$

以下分兩種情況討論：

(a) 二次變換且 $b = 0$

由於 $c = d = e = 1$ 為 $\frac{3n-8}{3}$ 的構造法，因此考慮 $c, d, e \geq 1$ 且三數不全為 1：

$$\begin{aligned}
n - \left(\frac{12b + 15c + 15d + 12e}{16} \right) &= n - \left(\frac{15c + 15d + 12e}{16} \right) \\
&\leq n - \left(\frac{15 + 15 + 12 \times 2}{16} \right) \\
&= n - \frac{27}{8} \leq n - \frac{8}{3} \\
&= \frac{3n-8}{3}
\end{aligned}$$

，得證。

(b) 二次變換且 $b > 0$

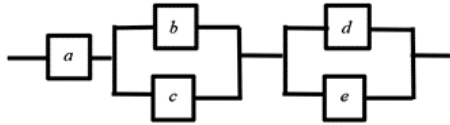
此時 $b, c, d, e \geq 1$ ，因此

$$n - \left(\frac{12b + 15c + 15d + 12e}{16} \right) \leq n - \left(\frac{12 + 15 + 15 + 12 \times 2}{16} \right) = n - \frac{27}{8} \leq n - \frac{8}{3} = \frac{3n-8}{3}$$

，得證。

(三) 二次變換 2

由於此處是單純討論二次變換，因此 $a \geq 0$ 且 $b, c, d, e > 0$ ，即 $b, c, d, e \geq 1$ ，此時等效電阻



$$\begin{aligned}
& a + (b \parallel c) + (d \parallel e) = a + \frac{bc}{b+c} + \frac{de}{d+e} \\
&= n - \left(b + c - \frac{bc}{b+c} + d + e - \frac{de}{d+e} \right) \leq n - \left(b + c - \frac{b+c}{4} + d + e - \frac{d+e}{4} \right) \\
&= n - \frac{3(b+c+d+e)}{4} \leq n - 3 \leq n - \frac{8}{3} = \frac{3n-8}{3}
\end{aligned}$$

□

定理 10.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow f\left(\frac{3n-7}{3}\right) = f\left(\frac{3n-8}{3}\right) = n$$

Proof.

由定理 9 知， $\forall m < n, m \in \mathbb{N}$ ， m 個電阻構造的出來等效電阻最大為 m ， $m \neq \frac{3n-7}{3}$ ， $m \neq \frac{3n-8}{3}$ ；第二大為 $\frac{2m-3}{2}$ ， $\frac{2m-3}{2} \neq \frac{3n-7}{2}$ ， $\frac{2m-3}{2} \neq \frac{3n-8}{2}$ ；第三和第四大為 $\frac{3m-7}{3}$ 和 $\frac{3m-8}{3}$ ，又 $\frac{3m-8}{2} < \frac{3m-7}{2} < \frac{3n-8}{2} < \frac{3n-7}{2}$ ，所以無法構造 $\frac{3m-7}{3}$ 和 $\frac{3m-8}{3}$ ，因此定理成立。□

2.15 正整數的所有構造法

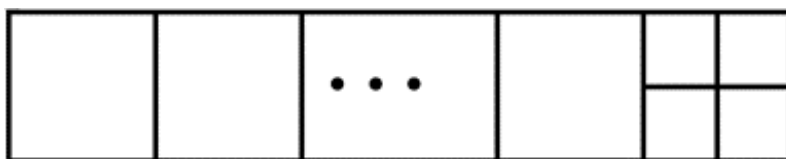
由定理 4 知道，對於任一個正整數 n ，最少要用 n 個單位電阻，那麼電阻值 n 可以用哪些數量的單位電阻構造呢？

2.15.1 n 個、 $n+3$ 個、 $n+5$ 個、 $n+6$ 個、 $n+7$ 個

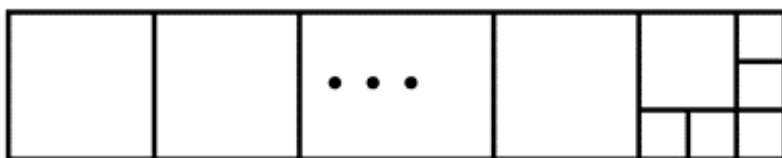
n 個單位電阻構造電阻值 n 的方法為將 n 個單位電阻串聯，幾何模型即是 n 個橫向拼接的正方形。

