從整數分析出發 -不盡相異物的複雜分堆

國立新竹高級中學 鄭興誠
指導老師：張維格

Abstract

In this article we study a family of combinatorial questions regarding finding the total number of ways to distribute (not necessarily indistinguishable) balls of different colors into piles. We solve the questions by establishing an algorithm that leads to formulas in which the integer partition plays a role. Our formula can be applied to counting integer partitions, as it recovers the Stirling number of the second kind as a special case.

中文摘要

本文研究一系列將色球分堆的組合問題。我們計算出給定色球的種類數以及個數，再將球分堆的總方法數。我們建立了一套演算法求得分堆的方法數，並建立我們稱之「整數分析形式」表示的公式。成功的推廣了整數分析以及第二類斯特林數。

1 緒論

1.1 背景

在計數組合學中，計算相同或不同物體分堆的總方法數是個主流的問題。如整數分析就是將 n 顆相同物分成 k 堆的方法數，歷屆科展作品中，整數分析問題有被大量研究，例如 [1] 的作者利用在線段、正三角形、正四面體中任一點與兩端點、三邊的高、四面的高為定值去求出分兩堆、分三堆以及分四堆的方法數，並用此推廣去找一般式。又如第二類斯特林數 (Stirling number of the second kind) 就是將 m 種相異物分成 k 堆的方法數，線代啟示錄 - 第二類斯特林數與貝爾數中就用生成函數寫出遞迴式。

1.2 大綱

本作品將 1.1 節提到的兩種問題做結合，在我們討論將 m 種不同色球，每種各 n 顆，分 k 堆，可空堆的總方法數 $F(m,n,k)$ 以及不可空堆的總方法數 $f(m,n,k)$，以及每一種類個數不盡相同的方法數。其中在我們定義中 $F(1,n,k)$ 為整數分析的方法數，$F(m,1,k)$ 為第二類斯特林數的方法數。在第二章中我們固定 m,n 用分割成同異的方式詳盡討論當 $k<5$ 時的分堆總方法數。在第三章中我們將第二章證明手法一般化，定義同分這概念，便可以透過將分割從同異改成同分使分析更有效率，最後發明出同分演算法來求出任意的 $F(m,n,k)$。在第四章中我們簡化同分演算法的形式，並求出其分割所對應的係數，之後找到 r 元一次不定方程的算法求出分割的方法數，這樣的算法也可用生成函數表示，最後將兩個結果結合即可以求出任意的 $F(m,n,k)$。

2 分堆總方法數的一般式

已知 $F(m,n,k)$，當 $m=1$ 時，$F(1,n,k)$ 為正整數任意分析的方法數，當 $n=1$ 時，$F(m,1,k)$ 為第二類 Stirling 數，於是我們開始固定 m,n，針對 值的情況，討論 $f(m,n,k)$ 及 $F(m,n,k)$ 的一般式。

2.1 分兩堆的總方法數

在本節中我們給出兩種將色球分兩堆的總方法數 $f(m,n,2)$ 及 $F(m,n,2)$。

性質 2.1.
$f(m,n,2)=\left\lfloor\dfrac{(n+1)^m-1}{2}\right\rfloor$，$F(m,n,2)=\left\lfloor\dfrac{(n+1)^m+1}{2}\right\rfloor$。

證明.
我們利用取和不取的方法寫出 $f(m,n,2)$ 及 $F(m,n,2)$ 的一般式。令 x_i 為第 i 種色球放入第一堆的數量，因此每個 $x_i=0,1,2,\cdots,n-1,n$ 都有 $n+1$ 種選擇。故數組 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 一共有 $(n+1)^m$ 種可能的結果。當 n 為奇數時，$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 與 $(n-x_1,n-x_2,\cdots,n-x_m)$ 一一對應，而 $(0,全)$ 和 $(全,0)$ 有空堆，因此 $f(m,n,2)=\dfrac{(n+1)^m-2}{2}$。當 n 為偶數時，$\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{n}{2},\ldots,\dfrac{n}{2}\right)$ 只能算一次，因此 $f(m,n,2)=\dfrac{(n+1)^m-2-1}{2}+1$，使用地板符號表示後得證。

2.2 分三堆的總方法數

在本節中我們分割成數種同異的方式寫出 $f(m,n,3)$ 及 $F(m,n,3)$ 的一般式。

性質 2.2.

$$f(m,n,3)=\frac{(H_n^3)^m+3\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^m+2\times\begin{cases}1, \dfrac{n}{3}\in\mathbb{N}\\[2ex] 0, \dfrac{n}{3}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{6}-\left\lfloor\frac{(n+1)^m+1}{2}\right\rfloor,$$

$$F(m,n,3)=\frac{(H_n^3)^m+3\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^m+2\times\begin{cases}1, \dfrac{n}{3}\in\mathbb{N}\\[2ex] 0, \dfrac{n}{3}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{6}。$$

證明.
已知 $f(m,n,3)=F(m,n,3)-F(m,n,2)$，將某一種類任意分為三個有序堆的方法數為 H_n^3，利用乘法原理，m 個種類任意分三個有序堆的方法數為 $(H_n^3)^m$。而這所有結果裡會包含三同、二同一異、和三異，設 $F_1(m,n,3)$、$F_2(m,n,3)$、$F_3(m,n,3)$ 分別為 m 個種類各 n，任意分為三堆，可有空堆的結果中三同、二同一異、三異的方法數，三同的結果出現 $\dfrac{3!}{3!}$ 次，二同一異的結果會重複 $\dfrac{3!}{2!}$ 次，三異的結果會重複 $3!$ 次。可以得到

$$(H_n^3)^m=\frac{3!}{3!}F_1(m,n,3)+\frac{3!}{2!}F_2(m,n,3)+3!F_3(m,n,3) \qquad （式一）$$

1. *三同的取法會在 $n=3k(k\in\mathbb{N})$ 時才會被算到，因此 $F(m,n,3)=\begin{cases}1, \dfrac{n}{3}\in\mathbb{N}\\[2ex] 0, \dfrac{n}{3}\notin\mathbb{N}\end{cases}$。*

2. *二同一異的取法可以視為每一種一次可以取 $2p(p\in N_0)$ 個，將取出的東西直接平分至兩堆裡，剩下的放最後一堆，利用乘法原理可以得到 $F(m,n,3)$ 中二同的方法數為 $\left\lfloor\dfrac{n}{2}+1\right\rfloor^m$，當 $n=3q(q\in\mathbb{N})$，三同會與二同重複算 1 次，要再扣 1。故*

$$F_2(m,n,3)=\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^m-F_1(m,n,3)$$

3. *三異的取法可將式一移項後求得*

$$F_3(m,n,3)=\frac{(H_n^3)^m-F_1(m,n,3)-3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^m-F_1(m,n,3)\right)}{6}$$

而 $F(m,n,2)=$，因此 $f(m,n,3)=F_1(m,n,3)+F_2(m,n,2)+F_3(m,n,3)-F(m,n,2)=\dfrac{(H_n^3)^m-3\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^m+2F_1(m,n,3)}{6}-F(m,n,2)$，得證。

2.3　分四堆的總方法數 $f(m,n,4)$ 與 $F(m,n,4)$

在本節中我們分割成數種同異的方式寫出 $f(m,n,4)$ 及 $F(m,n,4)$ 的一般式。

性質 2.3.

$$f(m,n,4)=\frac{(H_n^4)^m}{24}+\frac{(H_n^3)^m}{6}+\frac{\begin{cases}1, \frac{n}{4}\in\mathbb{N}\\ 0, \frac{n}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{8}+\frac{\lfloor\frac{n}{3}+1\rfloor^m}{3}-\frac{\lfloor\frac{n}{2}+1\rfloor^m}{2}-\frac{\begin{cases}1, \frac{n}{3}\in\mathbb{N}\\ 0, \frac{n}{3}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{3}$$
$$+\frac{\begin{cases}\dfrac{(n+2)^{2m}}{2^{2m}}+\dfrac{(n+2)^m}{2^m}-\left\lfloor\dfrac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^m}{2}\right\rfloor, & \dfrac{n}{2}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{[(n+1)(n+3)]^m}{2^{2m}}, & \dfrac{n}{2}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{4}$$

$$F(m,n,4)=\frac{(H_n^4)^m}{24}+\frac{\begin{cases}1, \frac{n}{4}\in\mathbb{N}\\ 0, \frac{n}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{8}+\frac{\lfloor\frac{n}{3}+1\rfloor^m}{3}+\frac{\begin{cases}\dfrac{(n+2)^{2m}}{2^{2m}}+\dfrac{(n+2)^m}{2^m}-\left\lfloor\dfrac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^m}{2}\right\rfloor, & \dfrac{n}{2}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{[(n+1)(n+3)]^m}{2^{2m}}, & \dfrac{n}{2}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{4}$$

證明.

