

建構邊長為整數的圓內接多邊形

臺北市立石牌國民中學藍宇潔

指導老師：藍邦偉

Abstract

This question originated from Crux Mathematicorum, Volume 45 (6), July 2019 . The original question is from W.J. Blundon competition in Canada. A hexagon H is inscribed in a circle, and consists of three segments of length 1 and three segments of length 3. Find the area of H . I found that there is a circle inscribed polygon with an integer side length in this figure, and each angle is 120° . That is an isometric polygon. I wonder if all the inscribed polygons with integer sides exist in non regular polygons. I start by classifying even and odd polygons. For polygons with an even number of sides, I started with hexagons, then went on to octagons and quadrilaterals. There are some amazing mapping in the quadrilaterals . For example, we can construct a 60-120 degree quadrilateral easily by using Fibonacci sequence. And I found if one interior angle of a quadrilateral is a rational number, there exists an inscribed circle of the quadrilateral. For polygons with an odd number of edges, I started with pentagons then went on to heptagons and hendecagons . The circumscribed radius is also discussed. The main axis of this study is divided into two parts. The first part is to construct the inscribed four, five and six sides of a circle by using tessellation triangles , and the inscribed even sides of a circle by using isometric polygons. In the second part, we define two or more kinds of inscribed polygons with different integer side lengths and circumscribed circle radius as integers, which are called Perfect Polygons. Finally I use Pythagorean Theorem to make transformation to solve trigonometric equations to build the "Perfect Polygon" which has 2 different edges of length . The lengths of each edge and the radius of the inscribed circle are all positive integers.

中文摘要

本作品討論如何建構有兩種相異整數邊長的圓內接多邊形。先由邊長關係分類，從偶數邊形的四邊形、六邊形與八邊形開始討論。再建構奇數邊的五邊形、七邊形、九邊形與十一邊形。並討論兩種相異邊長與外接圓半徑的關係。因為有外接圓半徑就可以建構圓內接多邊形。本研究成功找到邊長為整數的奇數 $2k+1$ 邊圓內接多邊形與偶數 $2k$ 邊的圓內接多邊形的三種以上方法，而且在主要建構方式其外接圓半徑亦為整數。也證明出外接圓半徑與邊長的一般式。所以兩種相異邊長且外接圓半徑皆為整數的圓內接 n 邊形是存在也可以建構。

1 簡介 (Introduction)

1.1 研究動機

此題出處為 Crux Mathematicorum, Vol. 45(6), July 2019[1]，原題是加拿大數學競賽 W.J. Blundon Contest 的題目。如圖 1，圓內接六邊形的邊長分別為 1, 3, 1, 3, 1, 3，試求此六邊形的面積。我發現這個邊長都是整數的圓內接六邊形，外接圓竟然存在，而且每一個內角皆為 120° ，也就是等角多邊形。我好奇在非正多邊形中，是否所有邊長為整數的圓內接多邊形都存在。我就上網尋找這個問題，但是竟然找不到邊長為整數的圓內接多邊形的討論。於是我決定來做這個題目。我開始並依邊長為整數的偶數邊多邊形與奇數邊多邊形討論。最後成功建構邊長為整數的圓內接 n 邊形，並證明了定理 4、定理 6 與定理 7 三種外接圓半徑 R 與兩種不同邊長 $a - b_{(n-1)}$ 、 $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ 與 $a_{(4)} - b_{(n-4)}$ 的一般式。當然建構方法不唯一。

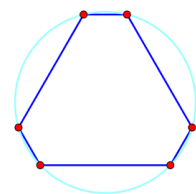


圖 1. 圓內接六邊形

1.2 研究目的

1. 有兩種以上相異整數邊長的圓內接多邊形是否存在？如果存在，其建構方式為何？
2. 若上述圓內接整數邊多邊形存在，其邊長有何限制？其排列方式有何特性？
3. 不同邊長數量對圓內接整數邊多邊形的建構方式有何影響？

1.3 名詞解釋與定義

1. $a_{(h)} - b_{(k)}$ ：圓內接 $h + k$ 邊形中，其邊長為 h 個 a 與 k 個 b 。且 a, b 為正整數。若 h 或 k 之值為 1 亦可省略。
2. 拼貼三角形：三邊長為整數且其中一內角是 120° 的鈍角三角形。例如三邊長為 3, 5, 7、7, 8, 13、5, 16, 19、11, 24, 31 或它們的整數倍我們簡記為 $T_{3,5,7}$ 、 $T_{7,8,13}$ 、 $T_{5,16,19}$ 或 $T_{11,24,31}$ 。
3. 完美多邊形：有兩種以上相異整數邊長，且外接圓半徑亦為整數的圓內接多邊形。

1.4 研究流程

圖 2 是我的流程圖：其中藍色框是以拼貼三角形建構，紅色框是以完美多邊形建構。

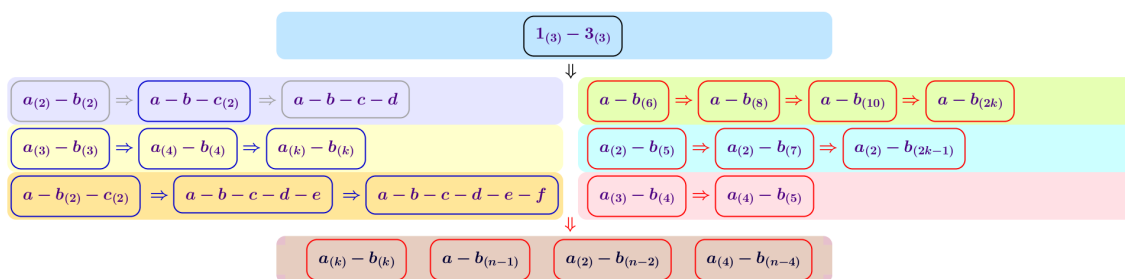


圖 2. 研究流程圖

2 研究內容 (Main Body)

2.1 邊長為整數的圓內接四邊形

2.1.1 邊長為整數 $a - b - c - d$ 與一內角餘弦值為有理數的圓內接四邊形

考慮

$$a - b - c - d$$

的一般話，其實給定固定邊長時，並不是任意角度都能建構圓內接四邊形。設 $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$ ，且 $a \leq b \leq c \leq d$ ， a, b, c 與 d 為自然數。若 $\alpha = \angle D$ ，當 $-1 < \cos \theta < 1$ 時且 $a + b + c > d$ 時就可以建構。設對角線 $\overline{AC} = t$ ，如圖 3。由餘弦定理知： $\triangle ACD$ 中， $t^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha$ ， $\triangle ABC$ 中， $t^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ ，兩式

$$\text{相減得：} 2(ab + cd) \cos \alpha = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)}, \text{ 又}$$

$$2ab + 2cd - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = (a + b)^2 - (c - d)^2 = (a + b + c - d)(a + b + d - c) > 0 \text{ 故}$$

$$0 < \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)} < 1. \text{ 但是因為邊長順序可以改變，所以我們要考慮到另外兩種情形}$$

$$\cos \beta = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2(ac + bd)} \text{ 和 } \cos \gamma = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}, \text{ 當圓內接四邊形相鄰內角為下列三組其中一組時：} \alpha, \beta, \pi - \alpha \text{ 與 } \pi - \beta \text{ 或 } \alpha, \gamma, \pi - \alpha \text{ 與 } \pi - \gamma \text{ 或 } \beta, \gamma, \pi - \beta \text{ 與 } \pi - \gamma \text{ 其中兩組時，}$$

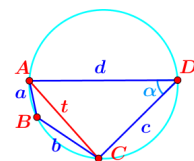


圖 3. $a - b - c - d$

必有邊長為 a 、 b 、 c 與 d 正整數的圓內接四邊形。接著討論餘弦值為有理數的圓內接四邊形。由餘弦定理知：

$$\triangle ABC \text{ 中, } t^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = a^2 + b^2 + ab \frac{r}{s}$$

$$\triangle ACD \text{ 中, } t^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha = c^2 + d^2 - cd \frac{r}{s}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab \frac{r}{s} = c^2 + d^2 - cd \frac{r}{s} \Rightarrow sa^2 - rab + sb^2 = sc^2 + rcd + sd^2$$

$$\text{設 } sa^2 + rab + sb^2 = s(-c)^2 + r(-c)d + sd^2 = st^2 = n$$

若 n 為自然數, x, y 是整數。考慮函數 $f(x, y) = sx^2 + rxy + sy^2$, 我想解二元二次方程式 $sx^2 + rxy + sy^2 = n$, 但是 n 也是變數。若其解 (x, y) 為 $(a, -b)$ 或 (c, d) , 其中 (x, y) 同為正數表夾角為鈍角, (x, y) 一正一負表夾角為銳角。可以用 $(a, -b)$ 與 (c, d) 為邊長, 當然邊長較短的兩邊要夾鈍角, 邊長較長的兩邊要夾銳角, 以建構圓內接四邊形。也就是並不是方程式的每組解都能建構, 還需滿足 $n = st^2$ 。後續討論中我用 GeoGebra 取若干個餘弦值檢測, 並列出滿足的解。因為等腰梯形外接圓必存在, 所以我考慮如圖 4 在底角為 60° 的等腰梯形 $ABCD$ 中,

$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$, $\overline{AB} = 2$ 。分別過 C 、 D 做高 $\overline{DE}$ 與 $\overline{CF}$, 所以 $\overline{AE} = \overline{BF} = \frac{1}{2}$, $\overline{EF} = 1$ 。推廣到圖 5 中, $\overline{CD} = a$, $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ 。因為圓內接多邊形各邊順序改變不影響多邊形的建構, 圖 5 的排列順序改成圖 6。其中 b 與 $a+b$ 兩邊夾銳角, a 與 b 兩邊夾鈍角。也就是計算出一組 (a, b) 時, 可以馬上推出另一組邊長是 $(-b, a+b)$ 。即有對應關係 $(a, b) \mapsto (-b, a+b)$ 。