2.15.2 $n+3$ 個、 $n+5$ 個、 $n+6$ 個、 $n+7$ 個

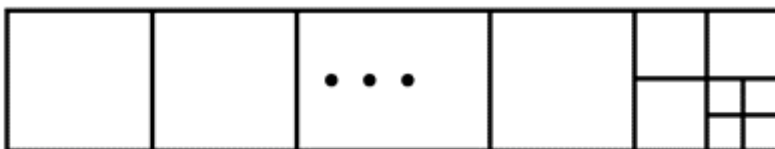
$n+3$ 個電阻的幾何構造就是將 n 個電阻的幾何構造中其中一個正方形分割成 4 個小正方形；同理 $n+5$ 的幾何構造是將其中一個正方形分割成 6 個； $n+6$ 分割成 7 個、 $n+7$ 分割成 8 個，分別如下圖。



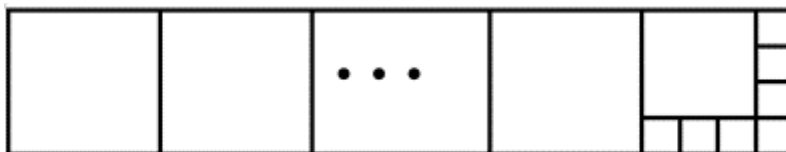
$n+3$ 個



$n+5$ 個



$n+6$ 個



$n+7$ 個

2.15.3 $n + k + 3$ 個

$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 5$ ， $n + k + 3$ 個單位電阻都有如下的幾何構造：在 $n + k$ 的幾何模型中任取一正方形，將其切成四等分，如 $n + 3$ 最右邊的 4 個小正方形的構造。

2.15.4 $n + 1$ 個單位電阻無法構造出電阻值 n

Proof.

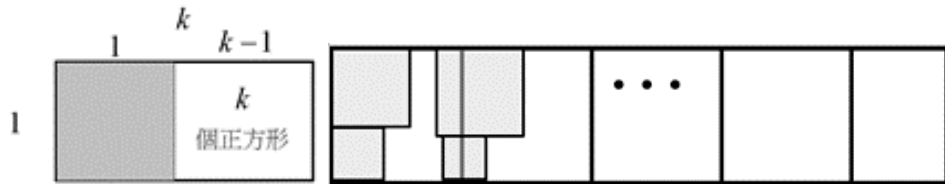
使用數學歸納法，

1. $n = 1$ 時， $n + 1$ 個單位電阻構造出的等效電阻值只有 $2, \frac{1}{2}$ ，因此無法構造出 n 。
2. 若 $n = k - 1$ 時，命題成立，當 $n = k$ 時，此時 $k \geq 2$ ，用反證法，假設 $k + 1$ 個單位電阻可以構造出電阻值 k 。

Case 1：考慮長為 k 、寬為 1 的幾何模型，如果切割出 1×1 的正方形，則其餘部分是以 k 個正方形正確拼出 $k - 1$ ，如左下圖，與數學歸納法矛盾。

所以上述幾何模型都滿足以下條件 Case 2。

Case 2：將此幾何模型由左而右分為 k 個 1×1 的區域，每個區域的最左側的邊上都至少有兩個正方形，如右下圖，左側兩區域上各自的兩個正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少會切出 $2k > k + 1$ 個正方形，代表電阻值 k 要超過 $k + 1$ 個單位電阻構造，矛盾，因此命題成立。



□

2.15.5 $n + 2$ 個單位電阻無法構造出電阻值 n

Proof.