已知 $f(m,n,4)=F(m,n,4)-F(m,n,3)$，將某一種類任意分四個有序堆的方法數為 H_n^4，利用重複排列，m 個種類任意分成四個有序堆的方法數為 $(H_n^4)^m$。而這所有結果裡面會包含四同、三同一異、二同二同、二同二異和四異，設 $F_1(m,n,4)$、$F_2(m,n,4)$、$F_3(m,n,4)$、$F_4(m,n,4)$、$F_5(m,n,4)$ 分別為 m 個種類各 n 個，任意分四堆，可有空堆的結果中四同、三同一異、二同二同、二同二異、四異的方法數。四同的結果出現 $\frac{4!}{4!}$ 次，三同一異的結果會重覆 $\frac{4!}{3!}$ 次，二同二同的結果會重覆 $\frac{4!}{2!\times 2!}$ 次，二同二異的結果會重複 $\frac{4!}{2!}$ 次，四異的結果會重複 $4!$ 次，可得

$$(H_n^4)^m=F_1(m,n,4)+4F_2(m,n,4)+6F_3(m,n,4)+12F_4(m,n,4)+24F_5(m,n,4) \qquad \text{(式二)}$$

1. *四同的取法會在 $n=4k(k\in\mathbb{N})$ 時才會被算到，因此*

$$F_1(m,n,4)=\begin{cases}1, \frac{n}{4}\in\mathbb{N}\\ 0, \frac{n}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

2. *三同一異的取法可以視為每一種一次可以取 $3p(p\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ 個，將取出的東西直接平分至三堆裡，剩下的放最後一堆，利用乘法原理，所以可以得到 $F(m,n,3)$ 中三同的方法數 $\left\lfloor\frac{n}{3}+1\right\rfloor^m$，但當 $n=4q\ (q\in\mathbb{N})$ 時，四同會與三同重複算到 1 次，所以此時要再扣 1，故*

$$F_2(m,n,4)=\left\lfloor\frac{n}{3}+1\right\rfloor^m-F_1(m,n,4)$$

3. *二同二同的取法可以視為將 $\frac{n}{2}$ 的東西分成兩堆，所以當 $n\neq 2q\ (q\in\mathbb{N})$ 時方法數就為 0，而二同二同的取法只要將 $F(m,n,2)$ 的公式中的 n 改成 $\frac{n}{2}$，也就是 $\left\lfloor\frac{(\frac{n}{2}+1)^m+1}{2}\right\rfloor$，因為 $n=4k\ (k\in\mathbb{N})$ 時要再扣 1，但 $n\neq 4k\ (k\in\mathbb{N})$ 時不需要扣 1，故*

$$F_3(m,n,4)=\begin{cases}\left\lfloor\dfrac{(\frac{n}{2}+1)^m+1}{2}\right\rfloor, & \dfrac{n}{2}\in\mathbb{N}\\ 0, & \dfrac{n}{2}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

4. 二同二異的取法為先選二堆相同再分剩下兩堆（以下我們簡稱為二同），接著再將二同扣除二同二同、三同一異、四同。而二同的想法是每種類先決定放在前兩堆的數量，且討論某一種類的分堆情況時不會影響到其他種類的分堆情況，所以決定前兩堆的模型可以得到對應的後兩堆分堆方法數。接著將前兩堆的模型數量分別乘上對應的後兩堆分堆方法數，最後加總即得到二同的方法數。分兩堆公式在 n 是奇或偶時會有差異，故將 n 分為奇偶討論。
當 n 是奇數時，$F(m,n,4)$ 二同的方法數可以整理成表格如下：

前兩堆的內容物	前兩堆的模型數量	後兩堆分堆情形的方法數
$(0,0)$	$\frac{m!}{m!}$	$\frac{(n+1)^m}{2}$
(a,a) 和 (b,b) 和 $(c,c)\dots$	$\frac{m!}{(m-1)\times 1!}$	$\frac{(n+1)^{m-1}(n-1)^1}{2}$
(aa,aa) 和 (bb,bb) 和 $(cc,cc)\dots$	$\frac{m!}{(m-1)!\times 1!}$	$\frac{(n+1)^{m-1}(n-3)^1}{2}$
(ab,ab) 和 (ac,ac) 和 $(ad,ad)\dots$	$\frac{m!}{(m-2)!\times 2!}$	$\frac{(n+1)^{m-2}(n-1)^2}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(aaabbc,aaabbc)$ 和 $(abbccc,abbccc)\dots$	$\frac{m!}{(m-3)!\times 1!\times 1!\times 1!}$	$\frac{(n+1)^{m-3}(n-1)^1(n-3)^1(n-5)^1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(\frac{n-1}{2}\text{個}abc\dots,\frac{n-1}{2}\text{個}abc\dots\right)$	$\frac{m!}{m!}$	$\frac{2^m}{2}$

表一（0! 皆省略）

而經由上表可得 n 為奇數時，$F(m,n,4)$ 二同的方法數可整理成

$$\frac{m!}{m!}\cdot\left(\frac{(n+1)^m}{2}\right)+\frac{m!}{(m-1)!\times 1!}\times\left(\frac{(n+1)^{m-1}\times(n-1)^1}{2}\right)+\cdots+\frac{m!}{m!}\cdot\left(\frac{2^m}{2}\right)$$

上式可整理成 $\left(\text{令}k=\frac{n+1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}\times\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=m}\frac{m!}{a_1!\times a_2!\times\cdots\times a_k!}\times(n+1)^{a_1}\times(n-1)^{a_2}\times\cdots\times 2^{a_k} \qquad \text{（式三）}$$

當 n 是偶數時，$F(m,n,4)$ 二同的方法數可以整理成表格如下：

前兩堆的內容物	前兩堆的模型數量	後兩堆分堆情形的方法數
$(0,0)$	$\frac{m!}{m!}$	$\frac{(n+1)^m+1}{2}$
(a,a) 和 (b,b) 和 $(c,c)\dots$	$\frac{m!}{(m-1)\times 1!}$	$\frac{(n+1)^{m-1}(n-1)^1+1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(aaabbc,aaabbc)$ 和 $(abbccc,abbccc)\dots$	$\frac{m!}{(m-3)!\times 1!\times 1!\times 1!}$	$\frac{(n+1)^{m-3}(n-1)^1(n-3)^1(n-5)^1+1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(\frac{n}{2}\text{個}abc\dots,\frac{n}{2}\text{個}abc\dots\right)$	$\frac{m!}{m!}$	$\frac{1^m+1}{2}$

表二（0! 皆省略）

經由上表，可得 n 為偶數時，$F(m,n,4)$ 二同的方法數可整理成

$$\frac{m!}{m!}\cdot\left(\frac{(n+1)^m+1}{2}\right)+\frac{m!}{(m-1)!\times 1!}\times\left(\frac{(n+1)^{m-1}\times(n-1)^1+1}{2}\right)+\cdots+\frac{m!}{m!}\cdot\left(\frac{1^m+1}{2}\right)$$

上式可整理成 $\left(令k=\dfrac{n+1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}\times\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=m}\frac{m!}{a_1!\times a_2!\times\cdots\times a_k!}\times(n+1)^{a_1}\times(n-1)^{a_2}\times\cdots\times 1^{a_k}+\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^m}{2} \quad (式四)$$

我們發現可以將式三和式四整理成多項式定理，再從前面兩個例子及整理之後可以發現需分為 n 的奇偶性討論。$F(m,n,4)$ 二同的方法數，在 n 為奇數為

$$\frac{[(n+1)+(n-1)+\cdots+2]^m}{2}=\frac{[(n+1)\times(n+3)]^m}{2^{2m+1}} \quad (式五)$$

在 n 為偶數則為

$$\frac{[(n+1)+(n-1)+\cdots+1]^m+\left(\frac{n}{2}+1\right)^m}{2}=\frac{(n+2)^{2m}}{2^{2m+1}}+\frac{(n+2)^m}{2^{m+1}} \quad (式六)$$

推出通式後我們要扣除二同二同與四同、三同一異和二同重複的部分。因為前面的四同、三同一異和二同二同已經被獨立討論了，且彼此的結果不會重複，所以只要分別扣除一倍的四同、三同一異和二同二同的方法數。但其中在 n 為偶數時，所有的二同二同都會在二同中被討論兩次，所以當 n 為偶數時要再多扣除一次二同二同的方法數。因此

$$F_4(m,n,4)=\begin{cases}\dfrac{(n+2)^{2m}}{2^{2m+1}}+\dfrac{(n+2)^m}{2^{m+1}}, & \dfrac{n}{2}\in\mathbb{N}\\[2ex] \dfrac{[(n+1)(n+3)]^m}{2^{2m+1}}, & \dfrac{n}{2}\notin\mathbb{N}\end{cases}-F_1(m,n,4)-F_2(m,n,4)-2\times F_3(m,n,4)$$

5. 四異的取法可以將式二移項後求得

$$F_5(m,n,4)=\frac{(H_n^4)^m-F_1(m,n,4)-4F_2(m,n,4)-6F_3(m,n,4)-12F_4(m,n,4)}{24}$$