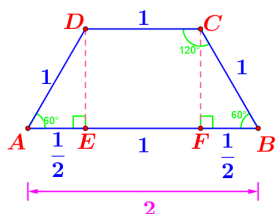


圖 4. $1_{(3)} - 2$

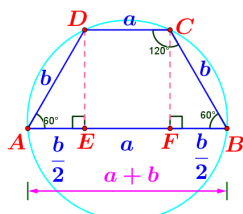


圖 5. $a - b_{(2)} - (a+b)$

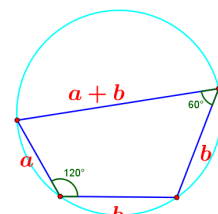


圖 6. $a - b_{(2)} - (a+b)$

當 $r = s = 1$ 時, 起初我用 GeoGebra 寫了一個程式來判斷二元二次方程式的整數解。而在表 3 作圖時, 我先作 $\theta = 120^\circ$ 且其兩邊的邊長為 c 與 d , 再建構其餘部分。

1. 當 $n = 3$ 時: 即 $x^2 + xy + y^2 = 3$ 的解為 $(1, 1)$ 與 $(-1, 2)$, 且對角線長 $t = \sqrt{3}$ 。
2. 當 $n = 7$ 時: 即 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 的解為 $(1, 2)$ 與 $(-2, 3)$ 或 $(2, 1)$ 與 $(-1, 3)$, 且對角線長 $t = \sqrt{7}$ 。
3. 當 $n = 12$ 時: 即 $x^2 + xy + y^2 = 12$ 的解為 $(2, 2)$ 與 $(-2, 4)$, 且對角線長 $t = 2\sqrt{3}$ 。
4. 當 $n = 13$ 時: 即 $x^2 + xy + y^2 = 13$ 的解為 $(1, 3)$ 與 $(-3, 4)$ 或 $(3, 1)$ 與 $(-1, 4)$, 且對角線長 $t = \sqrt{13}$ 。

觀察表 1 的各項邊

長的數列 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ 是費氏數列 $\{F_n\}$ 。因為夾角為 60° 與 120° 的圓內接四邊形結構如表 1 中的對應關係。所以可以用費氏數列中的連續 3 項 F_n, F_{n+1}, F_{n+2} 構成 $(F_n, F_{n+1}) \mapsto (-F_{n+1}, F_{n+2})$ 來建構夾角為 60° 與 120° 圓內接四邊形, 如圖 7 所示。表 1 的第五欄對應的數亦為費氏數列。接著探討二元二次方程式 $x^2 + xy + y^2 = n$ 的整數解:

$$x^2 + xy + y^2 = n = t^2$$

$$\Rightarrow n = (x^2 + xy) + y^2 = \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4n = (2x + y)^2 + 3y^2 \Rightarrow (2x + y)^2 + 3y^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (2x + y)^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 2x(2x + 2y) \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x(x + y) \equiv 0 \pmod{1}$$

也就是 x 、 y 可以取任意正整數。

表 3 中 (x, y) 列以粉色底色表示使用 $(a, b) \mapsto (-b, a+b)$ 變換構成, 後續討論中類似變換情形也在列中加底色。

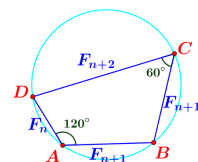


圖 7. 圓內接四邊形

表 1. 對角為 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ 與費氏數列的關係

n	t	對應	圖示	對應
3	$\sqrt{3}$	$(1, 1) \mapsto (-1, 2)$		$(a, b) \mapsto (-b, a + b)$
7	$\sqrt{7}$	$(1, 2) \mapsto (-2, 3)$		$(b, a + b) \mapsto -(a + b), a + 2b$
19	$\sqrt{19}$	$(2, 3) \mapsto (-3, 5)$		$((a + b), a + 2b) \mapsto -(a + 2b), 2a + 3b$
49	7	$(3, 5) \mapsto (-5, 8)$		$(a + 2b, 2a + 3b) \mapsto -(2a + 3b), 3a + 5b$

表 2. $x^2 + xy + y^2 = n$

x	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
y	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4
n	3	7	12	21	12	19	28	27	37	48

定理 1. 當 $\cos \theta = \frac{r}{2s}$ 為有理數時，必存在邊長為整數的圓內接四邊形 $a - b_{(2)} - \left(a + \frac{r}{s} \cdot b\right)$

Proof.

如圖 8 所示。底角為 θ 的等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{CD} = a$ ， $\overline{BC} = \overline{DA} = b$ ，分別過 C 、 D 做高 $\overline{DE}$ 與 $\overline{CF}$ ，因為 $\cos \theta = \frac{r}{2s}$ ，所以 $\overline{AE} = \overline{BF} = \frac{r}{2s}b$ ， $\overline{EF} = a$ ，故可得 $\overline{AB} = a + \frac{r}{s}b$ 。也就是當 $\cos \theta$ 是有理數時，必有邊長為 $(a, b) \mapsto \left(-b, a + \frac{r}{s}b\right)$ 的圓內接四邊形。

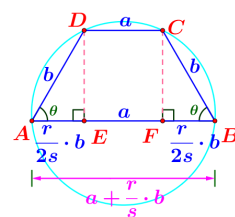


圖 8. $a - b_{(2)} - \left(a + \frac{r}{s}b\right)$

2.2 以等角多邊形建構邊長為整數 $a_{(k)} - b_{(k)}$ 的圓內接 $2k$ 邊形的探討：

2.2.1 以等角多邊形建構圓內接六邊形的邊長為 $a_{(3)} - b_{(3)}$ ：

接著我們探討六邊形 $a_{(3)} - b_{(3)}$ 的外接圓半徑與所對應圓心角 α 、 β 的關係，如圖 9。分別取 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點 M_1 與 M_2 。在 $\triangle OAM$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ ，在 $\triangle OBM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R} \Rightarrow b \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta}{2}$

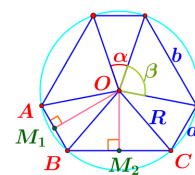


圖 9. $a_{(3)} - b_{(3)}$

表 3. 對角為 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ 的圓內接四邊形

(x, y)	$(1, 1), (-1, 2)$	$(2, 1), (-1, 3)$	$(1, 2), (-2, 3)$	$(2, 2), (-2, 4)$	$(3, 1), (-1, 4)$	$(1, 3), (-3, 4)$
圖示						
n	3	7	7	12	13	13
(x, y)	$(3, 2), (-2, 5)$	$(2, 3), (-3, 5)$	$(4, 1), (-1, 5)$	$(1, 4), (-4, 5)$	$(3, 3), (-3, 6)$	$(4, 2), (-2, 6)$
圖示						
n	19	19	21	21	27	28
(x, y)	$(2, 4), (-4, 6)$	$(5, 1), (-1, 6)$	$(1, 5), (-5, 6)$	$(4, 3), (-3, 7)$	$(3, 4), (-4, 7)$	$(5, 2), (-2, 7)$
圖示						
n	28	31	31	37	37	39
(x, y)	$(2, 5), (-5, 7)$	$(6, 1), (-1, 7)$	$(1, 6), (-6, 7)$	$(4, 4), (-4, 8)$	$(3, 5), (-7, 7)$	$(5, 3), (-3, 8)$
圖示						
n	39	43	43	48	49	49
(x, y)	$(3, 5), (-5, 8)$	$(2, 6), (-6, 8)$	$(6, 2), (-2, 8)$	$(1, 7), (-7, 8)$	$(7, 1), (-1, 8)$	$(4, 5), (-5, 9)$
圖示						
n	49	52	52	57	57	61

。又 $\beta = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ ，故 $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}$ ，由差角公式可得：

$$\begin{aligned}
 b \sin \frac{\alpha}{2} &= a \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right) = a \sin \frac{\beta}{2} = a \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\
 \Rightarrow \left(b + \frac{a}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{a+2b} \\
 \Rightarrow x &= \sqrt{(a+2b)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{4a^2 + 4ab + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + ab + b^2} \\
 \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}} = \frac{1}{2R} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}}{3}
 \end{aligned}$$

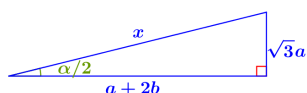


圖 10. 輔助三角形

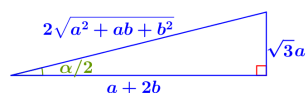


圖 11. 輔助三角形

2.2.2 以等角多邊形建構圓內接八邊形的邊長為 $a_{(4)} - b_{(4)}$ ：

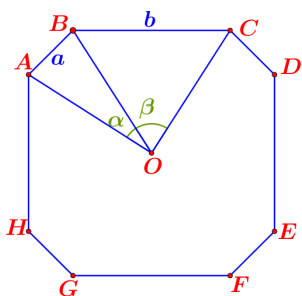


圖 12. $a_{(4)} - b_{(4)}$

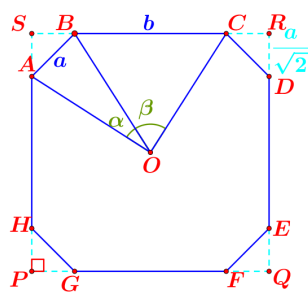


圖 13. $a_{(4)} - b_{(4)}$

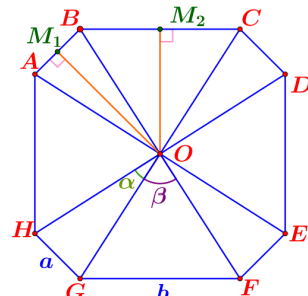


圖 14. $a_{(4)} - b_{(4)}$

接著考慮也以等角多邊形的手法來處理圓內接八邊形。在六邊形中，每個內角是 120° ，所以在八邊形的討論中，每個內角取 135° 。探討一般化的情形，八邊形 $a_{(4)} - b_{(4)}$ 的外接圓半徑與所對應圓心角 α 、 β 的關係。分別取 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點 M_1 與 M_2 。在 $\triangle OAM_1$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ ，在 $\triangle OCM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R} \Rightarrow b \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta}{2}$ 。又 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，由差角公式可得：

$$\begin{aligned}
 b \sin \frac{\alpha}{2} &= a \sin \frac{\beta}{2} = a \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = a \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}a}{2} + b \right) \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{2}a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}a + 2b} \\
 \Rightarrow x &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{2}a + 2b \right)^2} = \sqrt{4a^2 + 4\sqrt{2}ab + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + \sqrt{2}ab + b^2} \\
 \Rightarrow R &= \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + \sqrt{2}ab + b^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2}}{2}
 \end{aligned}$$