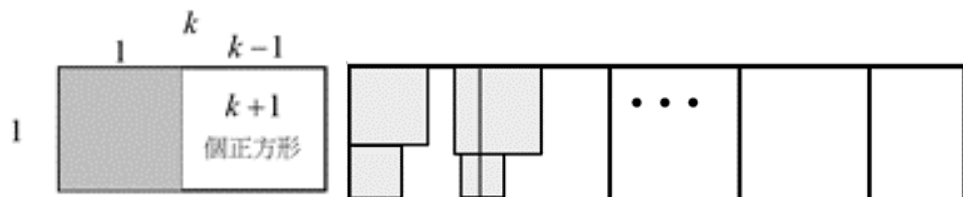
同 2.15.4 證法，使用數學歸納法，

1. $n = 1$ 時， $n + 2$ 個單位電阻構造出的等效電阻值只有 $3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ ，因此無法構造出 n 。
2. $n = 2$ 時， $n + 2$ 個單位電阻構造出的等效電阻值只有 $4, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}$ ，因此無法構造出 n 。
3. 若 $n = k - 1$ 時，命題成立，當 $n = k$ 時，此時 $k \geq 3$ ，用反證法，假設 $k + 2$ 個單位電阻可以構造出電阻值 k 。

Case 1：考慮長為 k 、寬為 1 的幾何模型，如果切割出 1×1 的正方形，則其餘部分是以 $k + 1$ 個正方形正確拼出 $k - 1$ ，如左下圖，與數學歸納法矛盾。

所以上述幾何模型都滿足以下條件 Case 2。

Case 2：將此幾何模型由左而右分為 k 個 1×1 的區域，每個區域的最左側的邊上都至少有兩個正方形，如右下圖，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少會切出 $2k > k + 2$ 個正方形，代表電阻值 k 要超過 $k + 2$ 個單位電阻構造，矛盾，因此命題成立。



□

2.15.6 $n+4$ 個單位電阻無法構造出電阻值 n

Proof.

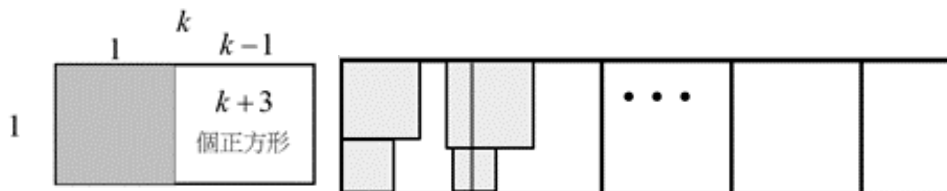
同 2.15.4 證法，使用數學歸納法，

1. $n=1$ 時， $n+4$ 個單位電阻構造出的等效電阻值只有 $5, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{7}{5}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}$ ，因此無法構造出 n 。
2. $n=2, 3, 4$ 時， $n+4$ 個單位電阻無法構造出 n 。
3. 若 $n=k-1$ 時，命題成立，當 $n=k$ 時，此時 $k \geq 5$ ，用反證法，假設 $k+4$ 個單位電阻可以構造出電阻值 k 。

Case 1：考慮長為 k 、寬為 1 的幾何模型，如果切割出 1×1 的正方形，則其餘部分是以 $k+3$ 個正方形正確拼出 $k-1$ ，如左下圖，與數學歸納法矛盾。

所以上述幾何模型都滿足以下條件 Case 2。

Case 2：將此幾何模型由左而右分為 k 個 1×1 的區域，每個區域的最左側的邊上都至少有兩個正方形，如右下圖，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少會切出 $2k > k+4$ 個正方形，代表電阻值 k 要超過 $k+4$ 個單位電阻構造，矛盾，因此命題成立。



□

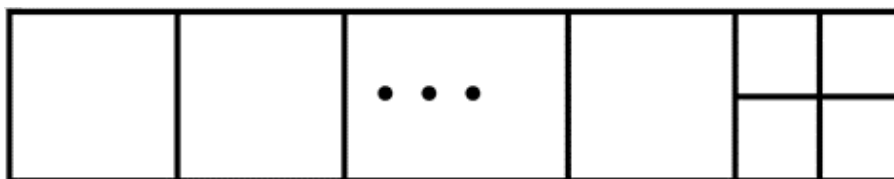
2.15.7 結論

定理 11.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ， $n, n+3, n+5$ 及大於 $n+5$ 的所有正整數都可以構造出電阻值 n 。

2.16 $n-3$ 的次小構造法

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ ，電阻值 $n-3$ 可以用 $n-3$ 個單位電阻全部串聯，也可以用 n 個單位電阻構造，構造之幾何模型如下，其中左邊有數格正方形，最右邊有個 2×2 的方格：



定理 12.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow R(n, 5) = n - 3$$

Proof.