而 $F(m,n,3)=\dfrac{(H_n^3)^m+3\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor^m+2\times\begin{cases}1, \dfrac{n}{3}\in\mathbb{N}\\[1ex] 0, \dfrac{n}{3}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{6}$，因此

$$\begin{aligned}f(m,n,4) &= F_1(m,n,4)+F_2(m,n,4)+F_3(m,n,4)+F_4(m,n,4)+F_5(m,n,4)-F(m,n,3)\\ &= \frac{(H_n^4)^m}{24}+\frac{\begin{cases}1, \dfrac{n}{4}\in\mathbb{N}\\[1ex] 0, \dfrac{n}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{8}+\frac{\left\lfloor\frac{n}{3}+1\right\rfloor^m}{3}+\frac{\begin{cases}\dfrac{(n+2)^{2m}}{2^{2m}}+\dfrac{(n+2)^m}{2^m}-\left\lfloor\dfrac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^m}{2}\right\rfloor, & \dfrac{n}{2}\in\mathbb{N}\\[2ex] \dfrac{[(n+1)(n+3)]^m}{2^{2m}}, & \dfrac{n}{2}\notin\mathbb{N}\end{cases}}{4}\\ &\quad -F(m,n,3)\end{aligned}$$

，得證。

3 同分演算法

當我們討論的堆數越多時，例如 $k=5$ 時，會有五同、四同一異、三同二異 ... 等七種結果，$k=6$ 或 7 甚至更大時，會有許多的項目需要獨立討論。因此我們從性質 2.3 的證明中獲得靈感，定義 ***同分***的概念來輔助討論。

3.1 何謂同分

我們從分四堆的結果中可以觀察出討論二同二異時，是先用多項式定理做出二同，再扣除四同、三同一異和兩倍的二同二同。討論三同一異時，是用三同扣除四同，於是我們猜測可以直接討論二同、三同的情況。所以我們開始以同分的方式討論。我們將四堆分為四同零分（四同）、三同一分、二同二分、一同三分，四種結果。我們發現四同零分可分為 1 個四同；三同一分可分為 1 個四同和 1 個三同一異；二同二分可分為 1 個四同、1 個三同一異、1 個二同二異和 2 個二同二同；一同三分可分為 1 個四同、2 個三同一異、3 個二同二異、2 個二同二同和 4 個四異。而推出

同分	同異	示意圖（左同右分）
四同零分	四同	🔴 🔴 🔴 🔴
三同一分	四同	🔴 🔴 🔴 ┊ 🔴
	三同一異	🔴 🔴 🔴 ┊ 🟡
二同二分	四同	🔴 🔴 ┊ 🔴 🔴
	三同一異	🔴 🔴 ┊ 🔴 🟡
	二同二同	🔴 🔴 ┊ 🟢 🟢
	二同二同	🟢 🟢 ┊ 🔴 🔴
	二同二異	🔴 🔴 ┊ 🟢 🟡
一同三分	四同	🔴 ┊ 🔴 🔴 🔴
	三同一異	🔴 ┊ 🔴 🔴 🟡
	三同一異	🟡 ┊ 🔴 🔴 🔴
	二同二同	🔴 ┊ 🔴 🟢 🟢
	二同二同	🟢 ┊ 🟢 🔴 🔴
	二同二異	🔴 ┊ 🔴 🟢 🟡
	二同二異	🟡 ┊ 🔴 🟢 🔴
	二同二異	🟢 ┊ 🔴 🔴 🟡
	四異	🔴 ┊ 🟢 🟡 🔵
	四異	🟢 ┊ 🔴 🟡 🔵
	四異	🟡 ┊ 🟢 🔴 🔵
	四異	🔵 ┊ 🟢 🟡 🔴

$F(m,n,4)$ 為四同零分 + 三同一分 + 二同二分 + 一同三分的方法數之 $\frac{1}{4}$ 倍。而 $k=3,4,5$ 都有相同結果。我們定義將 m 種色球各 n 顆分割成 p 同 q 分可空堆時表示成 $F(m,n,p,q)$，其中前 p 堆是相同結果，後 q 堆是任意結果，猜測當 $m,n,k\in\mathbb{N}$ 時，$F(m,n,k)=\frac{1}{k}[F(m,n,k-1,1)+\cdots+F(m,n,1,k-1)]$ ，進而證明以下引理及定理。

引理 3.1.

$$F(m,n,k)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}F(m,n,k-i,i),\ m,n,k\in\mathbb{N}$$

證明. *k 堆中，任意結果皆可表示為某種的 x_1 同 x_2 同 x_3 同 ... x_r 同，設 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r=k$，$x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\geq x_r\geq 1$，所以只須證明任意的 x_1 同 x_2 同 x_3 同 ... x_r 同在 $F(m,n,k,0)+F(m,n,k-1,1)+\cdots+F(m,n,1,k-1)$ 中出現 k 次即可。而 x_1 同 x_2 同 x_3 同 ... x_r 同中，$x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\geq x_r\geq 1$，所以 x_1 同 x_2 同 x_3 同 ... x_r 同只會出現在 x_1 同 $(x_2+x_3+\cdots+x_r)$ 分、x_2 同 $(x_1+x_3+\cdots+x_r)$ 分、... 、1 同 $((x_r-1)+x_1+x_3+\cdots+x_{r-1})$ 分*

$$(x_1 \text{ 同 } x_2 \text{ 同} \ldots x_r \text{ 同}) \text{ 在右列各式中皆被算 } 1 \text{ 次} \quad \begin{cases} x_1\text{同}(x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \\ (x_1-1)\text{同}(1+x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \\ \vdots \\ \vdots \\ 2\text{同}((x_1-2)+x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \\ 1\text{同}((x_1-1)+x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \end{cases} \Rightarrow \text{共 } x_1 \text{ 次}$$

$$\vdots$$

$$(x_1 \text{ 同 } x_2 \text{ 同} \ldots x_r \text{ 同}) \text{ 在右列各式中皆被算 } 1 \text{ 次} \quad \begin{cases} x_r\text{同}(x_1+x_2+\cdots+x_{r-1})\text{分} \\ (x_r-1)\text{同}(1+x_1+x_2+\cdots+x_{r-1})\text{分} \\ \vdots \\ \vdots \\ 2\text{同}((x_r-2)+x_1+x_2+\cdots+x_{r-1})\text{分} \\ 1\text{同}((x_r-1)+x_1+x_2+\cdots+x_{r-1})\text{分} \end{cases} \Rightarrow \text{共 } x_r \text{ 次}$$

將全部加總共可得到 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r=k$ 次。即任意（x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同）在 $F(m,n,k,0)+F(m,n,k-1,1)+\cdots+F(m,n,1,k-1)$ 中共出現 k 次，即 $F(m,n,k)=\dfrac{1}{k}[F(m,n,k,0)+F(m,n,k-1,1)+\cdots+F(m,n,1,k-1)]$，得證

3.2 化為一分以及零分

在本節中我們找出將二分以上的結果化為一分以及零分的方法。

引理 3.2. *各種類在 $q_k=0$ 或 1 時，p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_k-1$ 同 q_k 分的分堆情況彼此不互相影響，其中 $p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1}\in\mathbb{N}$。*

證明. *我們先討論各種類在 p 堆中的數量，令第一類在 p 堆中每一堆有 $\alpha_{1,p}$ 個，第二類每一堆有 $\alpha_{2,p}$ 個 $\ldots$ 第 m 類每一堆有 $\alpha_{m,p}$，因為這 p 堆在 p 同的情況為相同物，所以 $\alpha_{1,p}$ 無論為多少都不會影響到其他種類在 p 堆中每一堆的數量。同理，在 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同都有相同性質。而 $q_k=0$ 時意同於 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同，而 $q_k=1$ 時，1 分相當於 1 同，意同於 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 1 同，所以各種類在 $q_k=0$ 或 1 時，p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 q_k 分的分堆情況彼此不互相影響。得證*

所以我們創造出一個將 $q_k\geq 2$ 全部化為 $q_k=0$ 或 1 的方法

定理 3.1. *若 $m,n,p,k\in\mathbb{N}$，$q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k,q_k'\in\mathbb{N}$，且 $q_k\geq 2$，則*

$$F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k)=\frac{1}{q_k}\sum_{q_k'=1}^{q_k}F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k',q_k-q_k')$$

證明.

$$\begin{aligned} & \sum_{q_k'=1}^{q_k}F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k,q_k',q_k-q_k') \\ = \;& F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k,0)+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k-1,1) \\ & +F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k-2,2)+\cdots+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,1,q_k-1) \end{aligned}$$

且 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 q_k 分中，任意結果皆可表示為某種的 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同，設 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r=q_k$，$x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\geq x_r\geq 1$，所以只須證明任意的 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同，在 $F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k,0)+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k-1,1)+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k-2,2)+\cdots+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,1,q_k-1)$ 中出現 q_k 次即可。而 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同中，$x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\geq x_r\geq 1$，所以 p 同 q_1 同 $\ldots x_r$ 同只會出現在 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 $(x_2+x_3+\cdots+x_r)$ 分、p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 (x_1-1) 同 $(1+x_2+x_3+\cdots+x_r)$ 分、$\ldots$、p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同