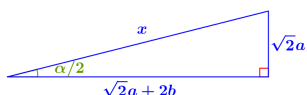


圖 15. 輔助三角形

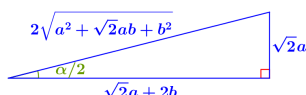


圖 16. 輔助三角形

2.2.3 等角多邊形建構方法一：

定理 2. 建構邊長為 $a_{(k)} - b_{(k)}$ 的 $2k$ 邊形 圓內接 $2k$ 邊形 $a_{(k)} - b_{(k)}$ 邊形中， a 與 b 對應的圓心角分別為 α 與 β ，且 $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ，則外接圓半徑為 $R = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}}{2 \sin \theta}$

Proof. 我利用圓心角、圓周角與圓內接四邊形對角互補的性質來建構等角多邊形 $a_{(k)} - b_{(k)}$ 。

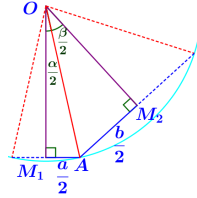


圖 17. 圓內接 $2k$ 邊形的部分圖形

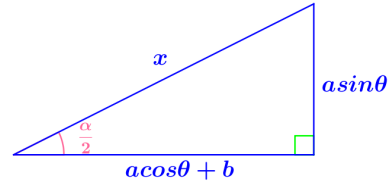


圖 18. 輔助三角形

因為在 $\triangle OAM_1$ 與 $\triangle OAM_2$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ ， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R} \Rightarrow b \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta}{2}$ 。設 $\theta = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$ ， R 為外接圓半徑，則 $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \theta$ 。由差角公式可得：

$$\begin{aligned} b \sin \frac{\alpha}{2} &= a \sin \frac{\beta}{2} = a \sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) \\ \Rightarrow b \sin \frac{\alpha}{2} &= a \left(\sin \theta \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ \Rightarrow (a \cos \theta + b) \sin \frac{\alpha}{2} &= a \sin \theta \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta + b} \end{aligned}$$

由圖 17 知：斜邊 $x = \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta + b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}$
 $\Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}}{2 \sin \theta}$ 。故可以建構邊長為 $a_{(k)} - b_{(k)}$ 的圓內接 $2k$ 邊形。

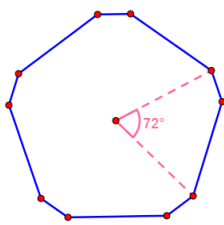


圖 19. $2_{(5)} - 5_{(5)}$

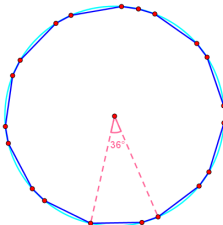


圖 20. $1_{(10)} - 3_{(10)}$

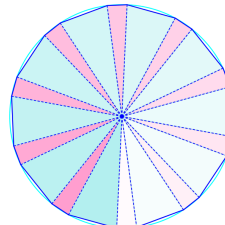


圖 21. $1_{(10)} - 3_{(10)}$

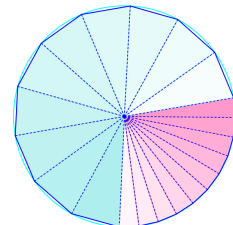


圖 22. $1_{(10)} - 3_{(10)}$

圖 19 的是邊長 $2_{(5)} - 5_{(5)}$ 的圓內接 10 邊形。圖 20 至圖 22 是邊長為 $1_{(10)} - 3_{(10)}$ 的圓內接 20 邊形。邊長排列順序不影響多邊形的建構，如圖 21 與 22。其實可以想像成切 Pizza 後，改變每片 Pizza 的順序，面積不變。因為加法有交換律，故兩種圓心角 α 與 β 交換順序不變。

2.3 以拼貼三角形建構圓內接五邊形與六邊形：

2.3.1 $a - b_{(2)} - c_{(2)}$

我用圓內接四邊形討論中的拼貼三角形 $T_{3,5,7}$ 建構。先做出一個邊長是 7 的正三角形，此正三角形外接圓半徑為 $\frac{7}{\sqrt{3}}$ 。因為三角形必有外接圓，再把兩腰分別加上拼貼三角形 $T_{3,5,7}$ ，就得到了邊長為整數的圓內接五邊形。表 4 是 $3_{(2)} - 5_{(2)} - 7$ 。且其外接圓之半徑與邊長為 7 的正三角形外接圓半徑相同，亦為 $\frac{7}{\sqrt{3}}$ 。此結果與跟當初我們猜想的 $a - b_{(2)} - c_{(2)}$ 結構相同。

引理 1.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= C_0^n \cos_0^n \theta - C_2^n \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + C_4^n \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - C_6^n \cos^{n-6} \theta \sin^6 \theta + \dots \\ \sin(n\theta) &= C_1^n \cos_0^{n-1} \theta \sin \theta - C_3^n \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + C_5^n \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - C_7^n \cos^{n-7} \theta \sin^7 \theta + \dots\end{aligned}$$

其中 $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 為組合數， n 為自然數。

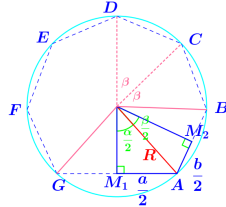


圖 23. $a - b_{(6)}$

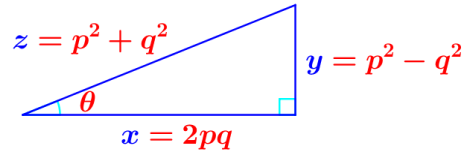


圖 24. 輔助三角形

我們直接討論一般化的情形。我們先從圓內接七邊形開始討論，再推廣至奇數邊形。在 $a - b_{(6)}$ 中，其中 $\overline{AG} = a$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = b$ ，其中 $6b > a$ 。設 $\angle AOG = \alpha$ ， $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOG = \beta$ 。設 $\theta = \frac{\beta}{2}$ 。由 $\triangle OAM_1$ 知 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。在 $\triangle OAM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。故 $\alpha + 6\beta = 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pi - 3\beta$ 。由補角關係可得： $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin(\pi - 3\beta) = \sin 3\beta = \sin 6\theta$ 。由引理 1 得：

$$\frac{a}{2R} = 6 \cos^5 \theta \sin \theta - 20 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + 6 \cos \theta \sin^5 \theta$$

這個三角方程式困擾我們很久，最後我們考慮利用畢氏定理作變數變換。取輔助三角形如圖 24。這也是我認為在本研究中最漂亮的地方。而在後續以完美多邊形建構過程解要解的三角方程式中，我經常使用這種變換。設 p, q 為互質的兩正整數，且 p, q 為一奇數與一偶數， $p > q$ [2]，可得 $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ ， $\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$ 。為了突顯結構，設： $x = 2pq$ 、 $y = p^2 - q^2$ 與 $z = p^2 + q^2$ 。因為

$$\begin{aligned}\alpha + 6\beta = 2\pi &\Rightarrow 6\beta < 2\pi \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow \sin \theta &< \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2(p^2 - q^2) < p^2 + q^2 \Rightarrow p^2 < 3q^2 \Rightarrow p < \sqrt{3}q\end{aligned}$$

故得正整數 p 之取值範圍為 $q < p < \sqrt{3}q$ 。故：

$$\frac{a}{2R} = C_1^6 \left(\frac{x}{z}\right)^5 \left(\frac{y}{z}\right) - C_3^6 \left(\frac{x}{z}\right)^3 \left(\frac{y}{z}\right)^3 + C_5^6 \left(\frac{x}{z}\right) \left(\frac{y}{z}\right)^5, \text{ 取外接圓半徑為 } R = z^6, \text{ 代回上式得：}$$

$$\frac{a}{2} = C_1^6 x^5 y - C_3^6 x^3 y^3 + C_5^6 x y^5, \text{ 即：} a = 2(C_1^6 x^5 y - C_3^6 x^3 y^3 + C_5^6 x y^5),$$

$b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin \theta = 2z^6 \cdot \frac{y}{z} \Rightarrow b = 2yz^5$ 。此時取滿足 $q < p < \sqrt{3}q$ 的正整數 p, q ，必可得正整數 a 與 b 。也就是得到完美七邊形。

但是在上述的討論中，還要注意當七邊形的頂點都在某個直徑的同一側時，如圖 25，上述推論依然成立，因為 $\alpha = 6\beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin 6\beta$ ，與原三角方程式相同。且 β 範圍滿足不等式：

$$6\beta < \pi \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{12} \Rightarrow \sin \theta < \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0.26。也就是 \sin \theta 的取值範圍比原來更小。因為 \frac{1}{4} < 0.26，所以我取近似值推估 \sin \theta 的範圍為：\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < 0.26 \Rightarrow$$

$$p^2 - q^2 < 0.26(p^2 + q^2) \Rightarrow 0.74p^2 < 1.26q^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} < \frac{126}{74} \Rightarrow \frac{p}{q} < \sqrt{\frac{63}{37}} \approx 1.30。就是當$$

$q < p < 1.30q$ 時，可以找到邊長為整數且頂點在某直徑同一側的完美七邊形。

取 $p = 10$ 、 $q = 9$ ，此時 $\sin \theta = \frac{19}{181}$ ， $\cos \theta = \frac{180}{181}$ ，可以得到圖 27，外接圓半徑

$$R = 181^6 = 35161828327081,$$

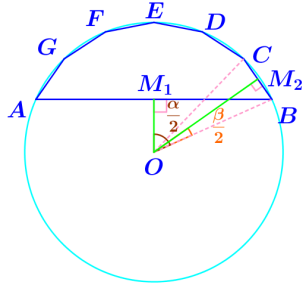


圖 25. $a - b_{(6)}$

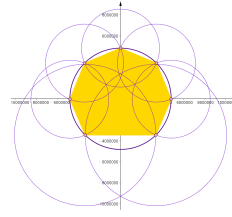


圖 26. $6739920 - 3712930_{(6)}$

$a = 12 \times 180^5 \times 19 - 40 \times 180^3 \times 19^3 + 12 \times 180 \times 19^5 = 41487431253840$,
 $b = 2 \times 181^5 \times 19 = 35161828327081$ 。因為 GeoGebra 的有效位數的限制是 15 位，所以在繪圖時
 我將 p 與 q 伸縮 0.1 倍。圖 28 是完整說明圖。因為此時兩種邊長與外接圓半徑皆為整數，故這些
 多邊形皆為完美七邊形。