用數學歸納法，

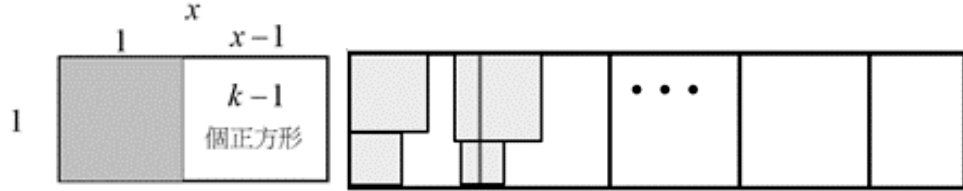
(一) $n=4$ 時定理成立。

(二) 若 $n=k-1$ 定理成立，當 $n=k$ 時，我們使用反證法，假設 $R(k, 5) = x$ ，由定理 10 知 $R(k, 4) = \frac{3k-8}{3}$ ，因此可得 $k-3 < x < \frac{3k-8}{3}$ 。

Case 1：如果 x 的構造法為 1 和 $x-1$ 串聯，即 x 的基本幾何模型中有 1×1 的正方形，那麼 $x-1$ 可以用 $k-1$ 個單位電阻構造，如左下圖。又

$$R(k-1, 5) = k-4 < x-1 < \frac{3k-11}{3} = R(k-1, 4)$$

，矛盾。因此 x 的基本幾何模型中沒有 1×1 的正方形。



所以上述幾何模型都滿足以下條件 Case 2。

Case 2：先有 $\lceil x \rceil = k-2$ 。將此幾何模型由左而右分為 $k-3$ 個 1×1 的區域和剩下最右邊的 $(x-k+3) \times 1$ 的區域，如右上圖，每個區域左側的邊上都有至少兩個小正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少要分割出 $2(k-2) = 2k-4 > k$ 個小正方形，矛盾，定理成立。

□

2.17 定理 12 證明法之推廣

定理 13.

若正整數 h, p 滿足 $R(2 \lfloor h \rfloor, p) = 2 \lfloor h \rfloor - h$ ，則

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \lfloor h \rfloor \Rightarrow R(n+1, p) = R(n, p) + 1$$

Proof. 對 p 做數學歸納法，由定理 7 知 $p=2$ 時定理顯然成立。若 $p=j-1$ 時定理成立，當 $p=j$ 時，對 n 做數學歸納法， $n=2 \lfloor h \rfloor$ 時，欲證 $R(n+1, j) = R(n, j) + 1$ 成立，用反證法，假設 $R(2 \lfloor h \rfloor + 1, j) = x \neq R(2 \lfloor h \rfloor, j) + 1 = y$ ，以下分成兩個 Case：

Case 1： $y > x$ ，因為電阻值 y 可以用 $2 \lfloor h \rfloor + 1$ 個單位電阻構造，因此可以設 q 使得 $y = R(2 \lfloor h \rfloor + 1, q)$ ， $q \in \mathbb{N}$ ，於是就有 $R(2 \lfloor h \rfloor + 1, q) = y > x = R(2 \lfloor h \rfloor + 1, j)$ ，所以 $j > q$ ；又由數學歸納法知 $R(2 \lfloor h \rfloor + 1, q) = R(2 \lfloor h \rfloor, q) + 1$ ，所以 $R(2 \lfloor h \rfloor, q) + 1 = R(2 \lfloor h \rfloor + 1, q) = y = R(2 \lfloor h \rfloor, j) + 1$ ，因此 $q = j$ ，矛盾。

Case 2： $x > y$ 且以 $2 \lfloor h \rfloor + 1$ 個單位電阻構造電阻值 x 的構造法是 $x-1$ 和 1 串聯，也就是 x 的構造法中有 1×1 的正方形，代表 $x-1$ 可以用 $2 \lfloor h \rfloor$ 個單位電阻構造，因此可以設 r 使得 $R(2 \lfloor h \rfloor, r) = x-1$ ，於是就有 $R(2 \lfloor h \rfloor, r) = x-1 > y-1 = R(2 \lfloor h \rfloor, j)$ ，所以 $r < j$ ；又由數學歸納法知 $R(2 \lfloor h \rfloor, r) + 1 = R(2 \lfloor h \rfloor + 1, r)$ ，所以 $R(2 \lfloor h \rfloor + 1, r) = R(2 \lfloor h \rfloor, r) + 1 = x = R(2 \lfloor h \rfloor + 1, j)$ ，因此 $r = j$ ，矛盾。