$\ldots q_{k-1}$ 同 1 同 $(x_r-1)+x_1+x_3+\cdots+x_{r-1}$ 分中，而 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同在下列各式中皆被算了 1 次。

$$\begin{cases} p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}\text{同}x_1\text{同}(x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \\ p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}(x_1-1)\text{同}(1+x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \\ \vdots \\ \vdots \\ p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}2\text{同}((x_1-2)+x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \\ p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}1\text{同}((x_1-1)+x_2+x_3+\cdots+x_r)\text{分} \end{cases} \Rightarrow \text{共}\, x_1 \,\text{次}$$

且 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同在下列各式中皆被算了 1 次。

$$\begin{cases} p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}x_r\text{同}(x_1+x_2+\cdots+x_{r-1})\text{分} \\ p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}(x_r-1)\text{同}(1+x_1+x_3+\cdots+x_{r-1})\text{分} \\ \vdots \\ \vdots \\ p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}2\text{同}((x_r-2)+x_1+x_3+\cdots+x_{r-1})\text{分} \\ p\text{同}q_1\text{同}q_2\text{同}q_3\text{同}\ldots q_{k-1}1\text{同}((x_r-1)+x_1+x_3+\cdots+x_{r-1})\text{分} \end{cases} \Rightarrow \text{共}\, x_r \,\text{次}$$

將全部加總共可得到 $(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)=q_k$ 次。即任意 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 x_1 同 x_2 同 x_3 同 $\ldots x_r$ 同在 $F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k,0)+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k-1,1)+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k-2,2)+\cdots+F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,1,q_k-1)$ 中出現 q_k 次，即

$$F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k)=\frac{1}{q_k}\sum_{q_k'=1}^{q_k}F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k',q_k-q_k')$$

得證。

3.3 計算一分和零分

在本節中我們求出 p 同 0 分和 p 同 1 分的方法數以及將任意 p 同 q_1 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 q_k 分轉為 p 同 q 分的形式。在上一節中已經將 $q_k\geq 2$ 的 $F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k)$ 都化成 $q_k=1$ 或 0 的形式，所以我們決定先找出 p 同 0 分和 p 同 1 分的一般式，再將定理 3.1的結果化為 p 同 q 分的形式。

性質 3.1. *若 $m,n,p\in\mathbb{N}$，則*

$$F(m,n,p,0)=\begin{cases}1,\dfrac{n}{p}\in\mathbb{N}\\ \\ 0,\dfrac{n}{p}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

證明. m 類各 n 個的 p 同 0 分等於從 m 類各 n 個拿出 $pt(t\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ 顆球，如果 p 被 n 整除則為 1，p 不被 n 整除則為 0，得證。

性質 3.2. *若 $m,n,p\in\mathbb{N}$，則*

$$F(m,n,p,1)=\frac{1}{1}\left[F(1,n,1,0)+F(1,n-p,1,0)+\cdots+F\left(1,n-\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\times p,1,0\right)\right]^m=\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+1\right)^m$$

證明. m 類各 n 個的 p 同 1 分等於先從 1 種類各 n 個拿出 $pt(t\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ 顆球，再將剩下的球分入一堆後，重複排列，故可分為 1 種類從 n 顆球、$n-p$ 顆球、$\ldots$ 、$n-\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\times p$ 顆球分入一堆後再進行重複排列，故 $F(m,n,p,1)=$
$\frac{1}{1}\left[F(1,n,1,0)+F(1,n-p,1,0)+\cdots+F\left(1,n-\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\times p,1,0\right)\right]^m=\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+1\right)^m$，得證。

接著我們發現任何一種 $F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k)$ 可以表示成 $F(1,n',p,q_{k-1},q_k)$ 級數和的 m 次方，其中 $n'\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

定理 3.2. 若 $k\in\mathbb{N}$，$p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1}\in\mathbb{N}$，$q_k=0$ 或 1，則

$$\begin{aligned}&F(m,n,p,q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{k-1},q_k)\\=&\left[\sum_{\alpha_p=0}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\sum_{\alpha_{p_1}=0}^{\lfloor\frac{n-\alpha_p p}{q_1}\rfloor}\cdots\sum_{\alpha_{p_{k-2}}=0}^{\lfloor\frac{n-\alpha_p p-\alpha_{q_1}q_1-\cdots-\alpha_{q_{k-3}}q_{k-3}}{q_{k-2}}\rfloor}F(1,n-\alpha_p p-\alpha_{q_1}q_1-\cdots-\alpha_{q_{k-2}}q_{k-2},q_{k-1},q_k)\right]^m\end{aligned}$$

其中 $\alpha_{q_i}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 為某一種類的球在 q_i 堆中每堆的個數。

證明. 我們假設一種模型，下面為第一種色球在 p 同 q_1 同 q_2 同 q_3 同 $\ldots q_{k-1}$ 同 q_k 分的所有分布情況：p 堆中每堆 0 個，q_1 堆中每堆 0 個，$\ldots$，q_{k-2} 堆中每堆 0 個 $\Rightarrow F(1,n,q_{k-1},q_k)$；$p$ 堆中每堆 0 個，q_1 堆中每堆 0 個，$\ldots$，q_{k-2} 堆中每堆 1 個 $\Rightarrow F(1,n-1q_{k-2},q_{k-1},q_k)$；$p$ 堆中每堆 0 個，q_1 堆中每堆 0 個，$\ldots$，q_{k-2} 堆中每堆 2 個 $\Rightarrow F(1,n-2q_{k-2},q_{k-1},q_k)$；$\ldots$，$p$ 堆中每堆 α_p 個，q_1 堆中每堆 α_{q_1} 個，$\ldots$，q_{k-2} 堆中每堆 $\alpha_{q_{k-2}}$ 個
$\Rightarrow F(1,n-\alpha_p p-\alpha_{q_1}q_1-\cdots-\alpha_{q_{k-2}}q_{k-2},q_{k-1},q_k)$；$(\cdots p$ 堆中每堆 $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ 個，q_1 堆中每堆 $\left\lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p}{q_1}\right\rfloor$ 個，q_2 堆中每堆 $\left\lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p-\left\lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p}{q_1}\right\rfloor q_1}{q_2}\right\rfloor$ 個，

$$\cdots\Rightarrow F\left(1,n-\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor p-\left\lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p}{q_1}\right\rfloor q_1-\left\lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p-\left\lfloor\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor p}{q_1}\right\rfloor q_1}{q_2}\right\rfloor q_2-\cdots,q_{k-1},q_k\right)$$

同理，我們令每種色球在各堆中的數量如下：

	p 堆中每一堆有	q_1 堆中每一堆有	$\cdots$	q_{k-2} 堆中每一堆有	q_k-1 同 q_k 分
第一種	α_1,p 個	α_{1,q_1} 個	$\cdots$	$\alpha_{1,q_{k-2}}$ 個	$n-s_1$
第二種	α_1,p 個	α_{2,q_1} 個	$\cdots$	$\alpha_{2,q_{k-2}}$ 個	$n-s_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
第 m 種	α_1,p 個	α_{m,q_1} 個	$\cdots$	$\alpha_{m,q_{k-2}}$ 個	$n-s_m$

設 $s_i=\alpha_{i,p}p+\alpha_{i,q_1}q_1+\cdots+\alpha_{i,q_{k-2}}q_{k-2}$ 。上表符合 $\alpha_{i,p}p+\alpha_{i,q_1}q_1+\cdots+\alpha_{i,q_{k-2}}q_{k-2}\leq n$，上表的第一種物品，所有分堆情況的方法數為

$$\left[\sum_{\alpha_p=0}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\sum_{\alpha_{p_1}=0}^{\lfloor\frac{n-\alpha_p p}{q_1}\rfloor}\sum_{\alpha_{p_2}=0}^{\lfloor\frac{n-\alpha_p p-\alpha_{q_1}q_1}{q_2}\rfloor}\cdots\sum_{\alpha_{p_{k-2}}=0}^{\lfloor\frac{n-\alpha_p p-\alpha_{q_1}q_1-\cdots-\alpha_{q_{k-3}}q_{k-3}}{q_{k-2}}\rfloor}F(1,n-\alpha_p p-\alpha_{q_1}q_1-\cdots-\alpha_{q_{k-2}}q_{k-2},q_{k-1},q_k)\right]^1$$