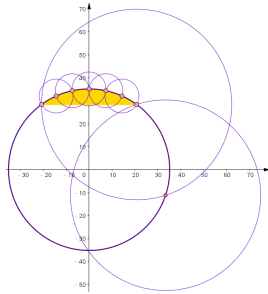


圖 27. $41487431253840 - 35161828327081_{(6)}$

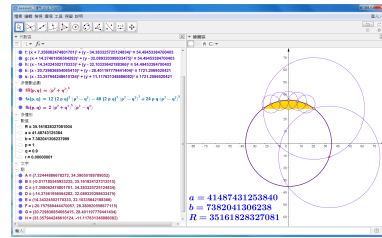


圖 28. 完整圖

2.4.2 建構完美 9 邊形 $a - b_{(8)}$ ：

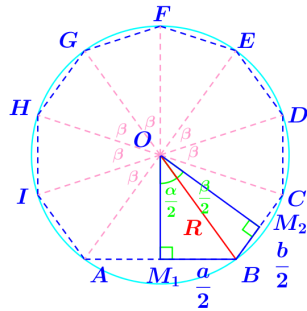


圖 29. $a - b_{(8)}$

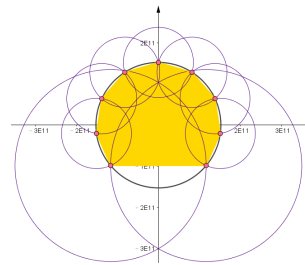


圖 30. $233498471808 - 85449218750_{(8)}$

在邊長為 $a - b_{(8)}$ 的圓內接九邊形 $ABCDEFGHI$ 中，如圖 29。簡述如下。設 $\angle AOB = \alpha$,
 $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \dots = \angle IOA = \beta$ 。若 M_1 與 M_2 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點。由
 $\triangle OBM_1$ 知 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。在 $\triangle OBM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 因為 $\alpha + 8\beta = 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pi - 4\beta$ 。若 9 個
 頂點都在某直徑的同側時， $\alpha = 8\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 4\beta$ 。令 $\theta = \frac{\beta}{2}$ ， $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin(\pi - 8\theta) = \sin 8\theta$ 。
 $\Rightarrow \frac{a}{2R} = \sin 8\theta = C_1^8 \cos^7 \theta \sin \theta - C_3^8 \cos^5 \theta \sin^3 \theta + C_5^8 \cos^3 \theta \sin^5 \theta - C_7^8 \cos \theta \sin^7 \theta$ 。設 p 、 q 為一奇
 一偶的兩互質正整數，且 $q < p < 1.49q$ ，可得 $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}$ ， $\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z}$ ，得：

$$\frac{a}{2R} = C_1^8 \left(\frac{x}{z}\right)^7 \left(\frac{y}{z}\right) - C_3^8 \left(\frac{x}{z}\right)^5 \left(\frac{y}{z}\right)^3 + C_5^8 \left(\frac{x}{z}\right)^3 \left(\frac{y}{z}\right)^5 - C_7^8 \left(\frac{x}{z}\right) \left(\frac{y}{z}\right)^7$$

，取 $R = z^8$ ，得：

$$\frac{a}{2} = C_1^8 x^7 y - C_3^8 x^5 y^3 + C_5^8 x^3 y^5 - C_7^8 x y^7 \Rightarrow a = 2(C_1^8 x^7 y - C_3^8 x^5 y^3 + C_5^8 x^3 y^5 - C_7^8 x y^7)$$

$$\Rightarrow b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2z^8 \cdot \frac{y}{z} \Rightarrow b = 2yz^7, \text{ 因為 } \beta = \frac{\pi - \frac{\alpha}{2}}{4} < \frac{\pi}{4}, \text{ 又}$$

$$\theta = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \sin \theta < \sin \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < \sin \frac{\pi}{8} \approx 0.38 \Rightarrow p^2 - q^2 < 0.38(p^2 + q^2) \Rightarrow q < p < 1.49q. \text{ 取}$$

$$p = 4, q = 3, \text{ 得 } \sin \theta = \frac{7}{25}, \cos \theta = \frac{24}{25}, \text{ 得完美九邊形 } 233498471808 - 85449218750_{(8)}.$$

2.4.3 建構完美 11 邊形 $a - b_{(10)}$ ：

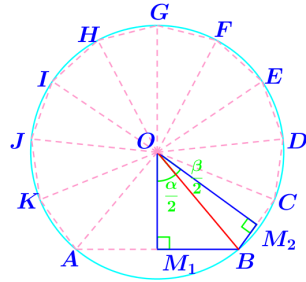


圖 31. $a - b_{(10)}$

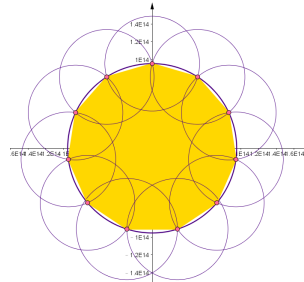


圖 32. $57031001785632 - 53405761718750_{(10)}$

類似 $a - b_{(8)}$ 的推論，如圖 31，在邊長為 $a - b_{(10)}$ 的圓內接 11 邊形 $ABCDEFGHIJK$ 中，設 $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \dots = \angle KOA = \beta$ 。若 M_1 與 M_2 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點，故 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ ， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。因為 $\alpha + 10\beta = 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pi - 5\beta$ ，若 11 個頂點都在某直徑的同一側，則 $\alpha = 10\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 5\beta$ 。令 $\theta = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin(\pi - 10\theta) = \sin 10\theta$ 。故 $\frac{a}{2R} = C_1^{10} \cos^9 \theta \sin \theta - C_3^{10} \cos^7 \theta \sin^3 \theta + C_5^{10} \cos^5 \theta \sin^5 \theta - C_7^{10} \cos^3 \theta \sin^7 \theta + C_9^{10} \cos \theta \sin^9 \theta$ ，設 p, q 為一奇一偶的兩互質正整數，且 $p > q$ ， $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}$ ， $\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z}$ 。得：

$$\frac{a}{2R} = C_1^{10} \left(\frac{x}{z}\right)^9 \left(\frac{y}{z}\right) - C_3^{10} \left(\frac{x}{z}\right)^7 \left(\frac{y}{z}\right)^3 + C_5^{10} \left(\frac{x}{z}\right)^5 \left(\frac{y}{z}\right)^5 - C_7^{10} \left(\frac{x}{z}\right)^3 \left(\frac{y}{z}\right)^7 + C_9^{10} \left(\frac{x}{z}\right) \left(\frac{y}{z}\right)^9$$

取 $R = z^{10}$ ，得： $\frac{a}{2} = C_1^{10} x^9 y - C_3^{10} x^7 y^3 + C_5^{10} x^5 y^5 - C_7^{10} x^3 y^7 + C_9^{10} x y^9$
 $\Rightarrow a = 2(C_1^{10} x^9 y - C_3^{10} x^7 y^3 + C_5^{10} x^5 y^5 - C_7^{10} x^3 y^7 + C_9^{10} x y^9) \Rightarrow b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2z^{10} \cdot \frac{y}{z} \Rightarrow b = 2yz^9$ 。
 因為 $\beta = \frac{2\pi - \alpha}{10} < \frac{\pi}{5} \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{10} \Rightarrow \sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \Rightarrow q < p < 1.37q$ ，取
 $p = 4, q = 3$ ，得 $\sin \theta = \frac{7}{25}$ ， $\cos \theta = \frac{24}{25}$ ，可得完美 11 邊形，如圖 32。

2.4.4 建構完美 $2k + 1$ 邊形 $a - b_{(2k)}$ ：

定理 3. 圓內接 $2k + 1$ 邊形 $a - b_{(2k)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑與邊長分別為：

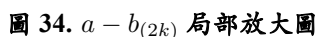
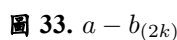
$$R = (p^2 + q^2)^{2k}$$

$$a = 2 \left(C_1^{2k} (2pq)^{2k-1} (p^2 - q^2) - C_3^{2k} (2pq)^{2k-3} (p^2 - q^2)^3 + C_5^{2k} (2pq)^{2k-5} (p^2 - q^2)^5 - \dots \right)$$

$$b = 2 (p^2 + q^2)^{2k-1} (p^2 - q^2)$$

Proof.