Case 3： $x > y$ （式 1）且 x 的基本幾何模型中沒有 1×1 的正方形，將此幾何模型由左而右分為 $\lfloor x \rfloor$ 個 1×1 的區域，若 x 不是整數，則會剩下最右邊的小區域，無論 x 是否為整數，都會切出 $\lceil x \rceil$ 個區域，每個區域左側的邊上都有至少兩個小正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少要分割出 $2 \lceil x \rceil$ 個小正方形，而 x 的基本幾何模型要切出 $2 \lfloor h \rfloor + 1$ 個正方形，所以有 $2 \lfloor h \rfloor + 1 \geq 2 \lceil x \rceil$ （式 2），然而

$$\begin{aligned} & 2 \lfloor h \rfloor + 1 \\ & \geq 2 \lceil x \rceil (\text{由式 2}) \geq 2 \lceil y \rceil (\text{由式 1}) \\ & = 2 \lceil R(2 \lfloor h \rfloor, j) + 1 \rceil = 2 \lceil 2 \lfloor h \rfloor - h + 1 \rceil = 2 \lceil (2 \lfloor h \rfloor + 1) - h \rceil = 2 \lceil (2 \lfloor h \rfloor + 1) - \lfloor h \rfloor \rceil \\ & = 2 \lfloor h \rfloor + 3 \end{aligned}$$

矛盾。

若 $n = k-1$ 時， $R(n+1, j) = R(n, j) + 1$ 成立，此時有 $k-1 \geq 2 \lfloor h \rfloor$ ，即 $k \geq 2 \lfloor h \rfloor + 1$ （式 3），當 $n = k$ 時，欲證 $R(k+1, j) = R(k, j) + 1$ 成立，用反證法，假設 $R(k+1, j) = u \neq R(k, j) + 1 = v$ ，以下分成三個 Case：

Case 1： $v > u$ ，因為電阻值 y 可以用 $k+1$ 個單位電阻構造，因此可以設 s 使得 $v = R(k+1, s)$ ， $s \in \mathbb{N}$ ，於是就有 $R(k+1, s) = v > u = R(k+1, j)$ ，所以 $j > s$ ；又由數學歸納法知 $R(k+1, s) = R(k, s) + 1$ ，所以 $R(k, s) + 1 = R(k+1, s) = v = R(k, j) + 1$ ，因此 $s = j$ ，矛盾。

Case 2： $u > v$ 且以 $k+1$ 個單位電阻構造電阻值 u 的構造法是 $u-1$ 和 1 串聯，也就是 u 的構造法中有 1×1 的正方形，代表 $u-1$ 可以用 k 個單位電阻構造，因此可以設 t 使得 $R(k, t) = u-1$ ，於是就有 $R(k, t) = u-1 > v-1 = R(k, j)$ ，所以 $t < j$ ；又由數學歸納法知 $R(k, t) + 1 = R(k+1, t)$ ，所以 $R(2 \lfloor h \rfloor + 1, t) = R(k, t) + 1 = u = R(k+1, j)$ ，因此 $t = j$ ，矛盾。

Case 3： $u > v$ （式 4）且 u 的基本幾何模型中沒有 1×1 的正方形，將此幾何模型由左而右分為 $\lfloor u \rfloor$ 個 1×1 的區域，若 u 不是整數，則會剩下最右邊的小區域，無論 u 是否為整數，都會切出 $\lceil u \rceil$ 個區域，每個區域左側的邊上都有至少兩個小正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少要分割出 $2 \lceil u \rceil$ 個小正方形，而 u 的基本幾何模型要切出 $k+1$ 個正方形，所以有 $k+1 \geq 2 \lceil u \rceil$ （式 5），然而