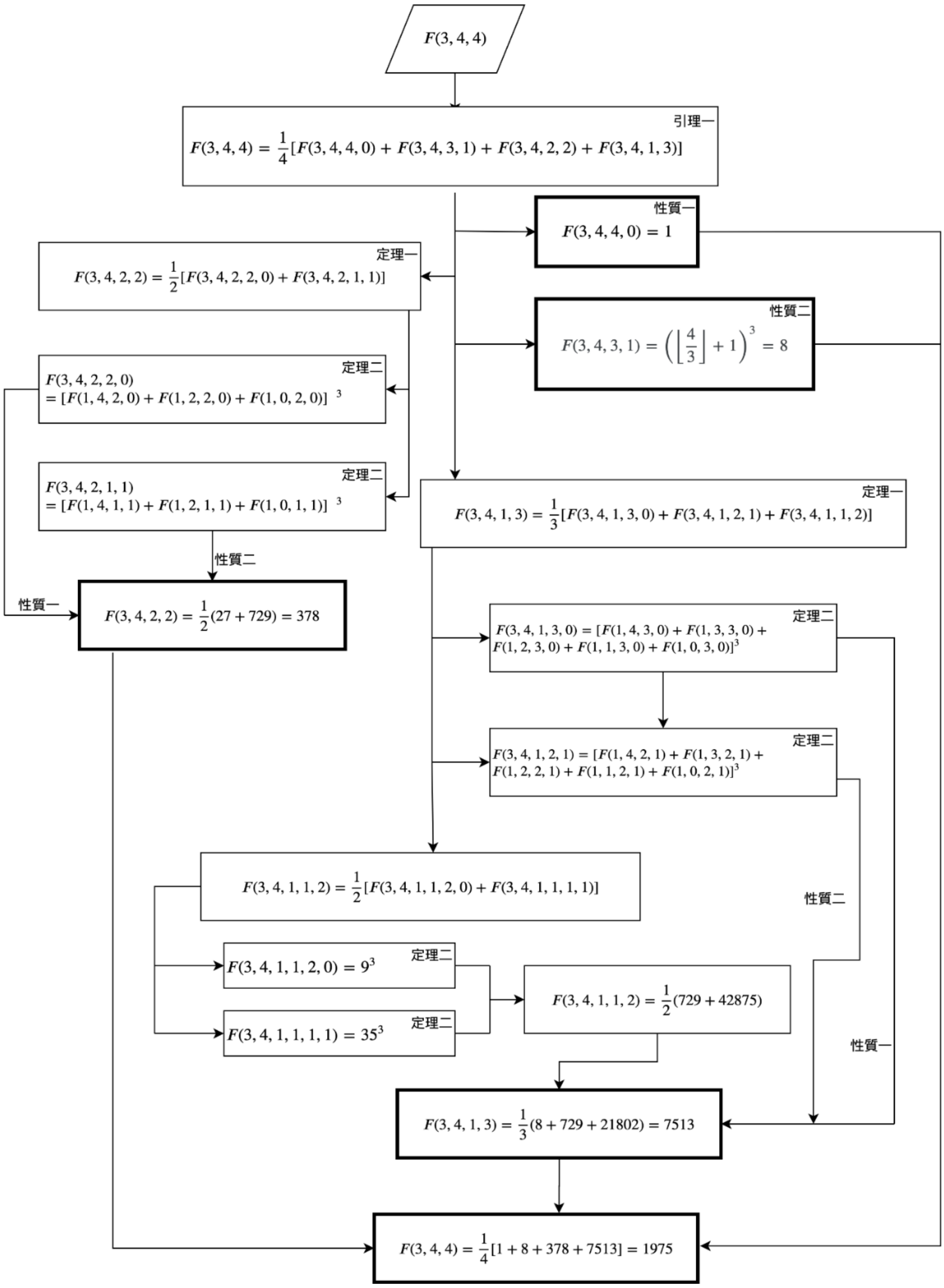
同理，第 2 種、$\ldots$、第 m 種色球的分堆情況方法數亦為上式，且每種色球分堆情形皆不互相影響，所以 m 種色球所有分堆情況為重複排列，得證

3.4 同分演算法

在本節中我們將第三章前面的做法統整，並舉例說明。同分演算法的做法如下：

1. 使用引理 3.1，將 $F(m,n,k)$ 化為 $F(m,n,p,q)$。
2. 使用定理 3.1 將 2 分以上化為 1 分或 0 分。
3. 使用定理 3.2、性質 2.1、性質 2.2算出方法數。

我們將此種循環步驟稱為同分演算法。
例：利用同分演算法算出 $F(3,4,4)$：



同理，$F(3,4,3)=576$，$f(3,4,4)=F(3,4,4)-F(3,4,3)=1399$。

3.5 廣義同分演算法

在本節中我們將同分演算法推廣，求出讓 m 種球個數可以不盡相同的方法數。我們定義當每種類個數不盡相同時，第一種有 n_1 顆，第二種有 n_2 顆 ... 第 m 種有 n_m 顆，分為 k 堆，不可有空堆的方法數記為 $f(m, n_1'n_2'n_3' \ldots n_m', k)$，可有空堆的方法數記為 $F(m, n_1'n_2'n_3' \ldots n_m', k)$。下方定理 3.3 和定理 3.4 的作法與定理 3.1和定理 3.2的差異在於後者討論的每種球數量相同而前者不盡相同，所以需要每一種類分開討論。

定理 3.3.

$$\prod_{i=1}^{m} F(1, n_i, p, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}, q_k) = \frac{1}{q_k} \sum_{q_k'=1}^{q_k} \prod_{i=1}^{m} F(1, n_i, p, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}, q_k', q_k - q_k')$$

$m, n, p, k \in \mathbb{N}$，$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1} \in \mathbb{N}$，$q_k \in \mathbb{N}$ 且 $q_k \geq 2$。

定理 3.4.

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m} F(1, n_i, p, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}, q_k) \\
= &\prod_{i=1}^{m} \sum_{\alpha_p=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \sum_{\alpha_{\alpha_{q_1}}=0}^{\lfloor \frac{n-\alpha_p p}{q_1} \rfloor} \sum_{\alpha_{\alpha_{q_2}}=0}^{\lfloor \frac{n-\alpha_p p-\alpha_{q_1} q_1}{q_2} \rfloor} \cdots \sum_{\alpha_{\alpha_{q_{k-2}}}=0}^{\lfloor \frac{n-\alpha_p p-\alpha_{q_1} q_1-\cdots-\alpha_{q_{k-2}} q_{k-2}}{q_{k-2}} \rfloor} \\
&F(1, n_i - \alpha_p p - \alpha_{q_1} q_1 - \cdots - \alpha_{q_{k-2}} q_{k-2}, q_{k-1}, q_k)
\end{aligned}$$

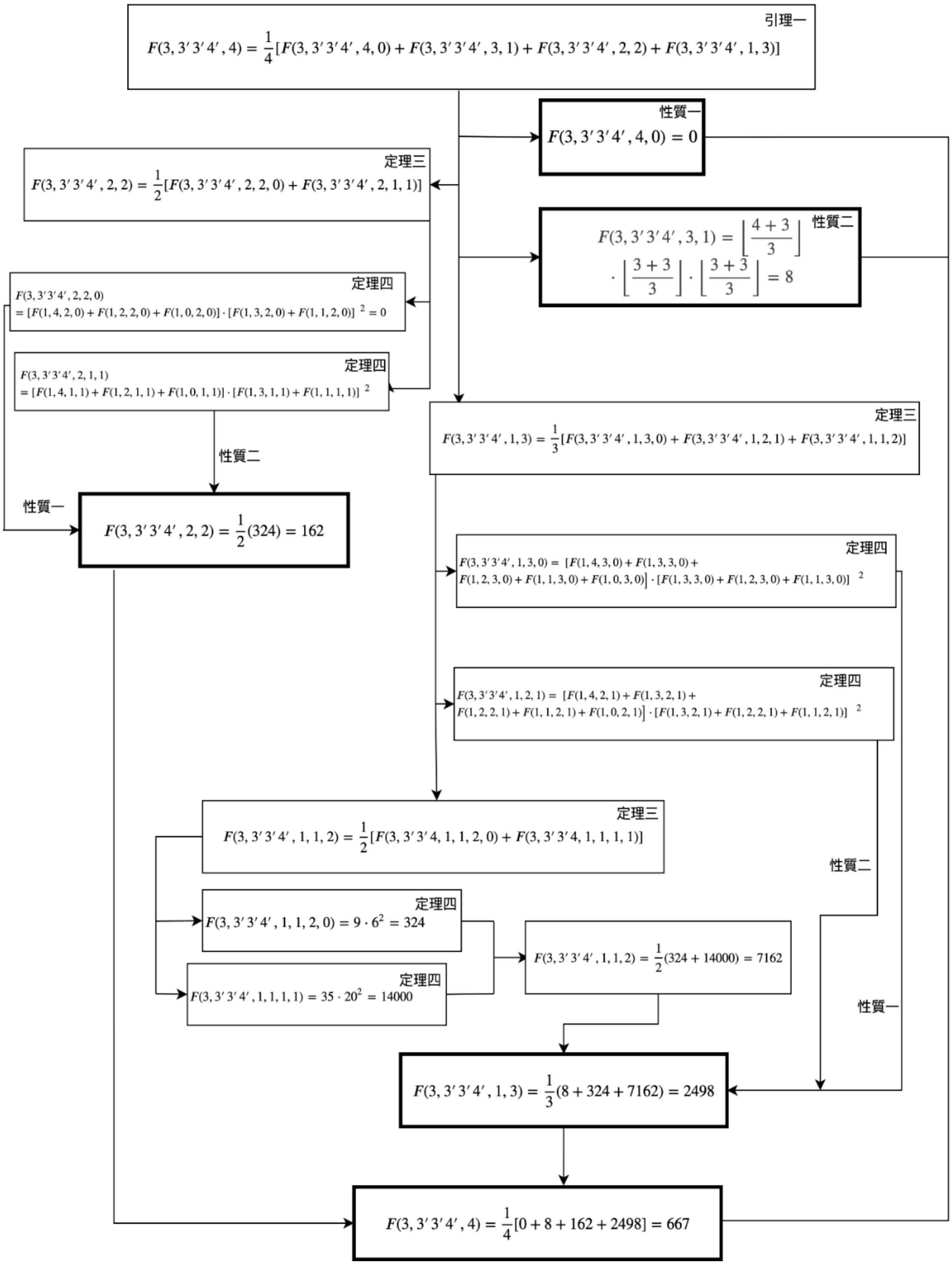
$k \in \mathbb{N}$，$p, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1} \in \mathbb{N}$，$q_k = 0$ 或 1。