在 $a - b_{(2k)}$ 中， M_1 與 M_2 分別為 $\overline{A_1 A_{2k+1}}$ 與 $\overline{A_1 A_2}$ 的中點。且 $\angle A_1 O A_{2k+1} = \alpha$ ， $\angle A_1 O A_2 = \angle A_2 O A_3 = \dots = \angle A_{2k} O A_{2k+1} = \beta$ 。故 $\frac{\alpha}{2} + k\beta = \pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pi - k\beta$ 。在 $\triangle O A_1 M_1$


$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \sin(2k\theta) = C_1^{2k} \cos^{2k-1} \theta \sin \theta - C_3^{2k} \cos^{2k-3} \theta \sin^3 \theta + C_5^{2k} \cos^{2k-5} \theta \sin^5 \theta - \dots$$
$$\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z} \text{ 代回上式得:}$$

$$\frac{a}{2R} = C_1^{2k} \left(\frac{x}{z}\right)^{2k-1} \left(\frac{y}{z}\right) - C_3^{2k} \left(\frac{x}{z}\right)^{2k-3} \left(\frac{y}{z}\right)^3 + C_5^{2k} \left(\frac{x}{z}\right)^{2k-5} \left(\frac{y}{z}\right)^5 - \dots$$

$$\frac{a}{2} = C_1^{2k} x^{2k-1} y - C_3^{2k} x^{2k-3} y^3 + C_5^{2k} x^{2k-5} y^5 - \dots$$

$$b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2z^{2k} \cdot \frac{y}{z} \Rightarrow b = 2yz^{2k-1}。 \text{因為 } \alpha + 2k\beta = 2\pi \Rightarrow 2k\beta < 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{2k} < \frac{\pi}{2k}, \text{ 所以}$$

$\sin \theta < \sin \frac{\pi}{2k}$, 即 $\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < \sin \frac{\pi}{2k} \Rightarrow q < p < \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{\pi}{2k}}{1 - \sin \frac{\pi}{2k}}} q$ 。此時取滿足上式的正整數 p, q , 必可得完美 $2k + 1$ 邊形 $a - b_{(2k)}$ 。

2.4.5 建構完美 n 邊形 $a - b_{(n-1)}$:

定理 4. 圓內接 n 邊形 $a-b_{(n-1)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑與邊長分別為：

$$R = (p^2 + q^2)^{n-1}$$

$$2 \left(C_1^{n-1} (2pq)^{n-2} (p^2 - q^2) - C_3^{n-1} (2pq)^{n-4} (p^2 - q^2)^3 + C_5^{n-1} (2pq)^{n-6} (p^2 - q^2)^5 - \dots \right)$$

$$b = 4 (p^2 + q^2)^{n-3} (p^2 - q^2)$$

Proof.

在 $a - b_{(n-1)}$ 中, M_1 與 M_2 分別為 $\overline{A_1A_n}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 的中點。且 $\angle A_1OA_n = \alpha$, $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_{(n-1)}OA_n = \beta$, 故 $\alpha + (n-1)\beta = 2\pi$ 。又 $\triangle OA_1M_1$ 中,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R} \circ \Delta OA_1M_2 \nmid, \sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R} \circ \text{又} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\pi - \frac{(n-1)\beta}{2} \right) = \sin \frac{(n-1)\beta}{2}, \text{設}$$

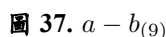
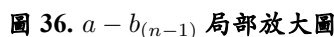
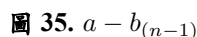
$$\frac{\beta}{2} = \theta \circ \text{故} \frac{a}{2R} = \sin(n-1)\theta \circ$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = C_1^{m-1} \cos^{n-2} \theta \sin \theta - C_3^{m-1} \cos^{n-4} \theta \sin^3 \theta + C_5^{m-1} \cos^{n-6} \theta \sin^5 \theta - C_7^{m-1} \cos^{n-8} \theta \sin^7 \theta + \dots$$

設 p 、 q 為一奇一偶的兩互質正整數，且 $p > q$ ，作變數變換，得 $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}$ ，

$$\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z} \text{ 代回上式得:}$$

$$\frac{a}{2R} = C_1^{n-1} \left(\frac{x}{z}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{z}\right) - C_3^{n-1} \left(\frac{x}{z}\right)^{n-4} \left(\frac{y}{z}\right)^3 + C_5^{n-1} \left(\frac{x}{z}\right)^{n-6} \left(\frac{y}{z}\right)^5 - \dots$$



$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = C_1^9 \left(\frac{x}{z}\right)^8 \left(\frac{y}{z}\right) - C_3^9 \left(\frac{x}{z}\right)^6 \left(\frac{y}{z}\right)^3 + C_5^9 \left(\frac{x}{z}\right)^4 \left(\frac{y}{z}\right)^5 - C_7^9 \left(\frac{x}{z}\right)^2 \left(\frac{y}{z}\right)^7 + C_9^9 \left(\frac{y}{z}\right)^9, \text{ 取}$$

$R = z^9$ ，代回上式得：

$$\begin{aligned}\frac{a}{2} &= C_1^9 x^8 y - C_3^9 x^6 y^3 + C_5^9 x^4 y^5 - C_7^9 x^2 y^7 + C_9^9 y^9 \\ \Rightarrow a &= 2(C_1^9 x^8 y - C_3^9 x^6 y^3 + C_5^9 x^4 y^5 - C_7^9 x^2 y^7 + C_9^9 y^9) \\ \Rightarrow b &= 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin \theta = 2z^9 \cdot \frac{y}{z} \Rightarrow b = yz^8\end{aligned}$$

此時取滿足 $q < p < 1.414q$ 的正整數 p 、 q 必可得正整數 a 、 b 。例如取 $p = 4$ 、 $q = 3$ ，此時 $\sin \theta = \frac{7}{25}$ ， $\cos \theta = \frac{24}{25}$ ，外接圓半徑 $R = 25^9 = 3814697265625$ ， $a = 4228490555534$ ， $b = 2136230468750$ 。圖 38 是完美十邊形以此種方法建構的圓內接偶數邊形也是完美多邊形。圖 39 到圖 42 是用定理 3 做出外接圓半徑為 25 的完美三角形 48-30₍₂₎ 與外接圓半徑為 125 的完美四邊形 234-150₍₃₎，以及外接圓半徑為 625 的完美五邊形 672-750₍₄₎，外接圓半徑為 371293 的完美六邊形 683050-285610₍₅₎。

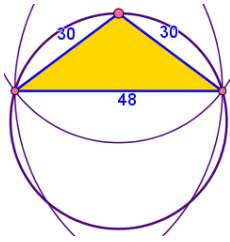


圖 39. 48-30₍₂₎

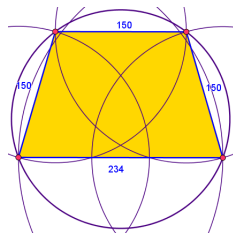


圖 40. 234-150₍₃₎

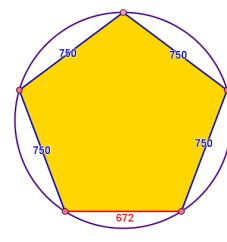


圖 41. 672-750₍₄₎

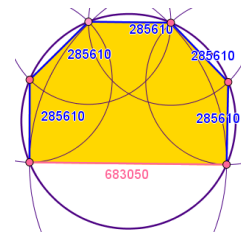


圖 42. 六邊形

2.5 建構完美 n 邊形 $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ ：

2.5.1 建構完美 7 邊形 $a_{(2)} - b_{(5)}$ ：

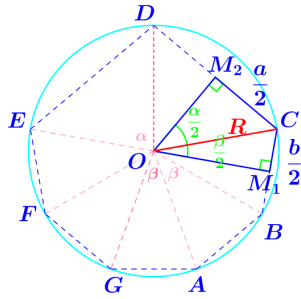


圖 43. $a_{(2)} - b_{(5)}$

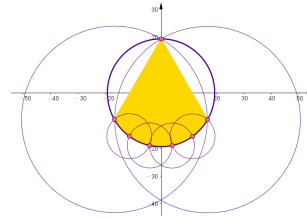


圖 44. 336041137800₍₂₎ - 81118856880₍₅₎

在 $a_{(2)} - b_{(5)}$ 中，如圖 43，設 $\angle COD = \angle DOE = \alpha$ ， $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOG = \angle EOF = \angle FOG = \beta$ ，故 $2\alpha + 5\beta = 2\pi$ ，設 M_1 為 $\overline{BC}$ 的中點， M_2 為 $\overline{CD}$ 的中點。在 $\triangle OCM_2$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。在 $\triangle OCM_1$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。又 $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\beta}{4} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\beta}{4} \right) = \cos \frac{5\beta}{4}$ 。令 $\theta = \frac{\beta}{4}$ 。故

$$\frac{a}{2R} = \cos 5\theta = C_0^5 \cos^5 \theta - C_2^5 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + C_4^5 \cos \theta \sin^4 \theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta$$

考慮變數變換，設 p 、 q 為一奇一偶的兩互質正整數，且 $p > q$ ，可得 $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}$ ，

$$\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z}。因為 $2\alpha + 5\beta = 2\pi \Rightarrow 5\beta < 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{4} < \frac{\pi}{10} \Rightarrow \sin \theta < \sin \frac{\pi}{10} \Rightarrow$$$

$$\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx 0.31 \Rightarrow 0.69p^2 < 1.31q^2 \Rightarrow q < p < 1.37q。故可得：$$

$$\frac{a}{2R} = \left(\frac{x}{z} \right)^5 - 10 \left(\frac{x}{z} \right)^3 \left(\frac{y}{z} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{z} \right) \left(\frac{y}{z} \right)^4，取 $R = z^5$ ，代回上式得：$$

$a = 2x^5 - 20x^3y^2 + 10xy^4$, $b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin 2\theta = 2z^5 \cdot \left(2 \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z}\right) \Rightarrow b = 4xyz^3$ 。此時取滿足 $q < p < 197q$ 的正整數 p 、 q 必可得正整數 a 、 b 。取 $p = 10$ 、 $q = 9$ ，此時 $\sin \theta = \frac{19}{181}$ ，

$\cos \theta = \frac{180}{181}$ ，外接圓半徑 $R = 181^5$ ， $a = 336041137800$ ， $b = 81118856880$ 。圖 44。

若取 $p = 4$ 、 $q = 3$ ，此時 $\sin \theta = \frac{24}{25}$ ， $\cos \theta = \frac{7}{25}$ ，外接圓半徑 $R = 25^5 = 9765625$ ， $a = 2953968$ ， $b = 2R \sin 2\theta = 10500000$ ，如圖 45 與 46。此時兩種邊長與外接圓半徑皆為整數。

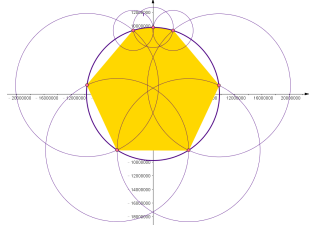


圖 45. $2953968_{(2)} - 10500000_{(5)}$

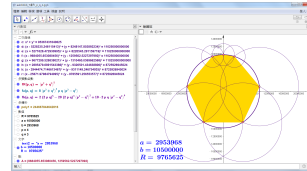


圖 46. $2953968_{(2)} - 10500000_{(5)}$ 完全圖

2.5.2 建構完美 $2k+1$ 邊形 $a_{(2)} - b_{(2k-1)}$ ：

定理 5. 圓內接 $2k+1$ 邊形 $a_{(2)} - b_{(2k-1)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑與邊長分別為：

$$R = (p^2 + q^2)^{2k-1}$$

$$a = 2 \left(C_0^{2k-1} (2pq)^{2k-1} - C_2^{2k-1} (2pq)^{2k-3} (p^2 - q^2)^2 + C_4^{2k-1} (2pq)^{2k-5} (p^2 - q^2)^4 - \dots \right)$$

$$b = 4 (p^2 + q^2)^{2k-3} (p^2 - q^2) (2pq)$$

Proof.