$$\begin{aligned} k+1 &\geq 2 \lceil u \rceil \text{ (由式 4)} \\ &\geq 2 \lceil v \rceil \text{ (由式 5)} = 2 \lceil R(k, j) + 1 \rceil = 2 \lceil R(k-1, j) + 2 \rceil \text{ (數學歸納法)} \\ &\vdots \\ &= 2 \lceil R(2 \lfloor h \rfloor, j) + (k - 2 \lfloor h \rfloor + 1) \rceil \text{ (數學歸納法)} \\ &= 2 \lceil (2 \lfloor h \rfloor - h) + (k - 2 \lfloor h \rfloor + 1) \rceil \text{ (數學歸納法)} \\ &= 2 \lceil k - h + 1 \rceil = 2 \lceil (k+1) - h \rceil = 2 \lceil (k+1) - \lfloor h \rfloor \rceil \\ &\geq 2(2 \lfloor h \rfloor + 1 + 1 - \lfloor h \rfloor) \text{ (由式 3)} \\ &= 2 \lfloor h \rfloor + 3 \end{aligned}$$

矛盾，因此定理成立。

□

2.18 電阻值為 $\frac{4n-13}{4}$ 的連分數構造法

考慮 n 個電阻排出的所有等效電阻，其中 $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ ，由定理 3、定理 7、定理 9、定理 12 知道了 $R(n, k), k = 1 \dots 5$ ，我們想要證明 $R(n, 6) = \frac{4n-13}{4}$ 。

定理 14.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow R(n, 6) = \frac{4n-13}{4}$$

Proof.

由定理 13，定理 14 成立若且為若 $R(6, 6) = \frac{11}{4}$ ，後者顯然成立，因此定理成立。

□

定理 15.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow f\left(\frac{4n-13}{4}\right) = n$$

Proof. 因為 $\frac{4n-13}{4} = (n-4) + \frac{3}{4} = (n-4) + (1 \parallel 3)$ ，所以 $f\left(\frac{4n-13}{4}\right) \leq n-4+1+3 = n$ 。

假設 $m = f\left(\frac{4n-13}{4}\right) < n$ ，由定理 14，就有

$$R(m, 6) = \frac{4m-13}{4} < \frac{4n-13}{4} = R(n, 6) = R(m, k)$$

，其中 $k < 6$ ，然而 $k = 1 \sim 5$ 都不可能使上述等式成立，因此 $f\left(\frac{4n-13}{4}\right) = n$ 。

□

2.19 定理 13 的應用

定理 13 的條件 $R(2 \lfloor h \rfloor, p) = 2 \lfloor h \rfloor - h$ 中， $\lfloor h \rfloor \geq 2 \lfloor h \rfloor - h > \lfloor h \rfloor - 1$ ，也就是說我們可以利用程式模擬的結果，找 $2n$ 個單位電阻構造出的等效電阻值 r ，若 $n \geq r > n - 1$ 內的，他都會遵循定理 13，我們稱 r 為 $2n$ 的母電阻值，而 $2n + k$ 個單位電阻構造出的電阻值 $r + k$ ，其中 $n \geq r > n - 1$ ，我們稱 $r + k$ 為 $2n$ 的子電阻值。

以 $n = 3$ 為例，可參照 2.1 n 個單位電阻排出的所有等效電阻值，找尋 6 個電阻構造出的等效電阻值在區間 $(2, 3]$ 內，總共會有 $3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$ ，因此有 $n + 6$ 個電阻構造出的等效電阻值中，第 6 到 12 大的是 $3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$ 這七數加上 n ，其中 n 是正整數。

在 $2(n + 1)$ 個電阻構造出的所有等效電阻值中，在區間 $(n, n + 1]$ 中的電阻值為 $2(n + 1)$ 的母電阻值，而區間 $(n + 1, n + 2]$ 的是 $2n$ 的子電阻值，區間 $(n + k, n + k + 1]$ 的是 $2(n - k + 1)$ 的子電阻值，所以所有大於 $n + 1$ 的電阻值，都是用數量較少的電阻構造所得的子電阻值，而我們都可以推算到其源頭，因此可以導出以下定理。

定理 16.

$$R(n, p) > \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \Rightarrow R(n+1, p) = R(n, p) + 1$$

Proof.