證明. *每種類個數不盡相同時，每種類在 p 同、q_1 同、q_{k-1} 同、q_k 分的模型狀態下的分堆，情形仍然彼此不互相影響。得證。*

廣義同分演算法：

1. 使用引理 3.1，將 $F(m, n_1'n_2'n_3' \ldots n_m', k)$ 化為 $F(m, n_1'n_2'n_3' \ldots n_m', p, q)$。
2. 使用定理 3.3 將 2 分以上化為 1 分或 0 分。
3. 使用定理 3.4、性質 2.1、性質 2.2算出方法數。

我們將此種循環步驟稱為廣義同分演算法。
例：利用同分演算法算出 $F(3, 3'3'4', 4)$：



4 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式

我們發現可以將同分演算法化簡為更簡單漂亮的形式，如果將同分演算法中的一分化成一同零分，可以發現例如像 $F(m,n,2,1,1,0), F(m,n,1,2,1,0), F(m,n,1,1,2,0)$ 的值皆相等，所以我們先算出這些值分別對應的係數再相加，統一化為 $F(m,n,2,1,1,0)$ 的倍數形式，於是我們推廣將 $p, q_1, q_2, \ldots, q_k$ 中的各數由大到小排列為 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$，即 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_r \in \mathbb{N}$，而 r 即為正整數 k 的非空整數分拆數，再將所有 $F(m,n,p,q_1,q_2,\ldots,q_k,0)$ 中與 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 等值的所有項累加起來，我們發現了一個 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式。

4.1 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 所對應的係數

在本節中我們求出整數分拆公式中對應係數的一般式。下面我們先以 $F(m,n,4)$ 為例：
由同分演算法可知

$$\begin{aligned}
& F(m,n,4) \\
= \;& \frac{1}{4}\left\{F(m,n,4,0)+F(m,n,3,1,0)+\frac{1}{2}[F(m,n,2,2,0)+F(m,n,2,1,1,0)]\right. \\
& \left.+\frac{1}{3}\left[F(m,n,1,3,0)+F(m,n,1,2,1,0)+\frac{1}{2}[F(m,n,1,1,2,0)+F(m,n,1,1,1,1,0)]\right]\right\} \\
= \;& \frac{6}{24}F(m,n,4,0)+\frac{8}{24}F(m,n,3,1,0)+\frac{3}{24}F(m,n,2,2,0)+\frac{6}{24}F(m,n,2,1,1,0)+\frac{1}{24}F(m,n,1,1,1,1,0)
\end{aligned}$$

而 $F(m,n,4,0),F(m,n,3,1,0),F(m,n,2,2,0),F(m,n,2,1,1,0),F(m,n,1,1,1,1,0)$ 的係數中分子的值分別為 $6,8,3,6,1$，我們發現與 4 個元素的集合分拆為交換群循環類型的循環長度分別為 4，$3,1$，$2,2$，$2,1,1$，$1,1,1,1$ 的循環式的數量 [2] 相符合，其中循環式的規則如下：將每一個循環式最小的數字排在該循環式的第一位，在重新排序時不動此數字，此外，由於在某一循環式內數字的先後次序代表這些數字之間的映射關係，因此只要我們重排某個循環式內數字（摒除最小的那個數字）的次序，所得結果必然代表一種新的映射關係，即一個新的循環式。
下面舉例說明。
4 個元素的集合 $\{1,2,3,4\}$ 可分成 $(****)$，$(***)(*)$，$(**)(**)$，$(**)(*)(*)$，$(*)(*)(*)(*)$，5 種循環類型；由下表可知：

循環類型	循環式的形式	循環式的數量
$(****)$ 循環長度為 4	$(1,2,3,4)$、$(1,2,4,3)$、$(1,3,2,4)$、$(1,3,4,2)$、$(1,4,2,3)$、$(1,4,3,2)$	6
$(***)(*)$ 循環長度為 $3,1$	$(1,2,3)(4)$、$(1,3,2)(4)$、$(1,2,4)(3)$、$(1,4,2)(3)$、$(1,3,4)(2)$、$(1,4,3)(2)$、$(2,3,4)(1)$、$(2,4,3)(1)$	8
$(**)(**)$ 循環長度為 $2,2$	$(1,2)(3,4)$、$(1,3)(2,4)$、$(1,4)(2,3)$、	3
$(**)(*)(*)$ 循環長度為 $2,1,1$	$(1,2)(3)(4)$、$(1,3)(2)(4)$、$(1,4)(2)(3)$、$(2,3)(1)(4)$、$(3,4)(1)(2)$、$(2,4)(1)(3)$	6
$(*)(*)(*)(*)$ 循環長度為 $1,1,1,1$	$(1)(2)(3)(4)$	1

由上述例子可知，我們可以把 k 個元素的集合假設在某種「循環類型」中包含長度為 1 的「循環式」有 p_1 個，長度為 2 的「循環式」有 p_2 個，...，長度為 k 的「循環式」有 p_k 個，其中 $p_i\geq 0$；即滿足 $1p_1+2p_2+3p_3+\cdots+kp_k=k$。
而我們可知若 k 個元素的集合，分割為有序子集，其中首 p_1 個子集為 1 元集，接著 p_2 個子集為 2 元集 ...，最後 p_k 個子集為 k 元集的分割方法數為 $\dfrac{k!}{(1!)^{p_1}(2!)^{p_2}\ldots(k!)^{p_k}}$。所以滿足 $1p_1+2p_2+3p_3+\cdots+kp_k=k$ 的數組 $(p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k)$ 的個數可視為 k 個元素的集合，分割為無序子集，其中包含 1 個元素的子集有 p_1 個，2 個元素的子集有 p_2 個，...，k 個元素的子集有 p_k 個的分割方法數為 $\dfrac{\frac{k!}{(1!)^{p_1}(2!)^{p_2}\ldots(k!)^{p_k}}}{p_1!p_2!\ldots p_k!}$，且每一個滿足 $1p_1+2p_2+3p_3+\cdots+kp_k=k$ 的數組 $(p_1,2p_2,3p_3,\ldots,p_k)$ 都有 $[(1-1)!]^{p_1}[(2-1)!]^{p_2}\ldots[(k-1)!]^{p_k}=(0!)^{p_1}(1!)^{p_2}\ldots[(k-1)!]^{p_k}$ 個循環式的數量，所以 k 個元素的集合在某種「循環類型」中包含長度為 1 的「循環式」有 p_1 個，長度為 2 的「循環式」有 p_2 個，...，長度為 k 的「循環式」有 p_k 個且滿足 $1p_1+2p_2+3p_3+\cdots+kp_k=k$ 的循環式數量共有

$$\begin{aligned}
& ((0!)^{p_1}(1!)^{p_2}\ldots[(k-1)!]^{p_k})\times\left(\frac{\frac{k!}{(1!)^{p_1}(2!)^{p_2}\ldots(k!)^{p_k}}}{p_1!p_2!\ldots p_k!}\right) \\
= \;& \frac{k!}{\left(\frac{1!}{0!}\right)^{p_1}\left(\frac{2!}{1!}\right)^{p_2}\ldots\left(\frac{k!}{(k-1)!}\right)^{p_k}p_1!p_2!\ldots p_k!}=\frac{k!}{1^{p_1}2^{p_2}\ldots k^{p_k}p_1!p_2!\ldots p_k!}=\frac{k!}{\prod_{i=1}^{k}i^{p_i}p_i!}
\end{aligned}$$