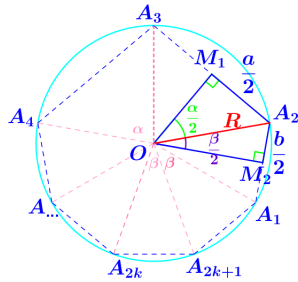


圖 47. $a_{(2)} - b_{(2k-1)}$

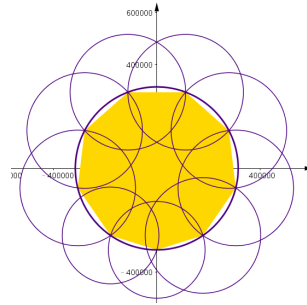


圖 48. 完美 9 邊形

在 $a_{(2)} - b_{(2k-1)}$ 中， M_1 與 M_2 分別為 $\overline{A_2 A_3}$ 與 $\overline{A_1 A_2}$ 的中點。且 $\angle A_2 O A_3 = \angle A_3 O A_4 = \alpha$ ， $\angle A_4 O A_5 = \dots = \angle A_{2k+1} O A_1 = \angle A_1 O A_2 = \beta$ ，故 $2\alpha + (2k-1)\beta = 2\pi$ 。又 $\triangle O A_2 M_1$ 中，

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。在 $\triangle O A_1 M_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。設 $\theta = \frac{\beta}{2}$ 則

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{(2k-1)\beta}{4} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (2k-1)\theta \right) = \cos(2k-1)\theta。$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = C_0^{2k-1} \cos^{2k-1} \theta - C_2^{2k-1} \cos^{2k-3} \theta \sin^2 \theta + C_4^{2k-1} \cos^{2k-5} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

做變數變換，設 p 、 q 為一奇一偶的兩互質正整數，且 $p > q$ ，可得： $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}$ ，

$\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z}$ 故可得：

$$\frac{a}{2R} = C_0^{2k-1} \left(\frac{x}{z} \right)^{2k-1} - C_2^{2k-1} \left(\frac{x}{z} \right)^{2k-3} \left(\frac{y}{z} \right)^2 + C_4^{2k-1} \left(\frac{x}{z} \right)^{2k-5} \left(\frac{y}{z} \right)^4 - \dots$$

取 $R = z^{2k-1}$ 代回上式得：

$$a = 2 \left(C_0^{2k-1} x^{2k-1} - C_2^{2k-1} x^{2k-3} y^2 + C_4^{2k-1} x^{2k-5} y^4 - \dots \right)$$

$$b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin 2\theta = 2z^{2k-1} \cdot \left(2 \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z} \right) \Rightarrow b = 4xyz^{2k-3} \circ \text{因為}$$

$$(2k-1)\beta < 2\pi \Rightarrow \sin \theta = \sin \frac{\beta}{4} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < \sin \left(\frac{\pi}{4k-2} \right) \Rightarrow q < p < \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{\pi}{4k-2}}{1 - \sin \frac{\pi}{4k-2}}} q \circ \text{此時滿足}$$

上市的正整數 p, q ，必可得完美 $2k+1$ 邊形 $a_{(2)} - b_{(2k-1)}$ 。

例如取 $p = 6, q = 5$ ，此時 $\sin \theta = \frac{11}{61}$ ， $\cos \theta = \frac{60}{61}$ ，外接圓半徑 $R = 61^7$ 。圖 48 是完美 9 邊形 $1866840608760_{(2)} - 2229734234640_{(8)}$ 。

2.5.3 建構完美 n 邊形 $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ ：

定理 6. 圓內接 n 邊形 $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑與邊長分別為：

$$R = (p^2 + q^2)^{n-2}$$

$$a = 2 \left(C_0^{n-2} (2pq)^{n-2} - C_2^{n-2} (2pq)^{n-4} (p^2 - q^2)^2 + C_4^{n-2} (2pq)^{n-6} (p^2 - q^2)^4 - \dots \right)$$

$$b = 4 (p^2 + q^2)^{n-4} (p^2 - q^2) (2pq)$$

Proof.

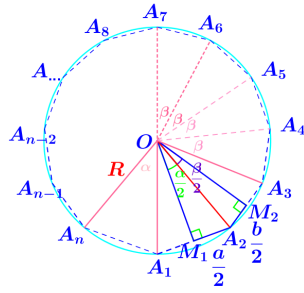


圖 49. $a_{(2)} - b_{(n-2)}$

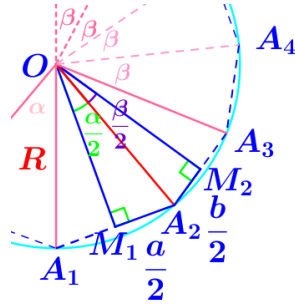


圖 50. $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ 局部放大圖

在 $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ 中， M_1 與 M_2 分別為 $\overline{A_1 A_2}$ 與 $\overline{A_2 A_3}$ 的中點。且 $\angle A_1 O A_n = \angle A_1 O A_2 = \alpha$ ， $\angle A_2 O A_3 = \dots = \angle A_{(n-1)} O A_n = \beta$ ，故 $2\alpha + (n-2)\beta = 2\pi$ 。又 $\triangle O A_2 M_1$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。

$\triangle O A_2 M_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。又 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(n-2)\beta}{4} \right) = \cos \frac{(n-2)\beta}{4}$ ，設

$$\frac{\beta}{4} = \theta \Rightarrow \frac{a}{2R} = \cos(n-2)\theta。$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = C_0^{n-2} \cos^{n-2} \theta - C_2^{n-2} \cos^{n-4} \theta \sin^2 \theta + C_4^{n-2} \cos^{n-6} \theta \sin^4 \theta - C_6^{n-2} \cos^{n-8} \theta \sin^6 \theta + \dots$$

設 p, q 為一奇一偶的兩互質正整數，且 $p > q$ 。我們取變數變換，可得： $\sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}$ ，

$$\cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{a}{2R} = C_0^{n-2} \left(\frac{x}{z} \right)^{n-2} - C_2^{n-2} \left(\frac{x}{z} \right)^{n-4} \left(\frac{y}{z} \right)^2 + C_4^{n-2} \left(\frac{x}{z} \right)^{n-6} \left(\frac{y}{z} \right)^4 - \dots$$

取外接圓半徑為 $R = z^{n-2}$ 代入上式可得：

$$\frac{a}{2} = C_0^{n-2} x^{n-2} - C_2^{n-2} x^{2k-4} y^2 + C_4^{n-2} x^{n-6} y^4 - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{即 } a &= 2(C_0^{n-2}x^{n-2} - C_2^{n-2}x^{2k-4}y^2 + C_4^{n-2}x^{n-6}y^4 - \dots), \\ b &= 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin 2\theta = 2z^{n-2} \cdot \left(2\frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z}\right) \Rightarrow b = 4xyz^{n-4}。 \text{因為} \\ 2\alpha + (n-2)\beta &= \pi \Rightarrow (n-2)\beta < 2\pi \Rightarrow \beta < \frac{2\pi}{n-2} \Rightarrow \sin \theta < \sin \frac{\pi}{2n-4} \text{ 即} \\ \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} &< \sin \frac{\pi}{n-2} \Rightarrow q < p < \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n-4}}{1 - \sin \frac{\pi}{2n-4}}} q。 \text{代回上式得完美 } n \text{ 邊形 } a_{(2)} - b_{(n-2)}。 \end{aligned}$$

再以邊長為整

數的圓內接十邊形 $a_{(2)} - b_{(8)}$ 邊形為例，說明偶數邊形也是可以用這個方法建構，且其外接圓半徑亦為整數。說明如下。如圖 51，設 $\angle AOB = \angle BOC = \alpha$ ， $\angle COD = \angle DOE = \dots = \angle JOA = \beta$ ，故 $2\alpha + 8\beta = 2\pi$ 。設 M_1 與 M_2 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點。又 $\triangle OBM_1$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。 $\triangle OBM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。

$$\text{又 } 2\alpha + 8\beta = 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\beta \Rightarrow \beta < \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}。$$

$$\text{設 } \theta = \frac{\beta}{2}。 \text{故 } \sin \theta = \sin \frac{\beta}{2} < \sin \frac{\pi}{8} \approx 0.38$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = \cos 2\beta = \cos 4\theta。 \text{故}$$

$$\frac{a}{2R} = C_0^4 \cos^4 \theta - C_2^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_4^4 \sin^4 \theta， \text{取變數變換，設 } p、q \text{ 為一奇一偶的兩互質正整數，}$$

$$\text{且 } p > q， \text{可得 } \sin \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{y}{z}， \cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{x}{z}。 \text{取}$$

$$\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} < 0.38 \Rightarrow 0.62p^2 < 1.38q^2 \Rightarrow p^2 < 2.23q^2 \Rightarrow p < 1.49q。$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = C_0^4 \left(\frac{x}{z} \right)^4 - C_2^4 \left(\frac{x}{z} \right)^2 \left(\frac{y}{z} \right)^2 + C_4^4 \left(\frac{y}{z} \right)^4， \text{取 } R = z^4， \text{代回上式得：}$$

$$\frac{a}{2} = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \Rightarrow a = 2x^4 - 12x^2y^2 + 2y^4 \Rightarrow b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin \theta = 2z^4 \left(\frac{y}{z} \right) \Rightarrow b = 2yz^3。 \text{此時取滿足 } q < p < 1.49q \text{ 的正整數 } p、q， \text{必可得正整數 } a \text{ 與 } b。$$