假設 $R(n, p) > \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ，依 n 的奇偶性討論：

Case 1：如果 n 是偶數，設 $n = 2t$ ， $R(2t, p) > \left\lfloor \frac{2t-1}{2} \right\rfloor = t - 1$ 。

用反證法，若 $R(2t+1, p) \neq R(2t, p) + 1$ ，顯然有 $R(2t+1, p) > R(2t, p) + 1$ ，由定理 13 知此時 $t < \lfloor h \rfloor$ ，且 $R(2t, p) < 2t - h$ ， $R(2t, p) < 2t - h \leq 2t - \lfloor h \rfloor < t$ ，又 $R(2t, p) > t - 1$ ，也就是 $t > 2t - \lfloor h \rfloor > t - 1$ ，然而此三數都是正整數，矛盾。

Case 2：如果 n 是奇數，設 $n = 2t + 1$ ， $R(2t + 1, p) > \left\lfloor \frac{2t}{2} \right\rfloor = t$ 。

用反證法，若 $R(2t+2, p) \neq R(2t+1, p) + 1$ ，顯然有 $R(2t+2, p) > R(2t+1, p) + 1 \geq R(2t, p) + 2$ ，由定理 13 知此時 $t < \lfloor h \rfloor$ ，且 $R(2t+2, p) < 2t - h + 2$ ， $R(2t+2, p) < 2t - h + 2 \leq 2t - \lfloor h \rfloor + 2 < t + 2$ ，又 $R(2t+2, p) > R(2t+1, p) + 1 > t + 1$ ，也就是 $t + 2 > 2t - \lfloor h \rfloor + 2 > t + 1$ ，然而此三數都是正整數，矛盾。

□

定理 17.

$$R(n, p) > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow R(n, p) = R(n-1, p) + 1$$

Proof.

假設 $R(n, p) > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ，依 n 的奇偶性討論：

Case 1：如果 n 是偶數，設 $n = 2t$ ， $R(2t, p) > \left\lfloor \frac{2t}{2} \right\rfloor = t$ 。

用反證法，若 $R(2t, p) \neq R(2t-1, p) + 1$ ，顯然有 $R(2t, p) > R(2t-1, p) + 1 \geq R(2t-2, p) + 2$ ，由定理 13 知此時 $t - 1 < \lfloor h \rfloor$ ，且 $R(2t, p) < 2t - h$ ， $R(2t, p) < 2t - h \leq 2t - \lfloor h \rfloor < t + 1$ ，又 $R(2t, p) > t$ ，也就是 $t + 1 > 2t - \lfloor h \rfloor > t$ ，然而此三數都是正整數，矛盾。

Case 2：如果 n 是奇數，設 $n = 2t + 1$ ， $R(2t + 1, p) > \left\lfloor \frac{2t+1}{2} \right\rfloor = t$ 。

用反證法，若 $R(2t+1, p) \neq R(2t, p) + 1$ ，顯然有 $R(2t+2, p) - 1 > R(2t+1, p) + 1 \geq R(2t, p) + 1$ ，由定理 13 知此時 $t < \lfloor h \rfloor$ ，且 $R(2t+2, p) < 2t - h + 2$ ， $R(2t+2, p) < 2t - h + 2 \leq 2t - \lfloor h \rfloor + 2 < t + 2$ ，又 $R(2t+2, p) \geq R(2t+1, p) + 1 > t + 1$ ，也就是 $t + 2 > 2t - \lfloor h \rfloor + 2 > t + 1$ ，然而此三數都是正整數，矛盾。

□

定理 18.

$$m \in \mathbb{Q}^+, m > \left\lfloor \frac{f(m)-1}{2} \right\rfloor \Rightarrow f(m+1) = f(m) + 1$$

Proof. 用反證法，如果 $m \in \mathbb{Q}^+, m > \left\lfloor \frac{f(m)-1}{2} \right\rfloor$ 但 $f(m+1) \neq f(m) + 1$ ，顯然 $f(m+1) < f(m) + 1$ ，設 $f(m) = a, f(m+1) = a - k + 1, R(a, p) = m, R(a - k + 1, q) = m + 1$ ，因此 $R(a, q) = m + k$ ，因為 $f(m) = a$ ，所以 $R(a - k, q) \neq m$ ，顯然 $R(a - k, q) < m$ ，所以 $R(a - k + 1, q) = m + 1 \leq \left\lfloor \frac{a - k + 1}{2} \right\rfloor$ ，

$$\left\lfloor \frac{a - k + 1}{2} \right\rfloor \geq R(a - k + 1, q) = m + 1 = R(a, q) - k + 1 > \left\lfloor \frac{a - 1}{2} \right\rfloor - k + 1 = \left\lfloor \frac{a - k + 1}{2} \right\rfloor$$