所以我們大膽猜測

$$\begin{aligned}
F(m,n,k) &= \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_r=k}\frac{\frac{k!}{\prod_{i=1}^{k}i^{p_i}p_i!}}{k!}F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0) \\
&= \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_r=k}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}i^{p_i}p_i!}F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)
\end{aligned}$$

；其中 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_r \in \mathbb{N}$，且 p_i 為正整數 i 在數組 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r)$ 中出現的次數，則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} ip_i = k$。
由上式的猜測公式：

$$\begin{aligned} F(m,n,4) &= \frac{1}{4^1 1!}F(m,n,4,0) + \frac{1}{3^1 1! 1^1 1!}F(m,n,3,1,0) + \frac{1}{2^2 2!}F(m,n,2,2,0) \\ &\quad + \frac{1}{2^1 1! 1^2 2!}F(m,n,2,1,1,0) + \frac{1}{1^4 4!}F(m,n,1,1,1,1,0) \end{aligned}$$

的確可以得到上面的結果，所以接下來我們將證明這件事。首先我們先將 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ 分別改寫為 $b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s$，其中 $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_s$ 為正整數 $1 \sim k$ 出現在數組 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r)$ 中由大到小的相異正整數，即 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_s \in \mathbb{N}$，而 $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s$ 分別為 $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_s$ 出現的次數，即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_it_i = k$。
所以我們猜測的 $F(m,n,k)$ 可表示為 $\displaystyle\sum_{\sum_{i=1}^{s} b_it_i = k} \frac{1}{\prod_{i=1}^{s} b_i^{t_i} t_i!} F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$，為了方便，我們將 $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的係數定義為 $C(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s)$。即我們猜測

$$C(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{s} b_i^{t_i} t_i!}$$

我們舉個例子找出這些係數彼此的關聯性，如 $F(m,n,4)$ 中，$F(m,n,2,1,1,0)$ 的所有係數和等於 $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$，這個值可以提出 $\frac{1}{4}$，經過觀察之後我們可以發現，剩下的值會等於 $F(m,n,2,1,0)$ 的所有係數和加上 $F(m,n,1,1,0)$ 的所有係數和，且由於 $F(m,n,2,1,1,0)$ 的所有係數和可表示成 $C(2\cdot 1, 1\cdot 2)$，$F(m,n,2,1,0)$ 的所有係數和可表示成 $C(2\cdot 1, 1\cdot 1)$，$F(m,n,1,1,0)$ 的所有係數和可表示成 $C(1\cdot 2)$，因此 $C(2\cdot 1, 1\cdot 2) = C(2\cdot 1, 1\cdot 1) + C(1\cdot 2)$，同理，我們發現以下 $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的係數 $C(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s)$ 的表格中：

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=1$	$C(1\cdot 1)$	$C(2\cdot 1)$	$C(3\cdot 1)$	$C(4\cdot 1)$	$C(5\cdot 1)$
$r=2$		$C(1\cdot 2)$	$C(2\cdot 1, 1\cdot 1)$	$C(3\cdot 1, 1\cdot 1) + C(2\cdot 2)$	$C(4\cdot 1, 1\cdot 1) + C(3\cdot 1, 2\cdot 1)$
$r=3$			$C(1\cdot 3)$	$C(2\cdot 1, 1\cdot 2)$	$C(3\cdot 1, 1\cdot 2) + C(2\cdot 2, 1\cdot 1)$
$r=4$				$C(1\cdot 4)$	$C(2\cdot 1, 1\cdot 3)$
$r=5$					$C(1\cdot 5)$

第 r 列第 k 行的係數可一一分拆為第 $r-1$ 列第 $1 \sim k-1$ 行的所有係數和，於是我們猜測以下引理並證明。

引理 4.1. *對任一個 $r > 1$ 的 $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的係數 $C(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s)$ 可表示為*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}[C(b_1(t_1-1), b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s) + C(b_1t_1, b_2(t_2-1), b_3t_3, \ldots, b_st_s) \\ &+ C(b_1t_1, b_2t_2, b_3(t_3-1), \ldots, b_st_s) + \cdots + C(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_s(t_s-1))] \end{aligned}$$

證明. *任一個數組 $(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s)$ 為分 $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_it_i = k$ 堆的一種整數分拆形式，而數組 $(b_1(t_1-1), b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s)$，$(b_1t_1, b_2(t_2-1), b_3t_3, \ldots, b_st_s)$，$(b_1t_1, b_2t_2, b_3(t_3-1), \ldots, b_st_s)$，$\ldots$，$(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_s(t_s-1))$ 分別為分 $(k-b_1)$ 堆，$(k-b_2)$ 堆，$(k-b_3)$ 堆，$\ldots$，$(k-b_s)$ 堆的一種整數分拆形式。*
而在數組 $(b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, \ldots, b_st_s)$ 中分 k 堆的任一種整數分拆形式必可一一分拆為 $(k-b_1)$ 堆，$(k-b_2)$ 堆，$(k-b_3)$ 堆，$\ldots$，$(k-b_s)$ 堆的整數分拆形式，且由引理 3.1 我們可以發現將 k 堆分拆成 $(k-b_i)$ 堆和 b_i 堆時，$i = 1 \sim s$，$F(m,n,k) = \frac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{s} F(m,n,(k-b_i),b_i)$，可提出係數 $\frac{1}{k}$，得證。

定理 4.1. $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的係數 $C(b_1t_1,b_2t_2,b_3t_3,\ldots,b_st_s)=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} i^{p_i}p_i!}=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{s} b_i^{t_i}t_i!}$。

證明. *首先當 $r=1$ 時，唯一一種整數分拆結果是 k 同 0 分，根據引理 3.1，所有 k 同 0 分的係數為 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k^1 1!}$。接著我們假設 $r-1(r\geq 2)$ 成立，證明 r 成立。*

已知 $C(b_1t_1,b_2t_2,b_3t_3,\ldots,b_st_s)=\dfrac{1}{k}[C(b_1(t_1-1),b_2t_2,b_3t_3,\ldots,b_st_s)+C(b_1t_1,b_2(t_2-1),b_3t_3,\ldots,b_st_s)+C(b_1t_1,b_2t_2,b_3(t_3-1),\ldots,b_st_s)+\cdots+C(b_1t_1,b_2t_2,b_3t_3,\ldots,b_s(t_s-1))]$，*所以*

$$\begin{aligned}
C(b_1t_1,b_2t_2,b_3t_3,\ldots,b_st_s) &= \frac{1}{k}\left[\frac{1}{b_1^{(t_1-1)}(t_1-1)!b_2^{t_2}t_2!b_3^{t_3}t_3!\ldots b_s^{t_s}t_s!}+\frac{1}{b_1^{t_1}t_1!b_2^{(t_2-1)}(t_2-1)!b_3^{t_3}t_3!\ldots b_s^{t_s}t_s!}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{b_1^{t_1}t_1!b_2^{t_2}t_2!b_3^{(t_3-1)}t_3-1)!\ldots b_s^{t_s}t_s!}+\cdots+\frac{1}{b_1^{t_1}t_1!b_2^{t_2}t_2!b_3^{t_3}t_3!\ldots b_s^{(t_s-1)}(t_s-1)!}\right]\\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{b_1^{t_1}t_1!b_2^{t_2}t_2!b_3^{t_3}t_3!\ldots b_s^{t_s}t_s!}\cdot(b_1t_1+b_2t_2+b_3t_3+\cdots+b_st_s)
\end{aligned}$$

因為 $\displaystyle\sum_{i=1}^{s}b_it_i=k$，*所以* $C(b_1t_1,b_2t_2,b_3t_3,\ldots,b_st_s)=\dfrac{1}{b_1^{t_1}t_1!b_2^{t_2}t_2!b_3^{t_3}t_3!\ldots b_s^{t_s}t_s!}=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{s}b_i^{t_i}t_i!}$，

而 $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{s}b_i^{t_i}t_i!}=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k}i^{p_i}p_i!}$ *經由數學歸納法，得證。*

由以上的證明，我們找到了 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式：

$$F(m,n,k)=\sum_{\sum_{i=1}^{s}b_it_i=k}\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}b_i^{t_i}t_i!}F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)=\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_r=k}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}i^{p_i}p_i!}F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$$

4.2 r 元一次不定方程 $\sum_{i=1}^{r}a_ix_i=n$ 求 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$

在本節中我們找到了 $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的另一種計算方法：

性質 4.1. $F(1,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}a_ix_i=n$ 的非負整數解的個數。

證明. *將 m 種色球，各 n 顆，分成 a_i 堆，$i=1\sim r$，各自相同，由於每一種色球各 n 顆在這個模型狀況下必須要分完，所以假設第一種色球在 a_i 堆中每堆有 x_i 個，$i=1\sim r$，那麼 $F(1,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的值可視為滿足不定方程 $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}a_ix_i=n$ 的非負整數解的個數，同理，各種色球均討論在 a_i 堆中每堆的個數，$i=1\sim r$，皆可視為滿足不定方程 $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}a_ix_i=n$，由此可知 $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)=(F(1,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0))^m$，得證。*