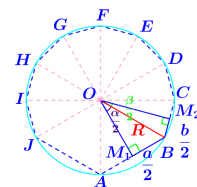


圖 51. $a_{(2)} - b_{(8)}$

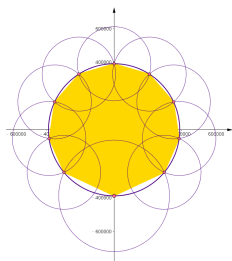


圖 52. $329666_{(2)} - 218750_{(6)}$

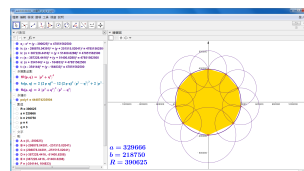


圖 53. $329666_{(2)} - 218750_{(6)}$ 完整圖

例如取 $p = 4、q = 3$ ，此時 $\sin \theta = \frac{7}{25}$ ， $\cos \theta = \frac{24}{25}$ ，外接圓半徑 $R = 25^4 = 390625$ ，

$a = 2 \times 24^4 - 12 \times 24^3 \times 7^2 + 2 \times 7^4 = 329666$ ， $b = 2 \times 25^3 \times 7 = 218750$ 。圖 52 與 53 是完美十邊形 $329666_{(2)} - 218750_{(8)}$ 。以此種方法建構的圓內接偶數邊形也是完美多邊形。

2.6 建構完美 n 邊形 $a_{(4)} - b_{(n-4)}$ ：

2.6.1 建構完美 7 邊形 $a_{(4)} - b_{(3)}$ ：

起初我以為 $a_{(3)} - b_{(4)}$ 的完美 7 邊形是特例，之後抓到規律是以 4

邊為主。圖 54 是圓內接 7 邊形的圖形。設 $\angle AOB = \angle AOG = \angle FOG = \alpha$ ， $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \beta$ ，故 $3\alpha + 4\beta = 2\pi$ 。

設 M_1 與 M_2 分別是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點。 $\triangle OBM_1$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。

$\triangle OBM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。又 $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{8} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{8} \right)$ 。設

$$\theta = \frac{\alpha}{8} = \frac{2\pi - 4\beta}{24} < \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{b}{2R} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3\theta \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos 3\theta - \cos \frac{\pi}{4} \sin 3\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 3\theta - \sin 3\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{R} = \sqrt{2} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta)$$

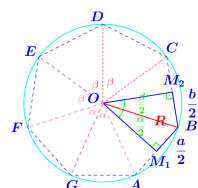


圖 54. $a_{(3)} - b_{(4)}$

如圖 55，直角三角形 $\triangle PQR$ 中， $\angle Q = 90^\circ$ 。設 $\overline{PQ} = t$ ， $\overline{QR} = s$ ， $\overline{PR} = \sqrt{s^2 + t^2} = \sqrt{2}m$ 。我使用 GeoGebra 的 *Sequence()* 函數，得到 $m < 2000$ 時只有下列的解： $1 - 7 - 5\sqrt{2}$ 、 $1 - 41 - 29\sqrt{2}$ 、 $1 - 239 - 169\sqrt{2}$ 、 $1 - 1393 - 985\sqrt{2}$ 做變數變換。因為 $s^2 + t^2 = 2m^2$ ，因為 s 的值很小，取 $s = 1$ ， $t = 7$ 時， $m = 5$ ，即 $\sin \theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ ， $\cos \theta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ ，則 $\theta \approx 8.13^\circ$ 。得：

$$\frac{b}{R} = \sqrt{2} \left[\left(\frac{7}{5\sqrt{2}} \right)^3 - 3 \left(\frac{7}{5\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)^2 - 3 \left(\frac{7}{5\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)^3 \right] = \frac{176}{250}。即外接圓半徑 $R = 250$ 。 $b = \sqrt{2}R (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) = 176$ ，則$$

$$a = 8R \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 8 \times 250 \times \frac{1}{5\sqrt{2}} \times \frac{7}{5\sqrt{2}} \times \left(\left(\frac{7}{5\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)^2 \right) = \frac{1344}{5}。故$$

得： $R : a : b = 250 : \frac{1344}{5} : 176 = 625 : 672 : 440$ 此時取外接圓半徑 $R = 625$ 、兩種邊長 $a = 672$ 與 $b = 440$ ，故為完美七邊形。在尋找 $a_{(3)} - b_{(6)}$ 的過程中，因為角度誤取成兩倍，意外造成外接圓半徑為 7 的完美六邊形 $2_{(3)} - 11_{(3)}$ ，如圖 58。這是目前找到外接圓半徑最小的完美多邊形。

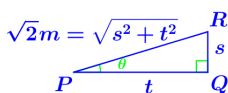


圖 55. 輔助三角形

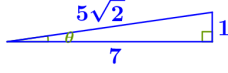


圖 56. 輔助三角形

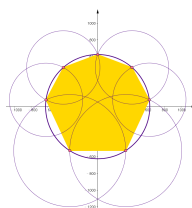


圖 57. $672_{(3)} - 440_{(3)}$

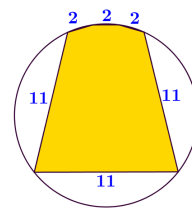


圖 58. $2_{(3)} - 11_{(3)}$

2.6.2 建構完美 9 邊形 $a_{(4)} - b_{(5)}$ ：

再以邊長為整數的圓內接九邊形 $a_{(4)} - b_{(5)}$ 為例，

如圖 59 說明如下：如圖 59，設 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \alpha$ ， $\angle EOF = \angle FOG = \dots = \angle IOA = \beta$ ，故 $4\alpha + 5\beta = 2\pi$ 。

設 M_1 與 M_2 分別為 $\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$ 的中點。又 $\triangle OEM_1$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。

$\triangle OEM_2$ 中， $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。又 $4\alpha + 5\beta = 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{5\beta}{8} \Rightarrow \beta < \frac{2\pi}{5}$ 。

$\sin \theta = \sin \frac{\beta}{8} < \sin \frac{\pi}{20} \approx 0.16$ 。設 $\theta = \frac{\beta}{8}$ 。

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5\theta \right) \Rightarrow \frac{a}{2R} = \sin \frac{\pi}{4} \cos 5\theta - \cos \frac{\pi}{4} \sin 5\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5\theta - \sin 5\theta)$$

$$\frac{a}{R} =$$

$$\sqrt{2} [(C_0^5 \cos^5 \theta - C_2^5 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + C_4^5 \cos \theta \sin^4 \theta) - (C_1^5 \cos^4 \theta \sin \theta - C_3^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + C_5^5 \sin^5 \theta)]$$

$$\text{取 } \sin \theta = \frac{1}{29\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{41}{29\sqrt{2}}, \text{ 得 } \frac{a}{R} = \frac{41^5 - 10 \times 41^3 + 5 \times 41 - 5 \times 41^4 + 10 \times 41 - 1^5}{29^5 \times 4}$$

時 $a = \sqrt{2}R(\cos 5\theta - \sin 5\theta)$ ， $b = 2R \sin 4\theta$ 。取外接圓半徑 $R = 29^5 \times 4 = 82044596$ ，

$$a = 101040271, b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin 4\theta = 2R (C_1^4 \cos^3 \theta \sin \theta - C_3^4 \cos \theta \sin^3 \theta) =$$

$$8R(\cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^3 \theta) = 8R \left[\left(\frac{41}{29\sqrt{2}} \right)^3 \left(\frac{1}{29\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{41}{29\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{29\sqrt{2}} \right)^3 \right] = 15980160。$$

事實上如果將 2.6.1 節中的 $a_{(3)} - b_{(4)}$ 改成 $a_{(4)} - b_{(3)}$ ，則可以更輕易看出 $a_{(4)} - b_{(n-4)}$ 中，半徑與兩組相異邊長的一般式。

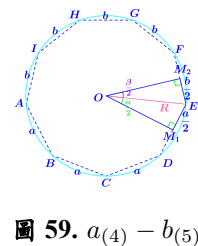


圖 59. $a_{(4)} - b_{(5)}$

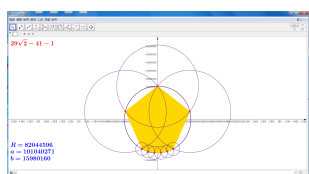


圖 60. $101040271_{(4)} - 15980160_{(5)}$

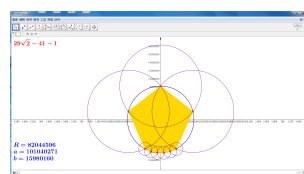


圖 61. $101040271_{(4)} - 15980160_{(5)}$

2.6.3 建構完美 n 邊形 $a_{(4)} - b_{(n-4)}$:

定理 7. 當 n 為奇數時，圓內接 n 邊形 $a_{(4)} - b_{(n-4)}$ 是完美多邊形，且外接圓半徑與邊長分別為：

斜邊是 $\sqrt{2}$ 的 t 倍，且兩股是整數的直角三角形， $R = 4t^q$ 。

$$a = \sqrt{2}R(\cos(n-4)\theta - \sin(n-4)\theta)$$

$$b = 2R \sin 4\theta$$

Proof.