，顯然矛盾，因此 $f(m+1) = f(m) + 1$ 。 □

2.20 定理 19 的推廣

定理 17 讓我們找到切割出 1 的充分條件，再來我們希望能找到何時可以切出 $\frac{1}{2}$ ，因此我們找到以下定理：

定理 19.

$$m \in \mathbb{Q}^+, m \geq \frac{1}{2}, m \geq \frac{2}{9}f\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{9} \Rightarrow f(m) = f\left(m - \frac{1}{2}\right) + 2 \text{ or } f(m) = f(m - 1) + 1$$

Proof. 用反證法，畫出 m 的基本幾何模型，若 $m \in \mathbb{Q}^+, m \geq \frac{1}{2}, m \geq \frac{2}{9}f\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{9}$ ，且 $f(m) < f\left(m - \frac{1}{2}\right) + 2$ 和 $f(m) \neq f(m - 1) + 1$ ，代表此時 m 的最小構造法沒有切割出 1×1 的正方形以及長為 $\frac{1}{2}$ 和寬為 1 的矩形，滿足這些條件中的矩形中，效率函數最小的是 $\frac{2}{3}$ ，因此有 $f(m) \geq f\left(\frac{2}{3}\right)\left(\left\lceil \frac{m}{\frac{2}{3}} \right\rceil\right)$ ，以下以 m 的性質分三個 Case 討論

- (1) $m = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ ，顯然不滿足 $m \geq \frac{2}{9}f\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{9}$ 。
- (2) $\frac{2}{3} \mid m, m > \frac{2}{3}$ ，由定理 10 知其最小構造法必切出 1×1 的正方形。
- (3) $\frac{2}{3} \nmid m$ ， $f(m) \geq f\left(\frac{2}{3}\right)\left(\left\lceil \frac{m}{\frac{2}{3}} \right\rceil\right) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{m}{\frac{2}{3}} = \frac{9m}{2} \geq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{9}f\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{9}\right) = f\left(m - \frac{1}{2}\right) + 2$ ，矛盾。

因此定理成立。 □

3 結論 (Summary and Conclusions)

3.1 最小構造法之表格

下表統計分子和分母在 50 以內時最小構造法的值。

白色 代表連分數構造法即為最小構造法。

綠色 代表最小構造法的幾何模型中有小數邊長的正方形。

粉紅色 代表不符合定理 17 的週期現象。

黃色 則為連分數構造法非最小構造法中剩餘的部分。

4 參考文獻

1. Minimum number of resistor. reddit. from
https://www.reddit.com/r/math/comments/1k78bt/minimum_number_of_resistors/
2. 佩爾數。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BD%A9%E5%B0%94%E6%95%B0>
3. Sameen Ahmed KHAN. The bounds of the set of equivalent resistances of n equal resistors combined in series and in parallel Salalah College of Technology, Salalah, Sultanate of Oman.
4. Number of distinct resistances that can be produced from a circuit of n equal resistors using only series and parallel combinations. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, from
<https://oeis.org/A048211>
5. University of Surrey, from
<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html>
6. 孟紘霆、江至鈞、林煒捷。再論矩形分割成正方形。取自
<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2015/03/2015033103532774.pdf>
7. 林亞萱、張云亭、蔡悅曲。正規正矩。取自
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/030401.pdf>
8. 葉龍泉、林志浩、莊育信、蔡金進（1989）。矩形中分割方形。台灣省立新竹高級中學。
9. 連分數—連分數的表示法 [摘要]。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%9E%E5%88%86%E6%95%B0>
10. Series-parallel duality and read-once functions.1101110, from
<https://1101110.github.io/blog/2016/05/19/series-parallel-duality-and.html>