以 $F(3,4,4)$ 為例：

- $F(1,4,4,0)$ 可視為 $4x_1=4$ 的非負整數解個數 $\Rightarrow F(1,4,4,0)=1\Rightarrow F(3,4,4,0)=1^3$
- $F(1,4,3,1,0)$ 可視為 $3x_1+x_2=4$ 的非負整數解個數
  $\Rightarrow F(1,4,3,1,0)=2\Rightarrow F(3,4,3,1.0)=2^3$
- $F(1,4,2,2,0)$ 可視為 $2x_1+2x_2=4$ 的非負整數解個數
  $\Rightarrow F(1,4,2,2,0)=3\Rightarrow F(3,4,2,2,0)=3^3$
- $F(1,4,2,1,1,0)$ 可視為 $2x_1+x_2+x_3=4$ 的非負整數解個數
  $\Rightarrow F(1,4,2,1,1,0)=9\Rightarrow F(3,4,2,1,1,0)=9^3$
  $$\begin{cases}x_1=0\to x_2+x_3=4 \text{ 的非負整數解個數為} H_4^2=5\\ x_1=1\to x_2+x_3=2 \text{ 的非負整數解個數為} H_2^2=3\\ x_1=2\to x_2+x_3=0 \text{ 的非負整數解個數為} H_0^2=1\end{cases}$$
- $F(1,4,1,1,1,1,0)$ 可視為 $x_1+x_2+x_3+x_4=4$ 的非負整數解個數
  $\Rightarrow F(1,4,1,1,1,1,0)=H_4^4=35\Rightarrow F(3,4,1,1,1,1,0)=35^3$

4.3 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式

在本節中我們舉例說明第四章的方法。我們下面再以 $F(3,4,4)$ 為例：

$$\begin{aligned} F(3,4,4) &= \frac{1}{4^1 1!}F(3,4,4,0)+\frac{1}{3^1 1! 1^1 1!}F(3,4,3,1,0)+\frac{1}{2^2 2!}F(3,4,2,2,0) \\ &\quad +\frac{1}{2^1 1! 1^2 2!}F(3,4,2,1,1,0)+\frac{1}{1^4 4!}F(3,4,1,1,1,1,0) \\ &= \frac{1}{4^1 1!}\cdot 1^3+\frac{1}{3^1 1! 1^1 1!}\cdot 2^3+\frac{1}{2^2 2!}\cdot 3^3+\frac{1}{2^1 1! 1^2 2!}\cdot 9^3+\frac{1}{1^4 4!}\cdot 35^3 = 1975 \end{aligned}$$

所以當 k 值不大時，我們可以利用 r 元不定方程 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ 及搭配 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式，求 $F(m,n,k)$。反之，當 k 值較大時，可利用同分演算法算出 $F(m,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 及搭配 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式，求 $F(m,n,k)$。

4.4 $F(m,n'_1 n'_2 n'_3 \ldots n'_m,k)$ 的整數分拆公式

在本節中我們將整數分拆公式推廣，求出讓 m 種球個數可以不盡相同的方法數。

定理 4.2.

$$F(m,n'_1 n'_3 n'_3 \ldots n'_m,k) = \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_r=k} \frac{1}{\prod p_i! i^{p_i}} \prod_{i=1}^{m} F(1,n_i,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$$

證明. *當每種色球不盡相同時，$F(m,n_i,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 符合引理 3.2的條件，所以只需將每一種色球分開討論，即可得到 $F(m,n'_1 n'_3 n'_3 \ldots n'_m,0)$ 的整數分拆公式得證*

下面再以 $F(3,3'3'4',4)$ 為例：

$$\begin{aligned} F(3,3'3'4',4) &= \frac{1}{4^1 1!}F(1,3,4,0)\cdot F(1,3,4,0)\cdot F(1,4,4,0)+\frac{1}{3^1 1! 1^1 1!}F(1,3,3,1)\cdot F(1,3,3,1)\cdot F(1,4,3,1) \\ &\quad +\frac{1}{2^2 2!}F(1,3,2,2,0)\cdot F(1,3,2,2,0)\cdot F(1,4,2,2,0) \\ &\quad +\frac{1}{2^1 1! 1^2 2!}F(1,3,2,1,1,0)\cdot F(1,3,2,1,1,0)\cdot F(1,4,2,1,1,0) \\ &\quad +\frac{1}{1^4 4!}F(1,3,1,1,1,1,0)\cdot F(1,3,1,1,1,1,0)\cdot F(1,4,1,1,1,1,0) \\ &= \frac{1}{4}\cdot 0\cdot 0\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 0\cdot 0\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 6\cdot 6\cdot 9+\frac{1}{24}\cdot 20\cdot 20\cdot 35 = 667 \end{aligned}$$

4.5 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 以及 $F(1,n,k)$ 的生成函數

在本節中我們將 r 元一次不定方程變成生成函數的形式。

定理 4.3. $F(1,n_i,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的生成函數為 $\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-x^{\alpha_i}}$

證明. *由上面可知 $F(1,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的值為 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ 的非負整數解，而這條式子也可以理解成有 r 堆，每一堆可有 0 個，a_i 個，$2a_i$ 個，...，$x_i a_i$ 個，...，所以可以表示成 $(1+x^{a_i}+x^{2a_i}+\cdots+x^{x_i a_i}+\ldots)$，因此如果要求 n 個東西分 a_1 同 a_2 同 ... a_r 同 0 分時，只要求出 $\prod_{i=1}^{r}(1+x^{a_i}+x^{2a_i}+\cdots+x^{x_i a_i}+\ldots)$ 的 x^n 項係數，就可以求出 $F(1,n,a_1,a_2,\ldots,a_r,0)$ 的方法數。也可將之化簡成下面的形式 $\prod_{i=1}^{r}(1+x^{a_i}+x^{2a_i}+\cdots+x^{x_i a_i}+\ldots) = \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-x^{\alpha_i}}$，得證。*

再將上面的生成函數帶入整數分拆公式就可求出 $F(1,n,k)$ 的生成函數，即是

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_r=k} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} i^{p_i} p_i!} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-x^{\alpha_i}}$$

5 結論

5.1 結論與研究結果

1. 利用性質 2.1、2.2、2.3求出 $F(m,n,2)$、$F(m,n,3)$ 和 $F(m,n,4)$ 的一般式。
2. 使用引理 3.1、3.2，定理 3.1、3.2，性質 3.1、3.2發明出同分演算法求出 $F(m,n,k)$ 及廣義同分演算法求出 $F(m,n_1'n_2'\ldots n_m',k)$。
3. 化簡同分演算法，找出 $F(m,n,k)$ 的整數分拆公式及 $F(m,n_1'n_2'\ldots n_m',k)$ 的整數分拆公式。
4. 利用性質 4.1 r 元一次不定方程 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ 求 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$。
5. 利用定理 4.3 找出 $F(1,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 和 $F(1,n,k)$ 的生成函數
6. 利用 $f(m,n,k)=F(m,n,k)-F(m,n,k-1)$ 求出 $f(m,n,k)$ 和 $f(m,n_1'n_2'\ldots n_m',k)$

5.2 未來展望

1. 由於 $F(1,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 可視為 r 元不定方程 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ 的非負整數解個數，所以可利用同分演算法計算出 r 元不定方程 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ 的非負整數解個數，嘗試將來能利用 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ 的非負整數解個數一般式找出 $F(m,n,k)$ 的一般式。
2. 由於 $F(m,n,k)$ 中 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 的係數為 $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} i^{p_i} p_i!} > 0$ 且 $\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_r=k} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} i^{p_i} p_i!} = 1$，所以可將 $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} i^{p_i} p_i!}$ 視為 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 對應的機率，於是 $F(m,n,k)$ 可視為隨機變數 $X=F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 的期望值 $E(X)$，但 $F(m,n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r,0)$ 與 $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} i^{p_i} p_i!}$ 的對應關係目前不清楚，嘗試將來能找出其對應關係。
3. 我們在網路上找到 $F(m,1,k)$ 的生成函數 $\dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)}$，但不清楚它的模型，希望我們以後可以用更直觀的證法去證明，並結合 $F(1,n,k)$ 的生成函數去作出 $F(m,n,k)$ 的生成函數。

6 參考資料

1. 藍士恩 (2018)。整數分割。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。檢自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/58/pdf/NPHSF2018-050406.pdf
2. 周家發 (無日期)。點算的奧秘: 對稱群的循環式。檢自 http://chowkafat.net/Enumeration23.html
3. 周志成 (2013)。線代啟示錄 -第二類 Stirling 數與貝爾數。檢自 https://ccjou.wordpress.com/2013/10/28/%E7%AC%AC%E4%BA%8C%E9%A1%9E-stirling-%E6%95%B8%E8%88%87%E8%B2%9D%E7%88%BE%E6%95%B8/
4. Weisstein, Eric W. "Stirling Number of the Second Kind." From MathWorld - A Wolfram Web https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html