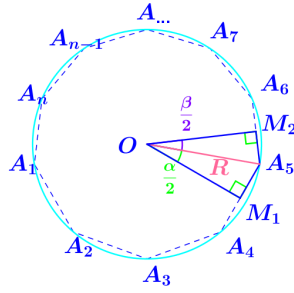


圖 62. $a_{(4)} - b_{(n-4)}$

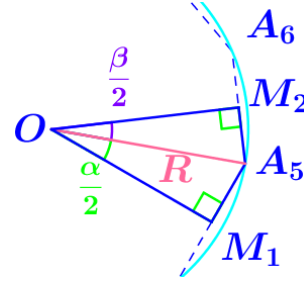


圖 63. $a_{(4)} - b_{(n-4)}$ 局部放大圖

在 $a_{(4)} - b_{(n-4)}$ 中。且 $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 = \angle A_4OA_5 = \alpha$ ，
 $\angle A_5OA_6 = \dots = \angle A_nOA_1 = \beta$ ，故 $4\alpha + (n-4)\beta = 2\pi \Rightarrow 4\alpha = 2\pi - (n-4)\beta$ 。設 $\theta = \frac{\beta}{8}$ ，
 $(n-4)\beta < 2\pi \Rightarrow \sin \theta = \sin \frac{\beta}{8} < \sin \frac{\pi}{4n-16}$ 。又 $\triangle OA_2M_1$ 中， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$ 。又 $\triangle OA_2M_2$ 中，
 $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$ 。又 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{(n-4)\beta}{8} \right)$
 $\Rightarrow \frac{a}{2R} = \sin \frac{\pi}{4} \cos(n-4)\theta - \cos \frac{\pi}{4} \sin(n-4)\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(n-4)\theta - \sin(n-4)\theta)$
 $\Rightarrow \frac{a}{R} = \sqrt{2}(\cos(n-4)\theta - \sin(n-4)\theta)$
 如圖 64，設 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}t}$ ， $\sin \theta = \frac{m}{\sqrt{2}t}$ ， m, t 為自然數。

$$\begin{aligned} \frac{a}{R} = \sqrt{2} & \left[\left(C_0^{n-4} \left(\frac{m}{\sqrt{2}t} \right)^{n-4} - C_2^{n-4} \left(\frac{m}{\sqrt{2}t} \right)^{n-6} \left(\frac{1}{\sqrt{2}t} \right)^2 + \dots \right) \right. \\ & \left. - \left(C_1^{n-4} \left(\frac{m}{\sqrt{2}t} \right)^{n-5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}t} \right)^1 - C_3^{n-4} \left(\frac{m}{\sqrt{2}t} \right)^{n-7} \left(\frac{1}{\sqrt{2}t} \right)^3 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

故取 n 為奇數時：

$$\begin{aligned} \frac{a}{R} &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t)^{n-4}} [(C_0^{n-4}m^{n-4} - C_2^{n-4}m^{n-6} + \dots) - (C_1^{n-4}m^{n-5} - C_3^{n-4}m^{n-7} + \dots)] \\ \Rightarrow a &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor} t^{n-4}} [(C_0^{n-4}m^{n-4} - C_2^{n-4}m^{n-6} + \dots) - (C_1^{n-4}m^{n-5} - C_3^{n-4}m^{n-7} + \dots)] R \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor} t^{n-4}} [(C_0^{n-4}m^{n-4} - C_2^{n-4}m^{n-6} + \dots) - (C_1^{n-4}m^{n-5} - C_3^{n-4}m^{n-7} + \dots)] R \end{aligned}$$

又

$$b = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \sin 4\theta = 2R(C_1^4 \cos^3 \theta \sin \theta - C_3^4 \cos \theta \sin^3 \theta) \Rightarrow b = 8R(\cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^3 \theta)$$

此時考慮以對邊為 1，斜邊邊長為 $\sqrt{2}$ 整數倍的直角三角形 $1 - m - \sqrt{m^2 + 1}$ ，因為
 $\sqrt{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}t$ ，所以 $t = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2t^2 = m^2 + 1 \Rightarrow t = \frac{m^2 + 1}{2}$ 為整數。

我使用 GeoGebra 的

`RemoveUndefined(Sequence(If(sqrt((m^2 + 1)/2) == floor(sqrt((m^2 + 1)/2)), m), m, 1, 1000))`，

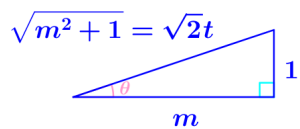


圖 64. 輔助三角形

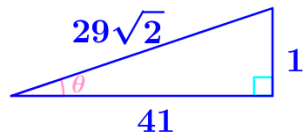
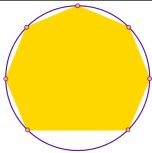
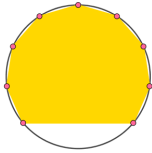
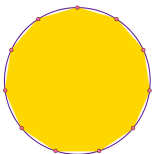
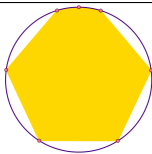
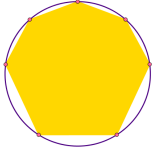
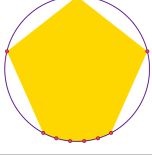


圖 65. 輔助三角形

得到 $m < 2000$ 時只有下列四組解: $1 - 7 - 5\sqrt{2}$ 、 $1 - 41 - 29\sqrt{2}$ 、 $1 - 239 - 169\sqrt{2}$ 、 $1 - 1393 - 985\sqrt{2}$ ，以上述邊長做變數變換。因為

$4\alpha + (n-4)\beta = \pi \Rightarrow (n-4)\beta < 2\pi \Rightarrow \beta < \frac{2\pi}{n-4} \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{8} < \frac{\pi}{4n-8} \Rightarrow \sin \theta < \sin \frac{\pi}{4n-8}$ ，此時必可得完美 n 邊形。我將前述不同型式的完美 $2k+1$ 邊形，其外接圓半徑 R 與兩種相異邊長 a 、 b 的一般式整理於表 7。

表 7. 邊長為整數的圓內接 $2k+1$ 邊形外接圓半徑與邊長的一般式

完美 7 邊形 $a - b_{(6)}$	
	$R = (p^2 + q^2)^6$
	$a = 2 [C_1^6(2pq)^5(p^2 - q^2) - C_3^6(2pq)^3(p^2 - q^2)^3 + C_5^6(2pq)(p^2 - q^2)^5]$
	$b = 2(p^2 + q^2)^5(p^2 - q^2)$
完美 9 邊形 $a - b_{(8)}$	
	$R = (p^2 + q^2)^8$
	$a = 2 [C_1^8(2pq)^7(p^2 - q^2) - C_3^8(2pq)^5(p^2 - q^2)^3 + C_5^8(2pq)^3(p^2 - q^2)^5 - C_7^8(2pq)(p^2 - q^2)^7]$
	$b = 2(p^2 + q^2)^7(p^2 - q^2)$
完美 11 邊形 $a - b_{(10)}$	
	$R = (p^2 + q^2)^{10}$
	$a = 2 [C_1^{10}(2pq)^9(p^2 - q^2) - C_3^{10}(2pq)^7(p^2 - q^2)^3 + C_5^{10}(2pq)^5(p^2 - q^2)^5 - C_7^{10}(2pq)^3(p^2 - q^2)^7 + C_9^{10}(2pq)(p^2 - q^2)^9]$
	$b = 2(p^2 + q^2)^9(p^2 - q^2)$
完美 7 邊形 $a_{(2)} - b_{(5)}$	
	$R = (p^2 + q^2)^5$
	$a = 2 [C_0^5(2pq)^5 - C_2^5(2pq)^3(p^2 - q^2)^2 + C_4^5(2pq)(p^2 - q^2)^4]$
	$b = 4(p^2 + q^2)^3(p^2 - q^2)(2pq)$
完美 7 邊形 $a_{(3)} - b_{(4)}$	
	斜邊是 $\sqrt{2}$ 的 t 倍且兩股為整數的直角三角形， R 即 $4t^q$
	$a = 2R \sin 4\theta$
	$b = \sqrt{2}R(\cos 3\theta - \sin 3\theta)$
完美 9 邊形 $a_{(4)} - b_{(5)}$	
	斜邊是 $\sqrt{2}$ 的 t 倍且兩股為整數的直角三角形， R 即 $4t^q$
	$a = \sqrt{2}R(\cos 5\theta - \sin 5\theta)$
	$b = 2R \sin 4\theta$

3 結論

1. 成功建構並證明完美多邊形存在，即定理 3、定理 4、定理 5、定理 6 與定理 7。且 $a - b_{(n-1)}$ 的外接圓半徑為 $(p^2 + q^2)^{n-1}$ 。 $a_{(2)} - b_{(n-2)}$ 的外接圓半徑為 $(p^2 + q^2)^{n-2}$ 。
2. 圓內接四邊形中，若一內角之餘弦值為有理數 $\frac{r}{2s}$ ，則必存在非矩形與鳶形，且邊長整數的圓內接四邊形 $a - b_{(2)} - (a + \frac{r}{s}b)$ 。
3. 存在外接圓半徑與兩種相異邊長皆為整數的圓內接多邊形；且不唯一。邊長順序調動亦不影響多邊形的建構。
4. 在建構完美多邊形時，我常利用畢氏三元數 $p^2 - q^2$ 、 $2pq$ 、 $p^2 + q^2$ 做變數變換，研究中發現若任取 p 與 q 的值，可能會導至 a 或 b 的值為負。而 p 與 q 的值與圓心角 α 、 β 有關，所以後來在每處的討論都加入範圍的限制。
5. 在建構圓內接四邊形時，發現取費氏數列的連續三項 $(F_n, F_{n+1}) \mapsto (-F_{n+1}, F_{n+2})$ ，可以建構鈍角為 120° 的圓內接四邊形。
6. 未來展望：目前進度在建構完美多邊形 $a_{(3)} - b_{(n-3)}$ 、 $a_{(5)} - b_{(n-5)}$ 與 $a_{(6)} - b_{(n-6)}$ ，以及有三組不同邊長的完美多邊形 $a_{(h)} - b_{(k)} - c_{(l)}$ 。
7. 未來展望：考慮在橢圓上找有兩種相異整數邊長為的橢圓內接多邊形。

4 參考資料

- [1] MA3(2019). Crux Mathematicorum, 45(6), 308-309.
- [2] 鄭有志 (2011)。邊長為正整數且有一個角是 60° 或 120° 的三角形。數學傳播 35 卷 1 期，84-88。
- [3] 王重臻 (2007)。勾股鐵路網。中華民國第 47 屆全國科展高中組數學科第三名。
- [4] 賴昱維 (2017)。最簡勾股差。數學傳播 41 卷 1 期，50-60。
- [5] Olmsted, J. M. H. (1945). "Rational values of trigonometric functions". The American Mathematical Monthly. 52 (9): 507-508.