作品評語

崔茂培教授
臺灣大學數學系

本作品主要探討下列這個問題：給定一個不等腰三角形 ΔABC，和兩個點 (P,Q), 我們以 (ABC) 代表三角形 ΔABC 的外接圓，H 為三角形 ΔABC 之垂心。
對於點 P，我們可以考慮對外接圓 (ABC) 建構一個圓西瓦三角形，假設 $\overline{PA}$ 線段與外接圓 (ABC) 交於 A_1，$\overline{PB}$ 線段與外接圓 (ABC) 交於 B_1，$\overline{PC}$ 線段與外接圓 (ABC) 交於 C_1。點 P 對外接圓 (ABC) 之圓西瓦三角形即為三角形 $\Delta A_1B_1C_1$。
對於點 Q，我們可以考慮對三角形 ΔABC 建構一個佩多三角形, Q 分別對三角形 ΔABC 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}, \overline{AB}$ 作垂足 A_2, B_2, C_2，三角形 $\Delta A_2B_2C_2$ 即為臬 Q 對三角形 ABC 之佩多三角形。
現在我們考慮臬 A_1 對 A_2 之對稱點為 A_3，臬 B_1 對 B_2 之對稱點為 B_3，臬 C_1 對 C_2 之對稱點為 C_3。本作品探討 (P,Q) 滿足什麼條件 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。本作品證明了以下幾個結果：

(i) 取 P 為 ΔABC 垂心 H，Q 為任意點則 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。

(ii) 取 P 為 ΔABC 外心 O，Q 為任意點則 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。

(iii) 取 Q 為 ΔABC 外心 O ，P 為任意點則 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。

(iv) 取 P 為 ΔABC 外接圓上一點，Q 為任意點則 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。

(v) 取 P, Q 為同一點則 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。

(vi) 取 Q 為 ΔABC 垂心 H, ，P 為任意點則 H, A_3, B_3, C_3 四個點會共圓。

(vii) 當取 P 是定點時，Q 滿足 H, A_3, B_3, C_3 四個共圓的軌跡不超過 6 次。

這些問題的原型是下面這個問題：給定三角形 ABC，外心為 O 和一點 Q，令 O 的圓西瓦三角形為 $\Delta A_1B_1C_1$，Q 的佩多三角形為 $\Delta A_2B_2C_2$，A_1 對 A_2 的對稱點為 A_3，類似定義 B_3, C_3，則 A_3, B_3, C_3, H。另外修展在研究的過程中發現 Nguyen Van Linh 考慮了上列第 (ii) 種的情況。修展証明主要方法是利用平面幾何的基本性質證明了大部分的情況。在這個研究的主題最困難的情況是第 (vii) 情況，修展引進了射影幾何的齊次座標，並對齊次多項式方程組的解作了一個有效的估計，此技巧已涉及代數幾何中的技巧。在這作品中可以看出修展對平面幾何性質非常純熟，另外還引進投影幾何及代數幾何的工具來解決問題，這種探索研究的精神是值得鼓勵的，期待他未來能繼續數學的研究。